UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - INSTITUTO DE FÍSICA

Exercício Um

5 de dezembro de 2017

1 Exercício

Uma partícula de massa m está presa a uma mola de comprimento l_0 e constante elástica k, de tal forma que ela somente pode se deslocar *ao longo da direção vertical*. Outra partícula de massa m está acoplada à primeira através de uma haste fina de comprimento l e massa desprezível. O movimento desse pêndulo está restrito a um plano vertical que contém a reta correspondente à trajetória da primeira partícula.

(a) Considere a origem das coordenadas na posição de equilíbrio da mola. Escreva a lagrangiana.

(b) Escreva as equações de Euler-Lagrange.

2 Resposta

Item (a): *Finja que o exercício não diz de imediato onde colocar a origem e vamos tentar nos convencer de que essa é uma boa escolha :)*

Nesse caso nós temos uma situação inusitada onde a massa que está presa à mola se movimente apenas para cima e para baixo. Entretando a outra massa faz o movimento de um pêndulo comum cujo movimento está inteiramente contido no plano (não é um problema tridimensional). Teremos o seguinte caso ilustrado na figura abaixo portanto

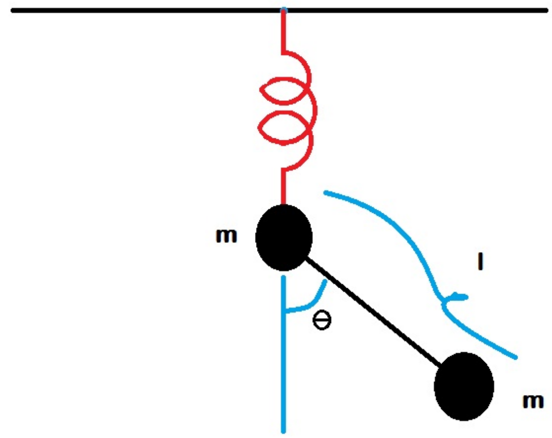

Figura 1: Aqui colocamos a massa m na mola e essa massa vibra somente na direção vertical. Acoplamos a esta uma outra massa, as duas estando presas uma à outra por uma barra de comprimento l.

Onde nós colocamos a origem?... Essa pergunta não é simples. Note que gostaríamos de usar coordenadas polares novamente, principalmente para descrever o movimento da segunda massa. Podemos usar que a massa presa à mola se movimenta só na vertical, ou seja, o seu movimento possui apenas um grau de liberdade, denotemos esse grau de liberdade por y. Pensando em coordenadas polares, podemos escrever o movimento da segunda massa como x_2 descrito por coordenadas polares e a primeira massa não afeta esse movimento, e mais, verticalmente ela afeta apenas linearmente $y_2 = y + etc.$

Pensando nisso vamos tentar resolver o exercício colocando a origem no ponto onde a mola ainda não possúi nenhuma massa acoplada (l_0). Definimos como o sentido positivo de y para cima e o sentido positivo de x para a direita com relação ao leitor.

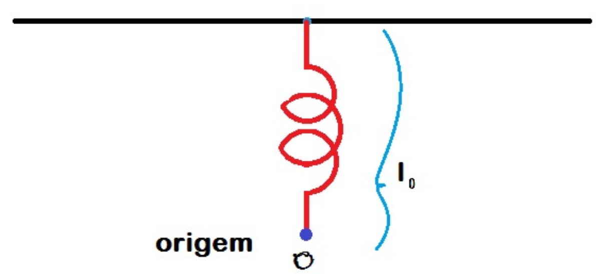

Figura 2: Esquema de onde nós colocamos a origem para resolver os problemas propostos pelo exercício.

Com essa escolha vamos escrever a parametrização dos valores x_1,y_1 que caracterizam as coordenadas da primeira massa e x_2, y_2 que caracterizam as coordenadas da segunda massa.

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ y_2 = y \end{cases} \tag{1}$$

Agora, esse valor y é uma coordenada generalizada! Observe o que essa coordenada mede: ela mede a variação com relação à posição da origem, podendo portanto ser negativa, positiva ou mesmo nula com o passar do tempo.
Agora as equações para a segunda partícula

$$\begin{cases} x_2 & = l\sin(\theta) \\ y_2 = y - l\cos(\theta) \end{cases} \tag{2}$$

Com isso teremos as seguintes energias cinéticas correspondentes a cada uma das partículas

$$T_1 = \frac{m}{2}\dot{y}^2 \tag{3}$$

$$T_2 = \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{y}\dot{\theta}\sin(\theta)\right) \tag{4}$$

A cinética total será então

$$T = T_1 + T_2 = m\dot{y}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{y}\dot{\theta}\sin(\theta) \tag{5}$$

Agora vamos calcular a energia de cada partícula. A primeira partícula possuí uma parte de energia devida à mola e outra parte devida ao potencial gravitacional mgh.

$$U_1 = U_{mola} + U_{gravidade} = \frac{k}{2}y^2 + mgy \tag{6}$$

Note que o valor de h sempre é aquele relativo à origem.
Para a segunda partícula existe somente o termo gravitacional

$$U_2 = U_{gravidade} = mgh = mg(y - l\cos(\theta)) = mgy - mgl\cos(\theta) \tag{7}$$

Portanto a energia potencial total do sistema será

$$U = U_1 + U_2 = \frac{k}{2}y^2 + 2mgy - mgl\cos(\theta) \tag{8}$$

E com isso a Lagrangeana do sistema será simplesmente

$$\mathcal{L} = T - U = m\dot{y}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{y}\dot{\theta}\sin(\theta) - \frac{k}{2}y^2 - 2mgy + mgl\cos(\theta) \tag{9}$$

Note que temos então as seguintes coordenadas generalizadas $\mathcal{L} = \mathcal{L}(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$ de modo que teremos então duas equações de Euler-Lagrange.

Item (b): **Equação para y:**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -ky - 2mg \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = 2m\dot{y} + ml\dot{\theta}\sin(\theta) \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = 2m\ddot{y} + ml\sin(\theta)\ddot{\theta} + ml\dot{\theta}^2\cos(\theta) \tag{12}$$

Temos portanto a equação

$$2m\ddot{y} + ml\sin(\theta)\ddot{\theta} + ml\dot{\theta}^2\cos(\theta) + ky + 2mg = 0 \tag{13}$$

Equação para θ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = ml\dot{y}\dot{\theta}\cos(\theta) - mgl\sin(\theta) \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{y}\sin(\theta) \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y}\sin(\theta) + ml\dot{y}\dot{\theta}\cos(\theta) \tag{16}$$

Portanto

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y}\sin(\theta) + ml\dot{y}\dot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{y}\dot{\theta}\cos(\theta) + mgl\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \tag{17}$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{y}\sin(\theta) + g\sin(\theta) = 0 \tag{18}$$

E isso completa esse exercício