

# Sistemas Caóticos em Mecânica Clássica

Ana Carolina B. Dantas, Danielle de Brito Silva, Fernanda Hüller N., Heitor Ernandes  
*Instituto de Física, Universidade de São Paulo*

## 1 Introdução

### 1.1 Objetivos

O desenvolvimento científico dos séculos XVIII e XIX foi tão acelerado e abrangente que, na época, ousou-se afirmar que todas as leis da Física eram conhecidas completamente. O surgimento da Mecânica Quântica e da Relatividade, no início do século XX, mudaram esse paradigma, mas ainda demorou mais meio século para que se abrisse um novo campo a partir da Mecânica Clássica - um campo que não entrava nos limites quânticos ou relativísticos, mas ainda assim desafiava as noções de previsibilidade do sistema dado o conhecimento das forças e condições iniciais - o Caos. Este trabalho tem por objetivo explicar de forma geral o conceito de Caos, bem como as ferramentas disponíveis para seu estudo, e aplicar os conhecimentos adquiridos nas disciplinas de Mecânica sobre formulação lagrangiana a sistemas caóticos.

### 1.2 O Pêndulo Duplo

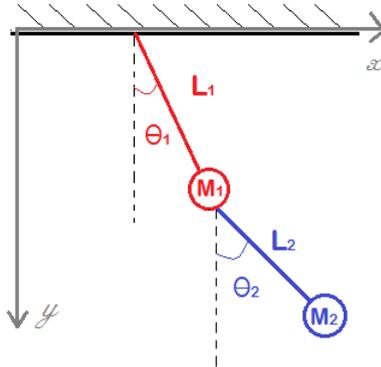


Figura 1: Pêndulo duplo com massas pontuais  $M_1$  e  $M_2$  presas em hastes de comprimento  $L_1$  e  $L_2$ . O sistema pode ser completamente caracterizado pelos ângulos das duas hastes com a vertical.

#### 1.2.1 Dedução das Equações

O pêndulo duplo é um exemplo famoso da utilidade e simplicidade da formulação Lagrangiana. O sistema, conforme visto na Figura 1 pode ser descrito por apenas duas coordenadas independentes,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , uma vez que as posições  $x_1, y_1, x_2$  e  $y_2$  são dadas em função dos comprimentos  $L_1$  e  $L_2$  e dos ângulos pela relação:

$$\begin{cases} x_1 = L_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = L_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_2 = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 \\ y_2 = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (2)$$

Sabendo que a Lagrangiana do sistema é dada pelas energias cinética e potencial de ambas as partículas, podemos escrever:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}M_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + gM_1y_1 + gM_2y_2 \quad (3)$$

E derivando as expressões (1) e (2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_1 &= -L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \implies \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + L_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_1 &= -L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

$$\implies \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \quad (5)$$

A Lagrangiana em termos das coordenadas generalizadas é, então:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}M_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + g(M_1 + M_2)L_1 \cos \theta_1 + gM_2 L_2 \cos \theta_2 \quad (6)$$

Dela, podemos obter, pelas equações de Euler-Lagrange, as equações de movimento:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-M_2 L_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - M_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g(M_1 + M_2) \sin \theta_1}{(M_1 + M_2)L_1} \quad (7)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-L_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_2}{L_2} \quad (8)$$

Com algum esforço, essas equações podem ser desacopladas e resolvidas numericamente. Os resultados da integração numérica serão mostrados na próxima seção.

### 1.2.2 Comportamento do Sistema

O primeiro caso testado para o pêndulo duplo - até como uma forma de garantir que os resultados da integração numérica fazem sentido - foi o caso com  $M_2 \gg M_1$  e  $\theta_2 = \theta_1$ , o caso que se reduz aproximadamente a um pêndulo simples. As Figuras 2a e 2b mostram o comportamento esperado: um arco de circunferência centrado em zero como trajetória no plano  $xy$  e a altura das massas oscilando de forma senoidal com o tempo.

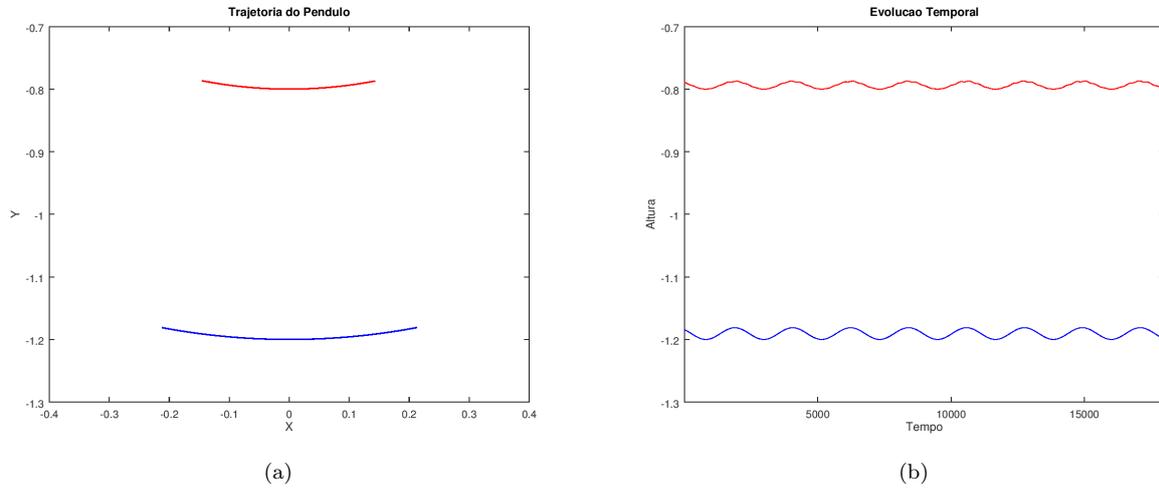


Figura 2: (a)Trajetória das duas massas ( $M_1$  - vermelha, e  $M_2$  - azul) no plano  $xy$ . (b) Evolução temporal da altura das duas massas.)

Em seguida, a mudança de alguns parâmetros permite observar diversos comportamentos no sistema: a Figura 3 permite ver um comportamento semi-periódico, com uma quantidade bem definida de máximos que ariam levemente com o tempo; e a Figura 4 mostra um comportamento sem nenhuma ordem aparente.

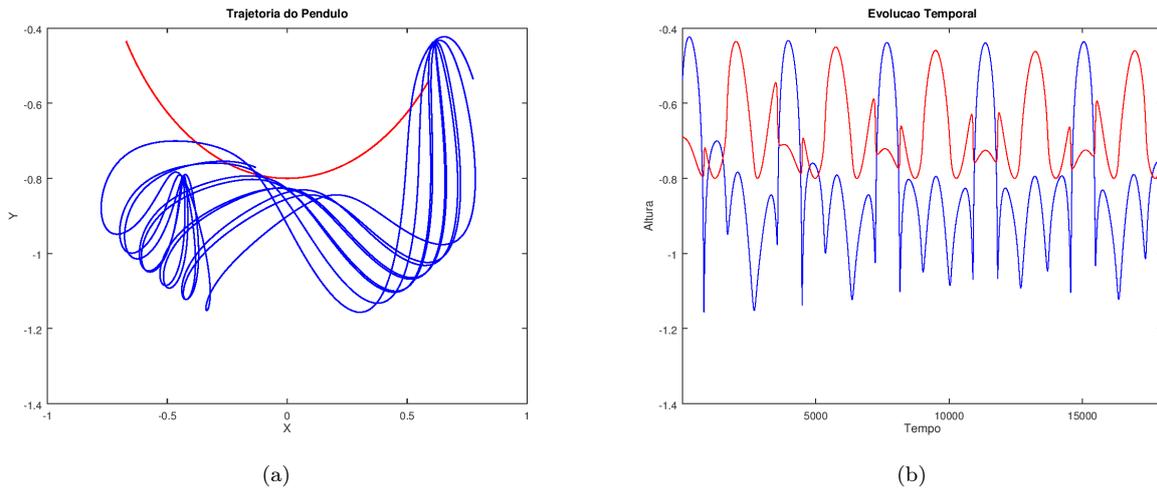


Figura 3: (a)Trajetória das duas massas ( $M_1$  - vermelha, e  $M_2$  - azul) no plano  $xy$ . (b) Evolução temporal da altura das duas massas.)

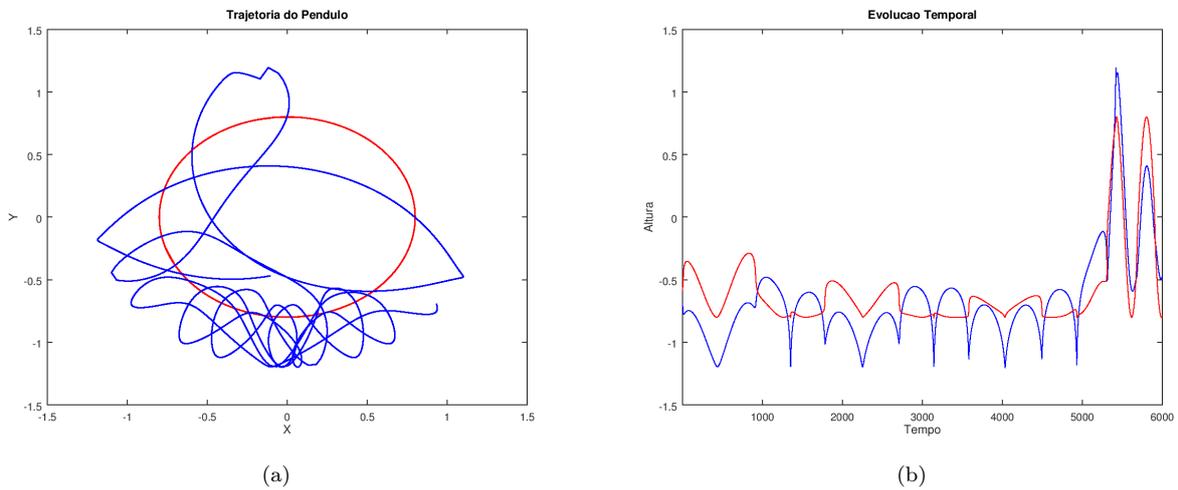


Figura 4: (a)Trajetória das duas massas ( $M_1$  - vermelha, e  $M_2$  - azul) no plano  $xy$ . (b) Evolução temporal da altura das duas massas.)

Mas o mais impressionante não é sequer a existência desses comportamentos diversos. Consideremos agora o caso semi-periódico da Figura 3. Alterando a massa 1 de  $0,5\text{ kg}$  para  $0,6\text{ kg}$ , a Figura 5 mostra como as trajetórias das duas situações começam muito semelhantes, mas divergem até o ponto em que não existe nenhuma correlação entre ambas.

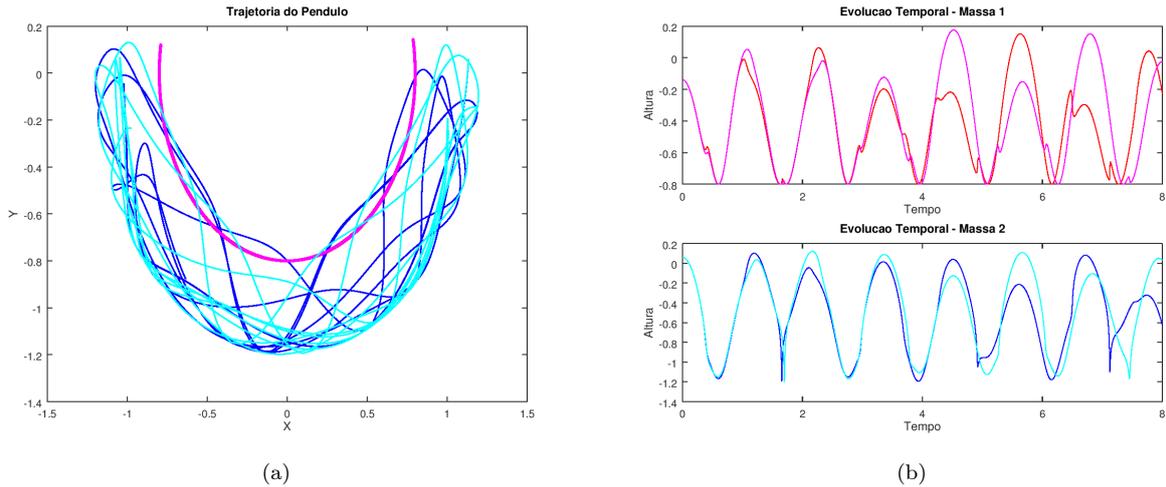


Figura 5: (a) Em vermelho e azul, as trajetórias das massas sob as condições iniciais do caso semi-periódico tratado anteriormente. Em magenta e ciano, a trajetória partindo do mesmo ponto inicial, porém com uma das massas aumentada em  $100g$ . (b) Evolução temporal da altura das duas massas.)

O pêndulo duplo pertence a uma classe de problemas à qual chamamos “Sistemas Caóticos”, sendo tratados a seguir.

### 1.3 Sistemas Caóticos

#### 1.3.1 Definição e Condições para a Existência do Caos

Um sistema é dito caótico quando apresenta sensibilidade às condições iniciais - trajetórias divergindo exponencialmente com pequenas mudanças de parâmetros. As condições para que um sistema apresente comportamento caótico podem ser enumeradas levando-se em conta as equações que descrevem o sistema. Para sistemas dinâmicos contínuos, comportamento caótico só pode surgir em três ou mais dimensões, e requer a presença de não-linearidades. O pêndulo duplo, por exemplo, pode ser descrito pelas variáveis  $\theta_1, \theta_2, \omega_1 = \frac{d\theta_1}{dt}$  e  $\omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt}$ , satisfazendo os requisitos de dimensionalidade; e termos não lineares aparecem, entre outros lugares, em  $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ .

#### 1.3.2 Métodos para a Detecção e Estudo do Caos

Nem sempre as equações de um sistema dinâmico são completamente conhecidas, então se torna vital possuir outras maneiras de caracterizar o comportamento de sistemas caóticos. Em física, o *espaço de fase* é definido como um espaço  $2N$ -Dimensional formado pelas  $N$  coordenadas espaciais  $q$  e  $N$  derivadas  $\dot{q}$ . A análise das trajetórias no espaço de fase constitui uma importante ferramenta para a caracterização do comportamento de sistemas dinâmicos.

Quando um sistema apresenta comportamento periódico sua trajetória no espaço de fases se mostra fechada, sendo o número de voltas necessárias para retornar ao ponto inicial correspondente à periodicidade do sistema. A essa figura damos o nome de *atrator periódico*. Já num sistema caótico, apesar das trajetórias no espaço de fase se manterem próximas e formarem um padrão, elas nunca se fecham - ou seja, o comportamento caótico é aperiódico - e a essa figura damos o nome de *atrator estranho*.

Para casos em que a visualização do espaço de fases é difícil - geralmente devido a sua alta dimensionalidade - outra ferramenta útil é a utilização da “Seção de Poincaré”. A seção de Poincaré consiste em realizar uma projeção para uma dimensão  $N - 1$ , uma vez que essa transformação ainda mantém as propriedades do sistema.

Encontrar a seção de Poincaré de um sistema requer escolher um plano de dimensão  $N - 1$  e marcar nele os pontos em que a trajetória do espaço de fase o cruza indo num sentido específico. Na prática, isto nem sempre é conveniente, mas algumas outras formas de mapeamento podem ser definidas. Por exemplo, o Teorema de Takens afirma que uma variável do sistema caótico guarda as mesmas propriedades de todas as outras. Assim sendo, o estudo dos máximos de uma variável através de um Mapa de Retorno pode classificar o sistema mais do que adequadamente. O mapa de retorno consiste em tomar os  $n$  máximos de uma variável, e colocá-los num gráfico contra os máximos de posição  $n - k$ .

As Figuras 6 e 7 mostram uma projeção do espaço de fases e o Mapa do 1º Retorno ( $k = 1$ ) para o caso que se assemelha ao pêndulo simples e o que apresenta comportamento caótico. Enquanto a projeção do espaço de fases do primeiro caso não apresenta a elipse que seria esperada de um pêndulo simples real, ainda assim é possível dizer que a trajetória é fechada, o mapa do retorno mostra claramente que, para cada massa, apenas um ponto com  $y$

máximo foi atingido. Já para o caso caótico, a trajetória no espaço de fases até segue um padrão, mas claramente não se fecha, e os pontos no mapa do retorno são dispersos.

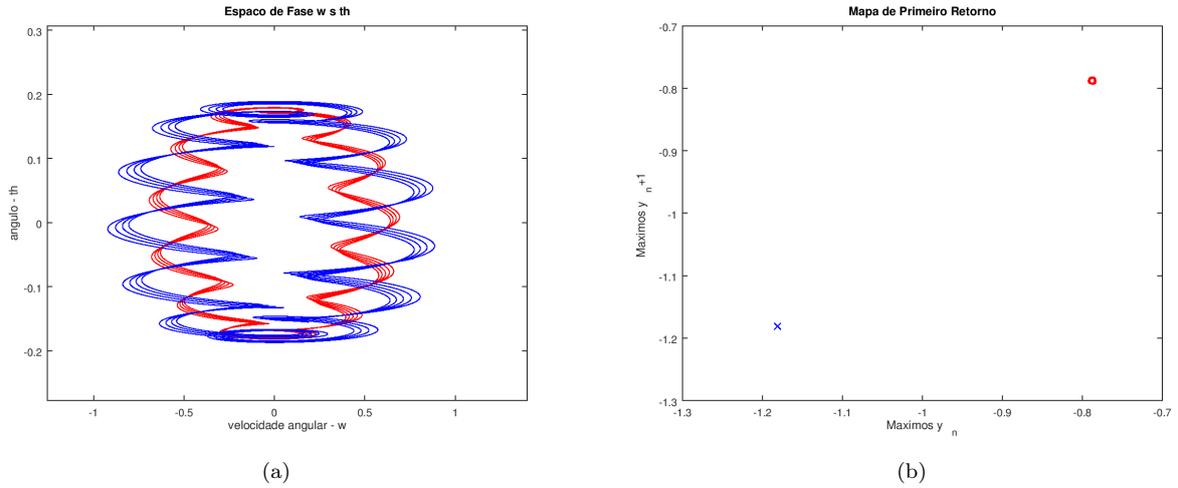


Figura 6: (a) Projeções do espaço de fase -  $\theta_1$  e  $\omega_1$ , referentes a  $M_1$  em vermelho, e para  $M_2$  em azul. (b) Mapa de 1º Retorno, correlacionado as posições dos máximos em  $y$

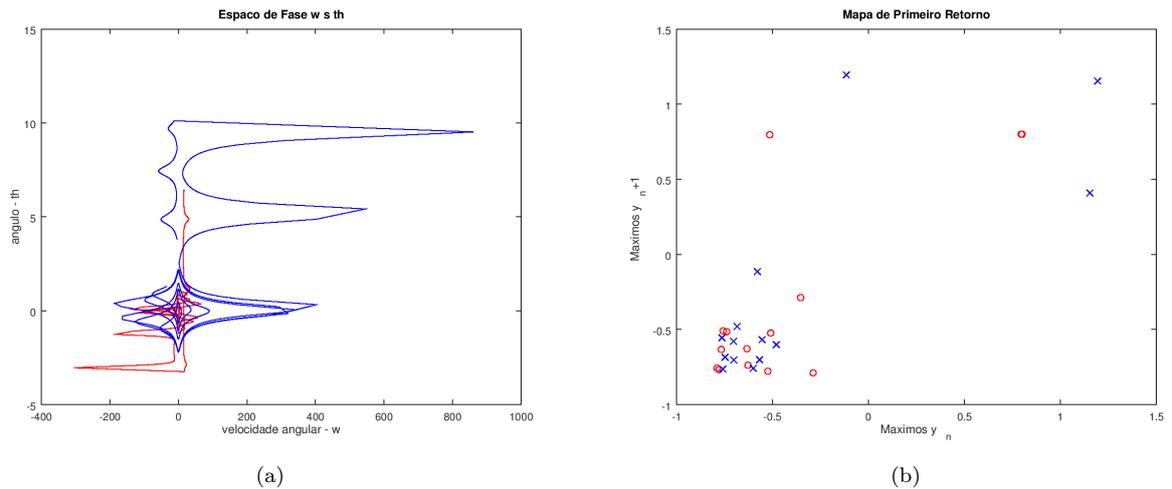


Figura 7: (a) Projeções do espaço de fase -  $\theta_1$  e  $\omega_1$ , referentes a  $M_1$  em vermelho, e para  $M_2$  em azul. (b) Mapa de 1º Retorno, correlacionado as posições dos máximos em  $y$

## 2 Exemplos Mecânicos de Caos

### 2.1 Orbitas de Hénon-Heiles

Outro exemplo de Caos associado a física e a astronomia é o estudo de Hénon e Heiles, que ao tentar construir uma Hamiltoniana para as orbitas de estrelas próximas ao centro da galáxia, contidas em um plano, obtiveram um termo de terceira ordem, como pode-se ver na equação 9.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \lambda(x^2y - \frac{y^3}{3}), \quad (9)$$

e pode-se escrever o potencial referente ao  $\mathcal{H}$  da equação 9, vide equação 10, e as linhas equipotenciais podem ser vistas na figura, 8, que é fruto de uma simulação feita em python.

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \lambda(x^2y - \frac{y^3}{3}), \quad (10)$$

sendo o potencial descrito acima, como um termo, sendo um oscilador harmônico em duas dimensões e o outro termo com  $\lambda$  um termo perturbativo.

Assim tem-se um sistema de equações diferenciais:

$$\dot{x} = p_x, \quad (11)$$

$$\dot{p}_x = -x - 2\lambda xy, \quad (12)$$

$$\dot{y} = p_y, \quad (13)$$

$$\dot{p}_y = -y - \lambda(x^2 - y^2), \quad (14)$$

sendo  $\lambda$  um termo de unidades.

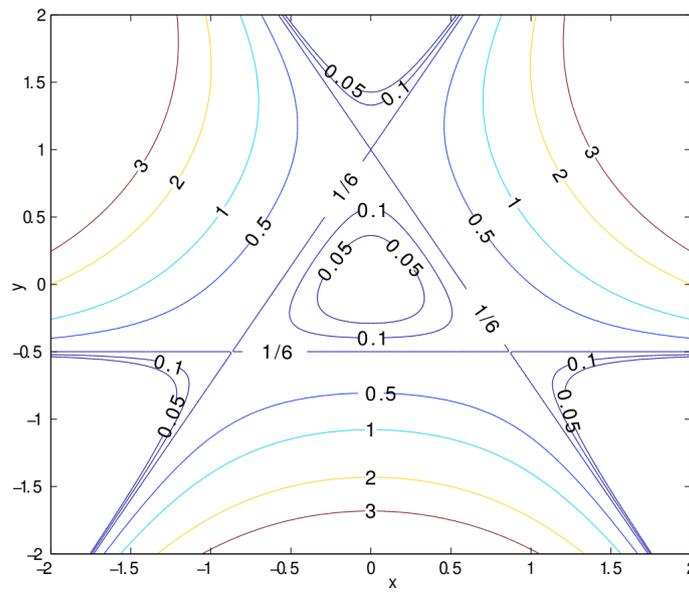


Figura 8: Gráfico que representa linhas equipotenciais do potencial de Hénon-Heiles.

### 2.1.1 Seções de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles

Para melhor estudar o comportamento do sistema de Henon-Heiles no espaço de fases foram feitas Seções de Poincaré para quatro valores adimensionais de energia ( $1/12, 1/9, 1/8$  e  $1/6$ ), uma vez que esta técnica é de grande utilidade para visualizar trajetórias tridimensionais com energia constante.

Para a construção das imagens apresentadas nas Figuras 9, 10, 11 e 12. foi utilizado um script em *python*, onde o método de Runge-Kutta de ordem quatro foi utilizado para integrar as equações apresentadas no início desta seção. As seções de Poincaré são projeções no espaço de fase e representam a coordenada  $y$  (no eixo  $x$ ) e o momento linear  $p_y$  (no eixo  $y$ ).

A Figura 9 apresenta as Seções de Poincaré para uma energia adimensional de  $1/12$ , construídas para 1, 15 e 100 trajetórias que representam as diferentes condições iniciais. Nessas Seções de Poincaré é possível ver que as órbitas são consideravelmente complexas, porém não caóticas.

Na mesma figura, é observado que existem ilhas de estabilidade: órbitas periódicos que aparecem como linhas fechadas nas Seções de Poincaré e que se distribuem ao redor de pontos elípticos (pontos de equilíbrio estável). Essas órbitas periódicas nada mais são do que representações da evolução de trajetórias quase regulares. [1].

Trajetoórias regulares são aquelas nas quais a trajetória passa novamente pelos pontos iniciais em algum momento da evolução temporal. Já trajetórias quase regulares são aquelas onde o sistema parte de coordenadas iniciais, porém a trajetória nunca retorna ao ponto de partida, estando limitada a no máximo se aproximar muito dele durante a evolução temporal do sistema. [1].

As trajetórias particulares discutidas nos parágrafos anteriores, sugerem que o sistema é integrável para a energia adotada. O fato do sistema ser integrável implica que ele é regular, isto é, não apresenta caos. Se um sistema Hamiltoniano conservativo com  $n$  graus de liberdade é dito integrável, então devem existir  $n$  constantes de movimento ( $F_i$ ) independentes em involução, como pode ser visto nas Equações 15 e 16

$$\{F_i, H\} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

Onde

$$\{F_i, H\} = \sum_i^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (17)$$

é o Parêntese de Poisson. [1].

O sistema de Hénon-Heiles possui 4 graus de liberdade e no caso integrável, possui um número igual de constantes de movimento, sendo elas a energia total, o momento angular e combinações de coordenadas e momentos.

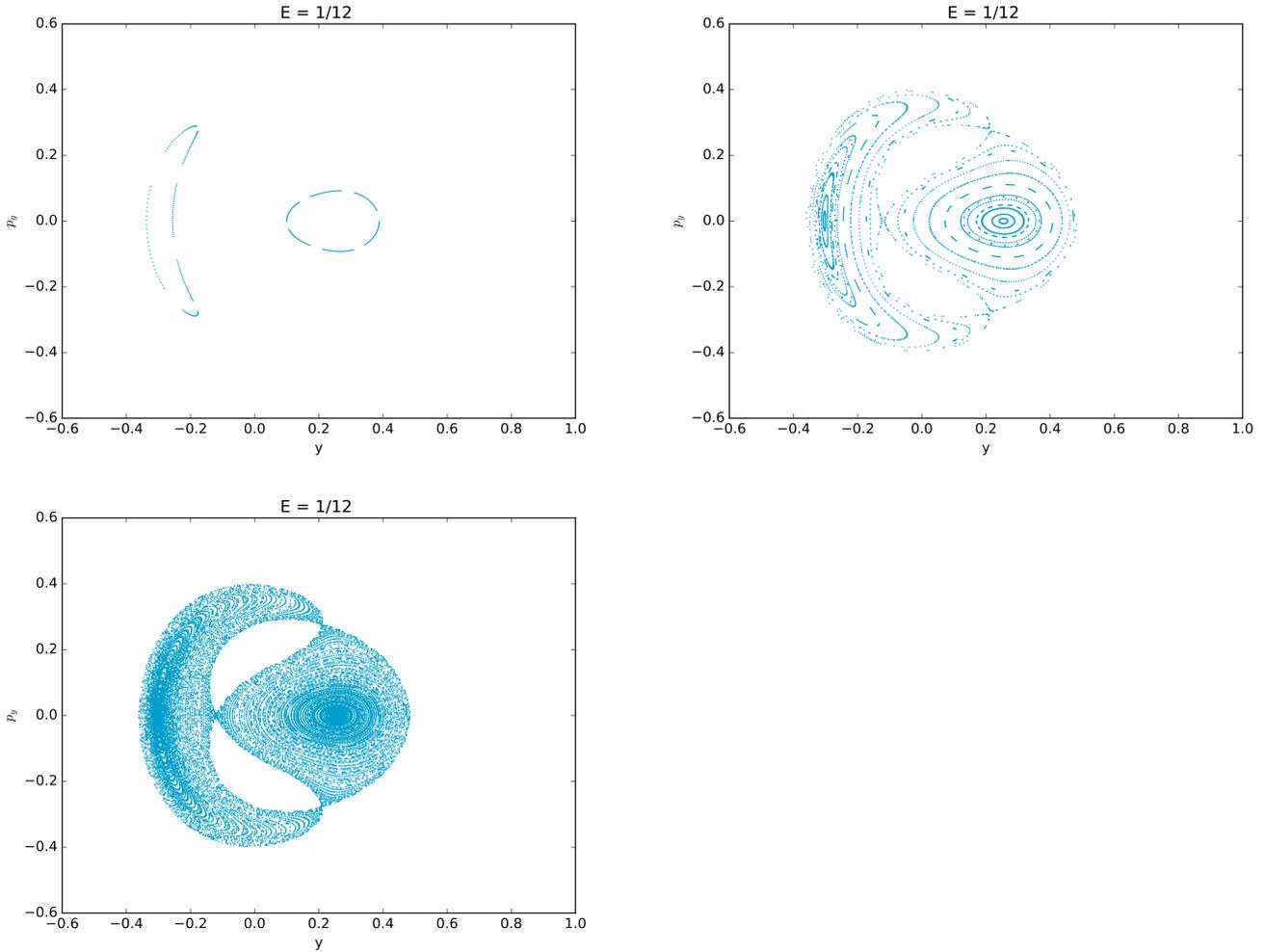


Figura 9: Seções de Poincaré para energia de  $1/12$ . Painel superior esquerdo: Seção de Poincaré para 1 trajetória. Painel superior direito: Seção de Poincaré para 15 trajetórias. Painel inferior esquerdo: Seção de Poincaré para 100 trajetórias.

A Figura 10 contém as Seções de Poincaré para a energia adimensional  $1/9$  em diferentes condições iniciais. Com essa energia, é possível notar que o sistema passa de integrável para misto, havendo uma transição de fase. Dessa forma, a trajetória é formada predominantemente por ilhas que representam trajetórias regulares e quase regulares e minoritariamente por pontos que representam trajetórias caóticas.

Trajetoórias caóticas não apresentam regularidade, de modo que a trajetória pode nunca mais passar pelos pontos iniciais ou se aproximar de tais pontos durante sua evolução temporal do sistema. [1].

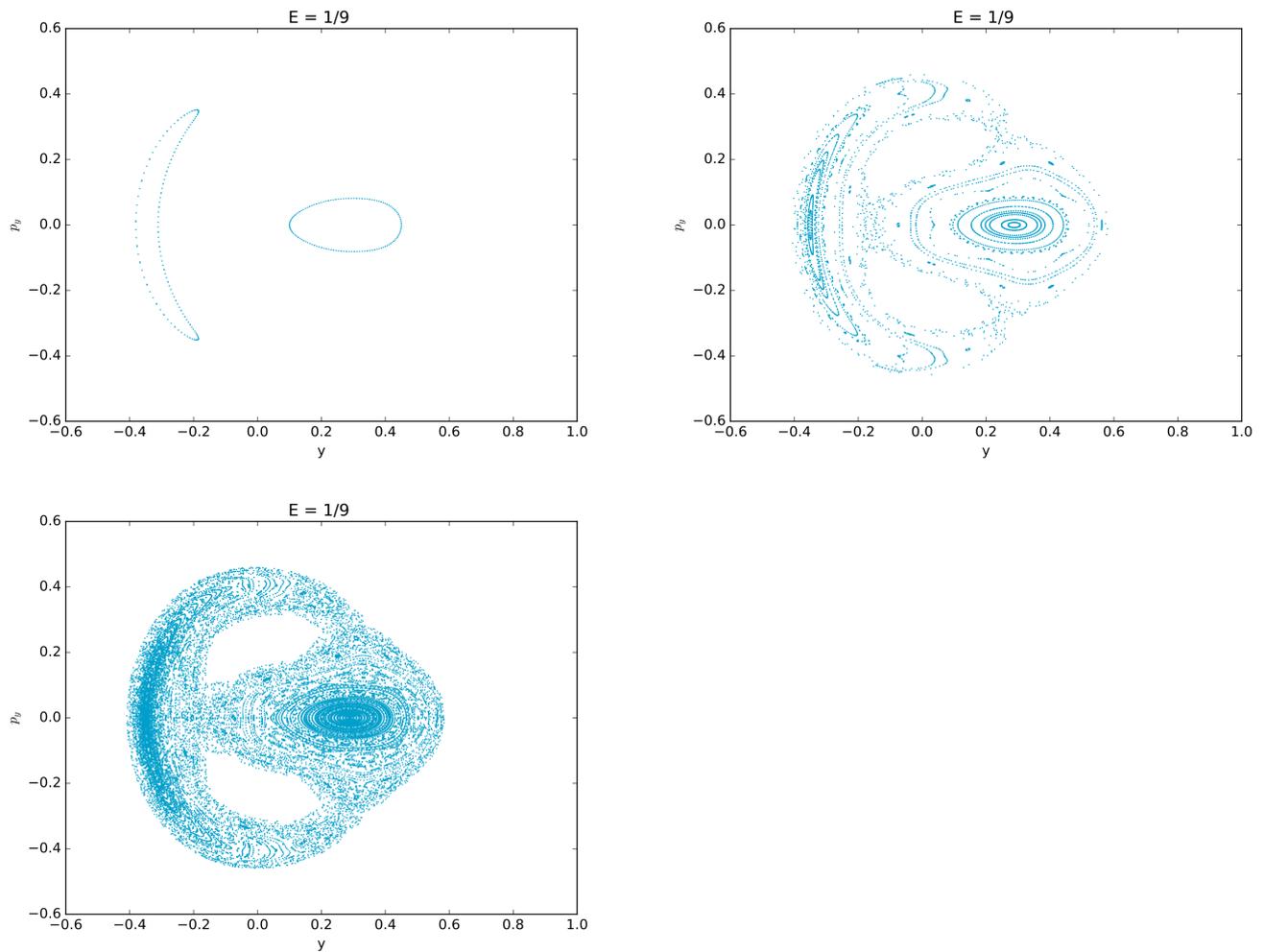


Figura 10: Seções de Poincaré para energia de  $1/9$ . Painel superior esquerdo: Seção de Poincaré para 1 trajetória. Painel superior direito: Seção de Poincaré para 15 trajetórias. Painel inferior esquerdo: Seção de Poincaré para 100 trajetórias.

As Seções de Poincaré para diferentes condições iniciais utilizando a energia de  $1/8$  podem ser vistas na Figura 11. Nestas imagens é possível ver que existe uma extensa região de comportamento caótico (maior do que no caso onde a energia era igual a  $1/9$ ), mas também existem regiões de estabilidade do sistema representada pelas ilhas em torno dos pontos elípticos, de modo que temos novamente um sistema misto.

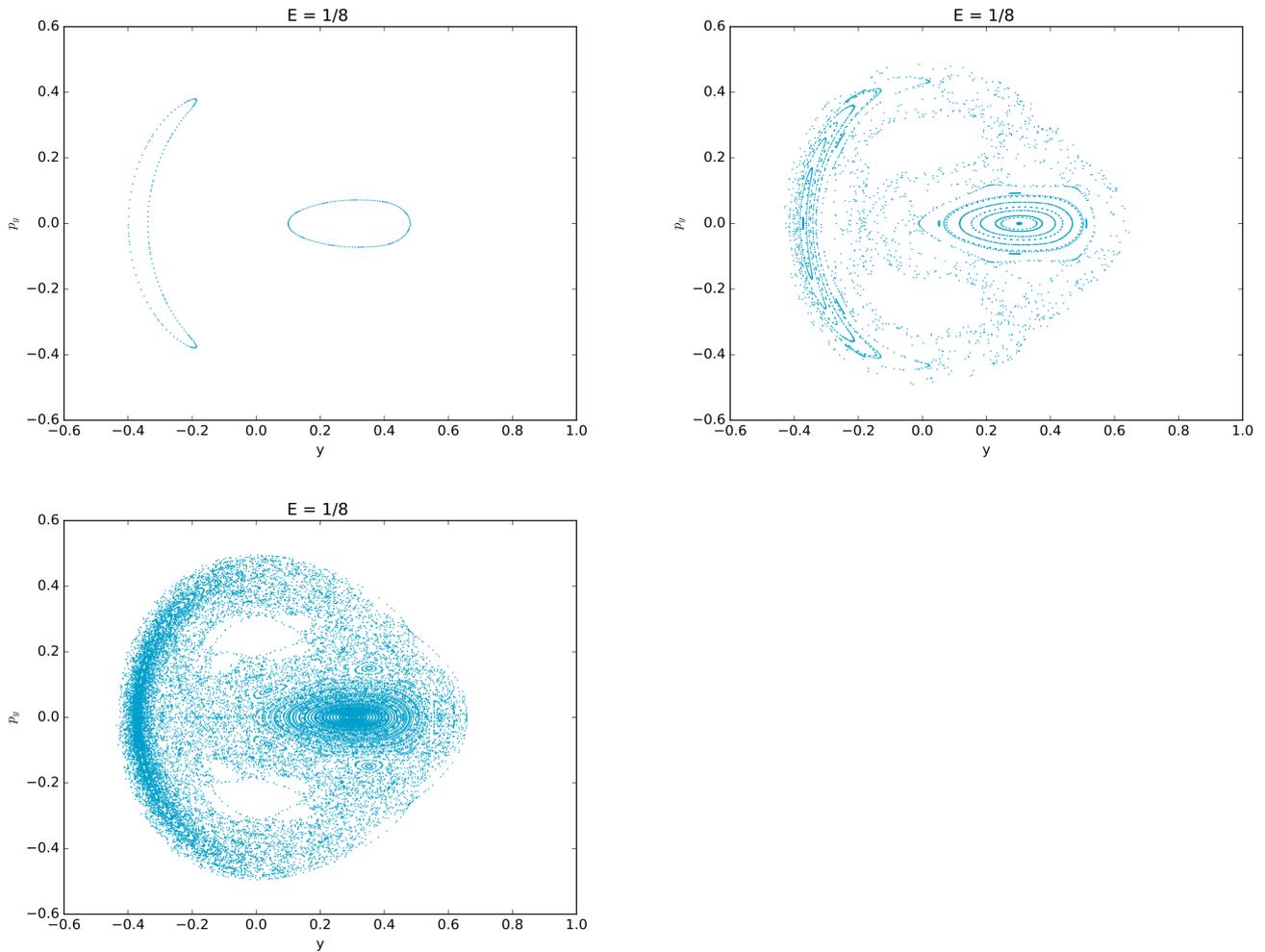


Figura 11: Seções de Poincaré para energia de  $1/8$ . Painel superior esquerdo: Seção de Poincaré para 1 trajetória. Painel superior direito: Seção de Poincaré para 15 trajetórias. Painel inferior esquerdo: Seção de Poincaré para 100 trajetórias.

As seções de Poincaré para a energia de  $1/6$  pode ser vista na Figura 12. Neste caso, o comportamento é predominantemente caótico, havendo apenas algumas pequenas ilhas de estabilidade. Tal comportamento era esperado, uma vez que a equação de Hénon-Heiles é não-linear e não integrável exceto em energias especiais.

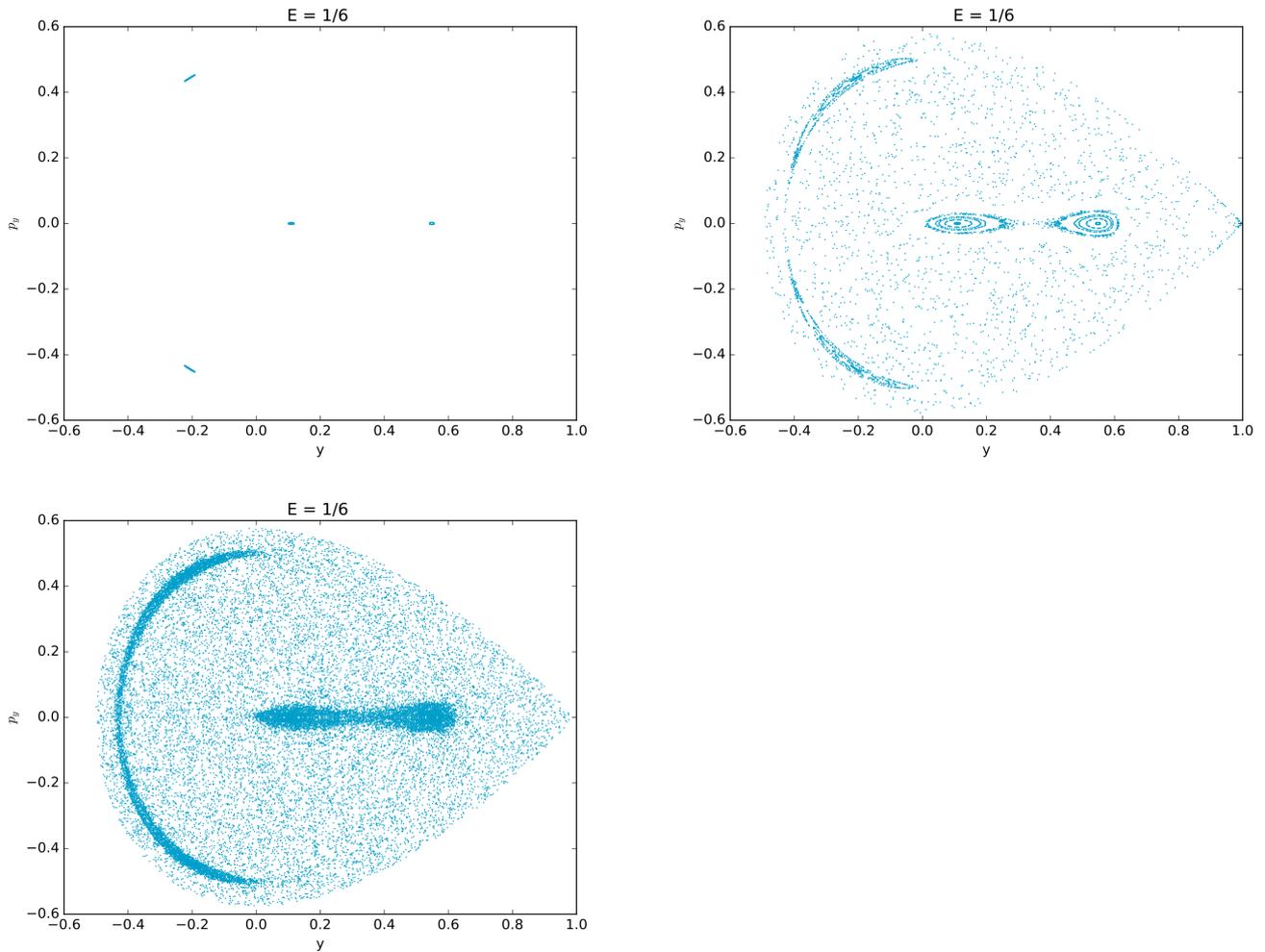


Figura 12: Seções de Poincaré para energia de  $1/6$ . Painel superior esquerdo: Seção de Poincaré para 1 trajetória. Painel superior direito: Seção de Poincaré para 15 trajetórias. Painel inferior esquerdo: Seção de Poincaré para 100 trajetórias.

Para essa energia, também foram feitos gráficos para as trajetórias que ilustram o fato de que é possível encontrar trajetórias caóticas e não caóticas para  $E=1/6$  (Figura 13).

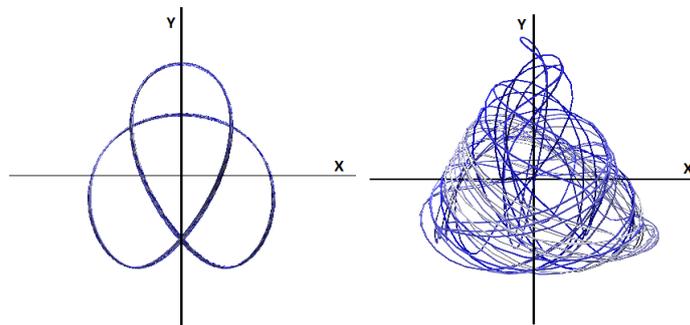


Figura 13: Painel esquerdo: Trajetória não caótica para  $E=1/6$ . Painel direito: Trajetória caótica para  $E=1/6$ .

A partir das Seções de Poincaré apresentadas nas Figuras 9, 10, 11 e 12 foi visto que de modo geral as trajetórias regulares e quase regulares ficam confinadas à áreas determinadas no espaço de fase, enquanto que as trajetórias caóticas se distribuíam por toda a sua extensão. Além disso, foi visto para o sistema de Hénon-Heiles que quando alteramos as condições iniciais do sistema, aumentando a sua energia, o comportamento do objeto de estudo torna-se cada vez mais caótico.

## 2.2 Roda da Água

## 2.3 O Sistema de Equações de Lorenz

No começo dos anos 1960, com o avanço da era dos computadores, o matemático e meteorologista Edward Lorenz estudava as peculiaridades do clima simulando a convecção de fluidos. Seu modelo de tempo era composto por 12 variáveis dinâmicas como, por exemplo, temperatura, pressão e velocidade, e por um certo conjunto de parâmetros. Uma única simulação poderia demorar horas, enquanto que o programa gerava uma infinidade de números correspondentes a mudanças dessas variáveis. A cada rodada, Lorenz não era capaz de prever quais seriam os números que o programa devolveria, indicativo de que, apesar de determinístico, seu sistema era imprevisível.

Um dia Lorenz decidiu reproduzir uma de suas antigas simulações e, para isso, colocou como condições iniciais alguns dos valores devolvidos pelo programa bem no meio da simulação (o conjunto de parâmetros que utilizou foi o mesmo). Como a história conta, Lorenz deixou a nova simulação rodando enquanto foi pegar um café. Quando voltou, o matemático ficou surpreso ao ver que a nova simulação não reproduziu os antigos dados e, na verdade, levou o sistema por um caminho completamente diferente. Procurando por possíveis erros, Lorenz percebeu que enquanto o programa imprimia os dados com três casas decimais, o maquinário trabalhava com seis. Portanto, ao invés de usar como condições iniciais os valores exatos da antiga simulação, ele usou valores que diferiam dos originais por algo em torno de  $10^{-4}$  a  $10^{-6}$ . Ao analisar com mais calma os novos dados, o matemático observou que eles reproduziam a antiga simulação apenas por um curto intervalo de tempo e depois divergiam exponencialmente. Lorenz então concluiu que seu sistema apresentava uma incrível sensibilidade a pequenas mudanças das condições iniciais. Assim, a ideia moderna de caos originou-se em 1963 com o *paper* em que o matemático descrevia estes acontecimentos e mostrava a existência de sistemas caóticos na natureza.

Após alguns anos de trabalho, Lorenz foi capaz de reduzir seu sistema a um conjunto de três equações diferenciais não-lineares e autônomas, hoje conhecidas como equações de Lorenz. Apesar de governadas por leis determinísticas, elas se comportam de forma imprevisível e aperiódica, além de apresentarem sensibilidade às condições iniciais.

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad (18)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y, \quad (19)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z. \quad (20)$$

Estas equações são capazes de descrever o movimento de um fluido numa célula convectiva. Quando um líquido ou um gás é aquecido por baixo, tende a circular num padrão estável de “rolos”: a porção quente sobe por um dos lados do cilindro, perde calor e volta a descer pelo outro lado – Figura (14). Se a diferença de temperatura for grande o suficiente, uma instabilidade aparece e os “rolos” passam a oscilar ao longo do comprimento do cilindro. Esta é exatamente a região de caos determinístico.

Os parâmetros  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $\beta$  que aparecem nas equações de Lorenz são constantes sempre positivas e correspondem a certas quantidades físicas. O parâmetro  $\rho$ , talvez o mais importante dos parâmetros, recebe o nome de número de Rayleigh. Ele indica a razão entre a temperatura da parte inferior e do topo da célula convectiva. Já as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  correspondem, respectivamente, à reversão convectiva e às variações horizontal e vertical da temperatura.

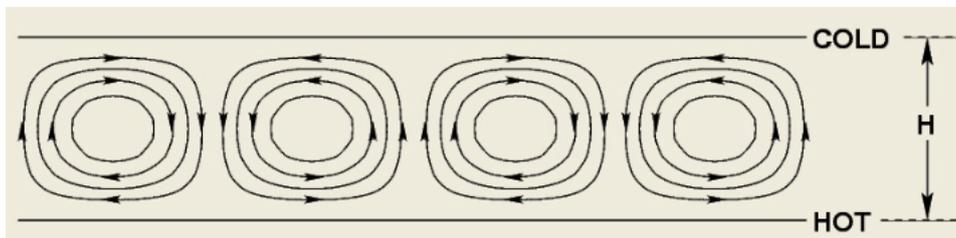


Figura 14: Esquema de convecção de um fluido aquecido por baixo.

Atualmente, simular as equações de Lorenz é uma tarefa simples e que pode ser realizada por qualquer pessoa com um computador e com conhecimentos mínimos de programação. Utilizando como parâmetros  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  e  $\beta = \frac{8}{3}$ , e como condições iniciais  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$  e  $z(0) = 1$ , é possível mostrar as consequências de mudar  $y(0)$  por apenas  $10^{-4}$ . Ao plotar as séries temporais da variável  $x$  (gráficos de como  $x$  evolui no tempo), observa-se na prática a sensibilidade do sistema em relação à mudanças ínfimas das condições iniciais. Na Figura (15), a curva em vermelho corresponde à evolução do sistema quando  $y(0) = 1$ , enquanto que a curva em azul

corresponde à mudança  $y'(0) = y(0) + 10^{-4}$ . Assim, foi necessário mudar apenas uma das variáveis por um pequeno valor para que as séries temporais divergissem completamente.

Além da sensibilidade às mudanças das condições iniciais, a Figura (15) evidencia a aperiodicidade do sistema. Isto é, não é possível definir, a princípio, um período de oscilação da variável em questão. A série temporal de  $x$  é, portanto, capaz de mostrar a natureza caótica das equações de Lorenz. Neste trabalho, outros recursos também serão utilizados para mostrar como o caos emerge destas equações (atratores, mapas de primeiro retorno e diagramas de bifurcação de período).

Para as simulações que serão aqui apresentadas, utilizou-se um programa de integração numérica baseado no método de Runge-Kutta de quarta ordem, já que o erro cometido é proporcional a  $(\Delta t)^4$ , onde  $\Delta t$  é o passo de integração. Neste caso, foi escolhido um passo de integração igual a 0.01, tal que o erro cometido é proporcional a  $10^{-6}$ .

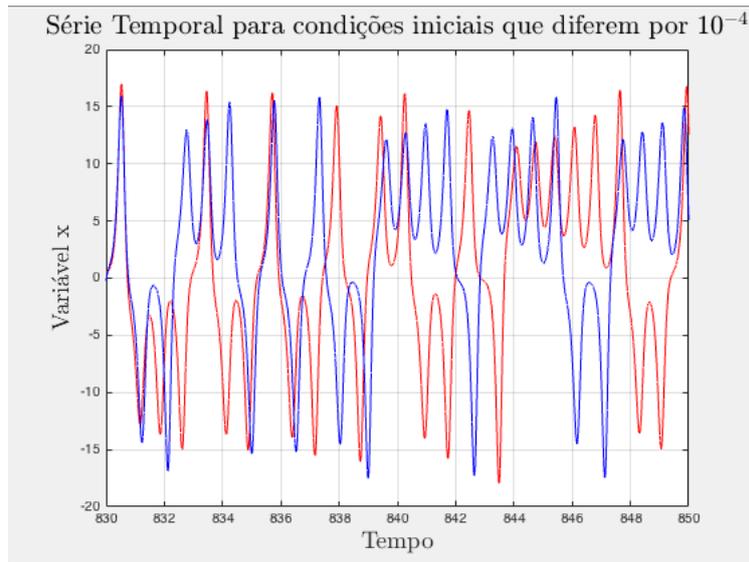


Figura 15: Sensibilidade das equações de Lorenz às mudanças das condições iniciais.

## 2.4 A Roda D'água Caótica de Malkus

Como a ideia de sistemas determinísticos perfeitamente previsíveis era predominante ao final da década de 1960, foi preciso desenvolver uma série de exemplos físicos, capazes de serem reproduzidos em laboratório, que demonstrassem a existência do caos. O primeiro análogo mecânico das equações de Lorenz foi criado e desenvolvido por Malkus e Howard no começo da década de 1970 e ficou conhecido como a roda d'água caótica.

O modelo mais simples da roda d'água consiste num sistema de copos de papel furados e arranjados circularmente, onde um filete de água cai constantemente por cima dos copos em um único ponto deste sistema. O fluxo deve ser tal que desestabilize a rotação dos copos, levando a um movimento caótico: a roda gira para um lado algumas voltas, desacelera e pode reverter a direção de rotação – Figura (16). Assim, a roda mudaria de direção por diversas vezes com o passar do tempo.

Para encontrar as equações de movimento da roda d'água e relacioná-las com as equações de Lorenz, deve-se considerar o fluxo de água que entra e sai do copo (variação da massa), usar as equações de Lagrange para sistemas dissipativos e analisar o que acontece no centro de massa do sistema.

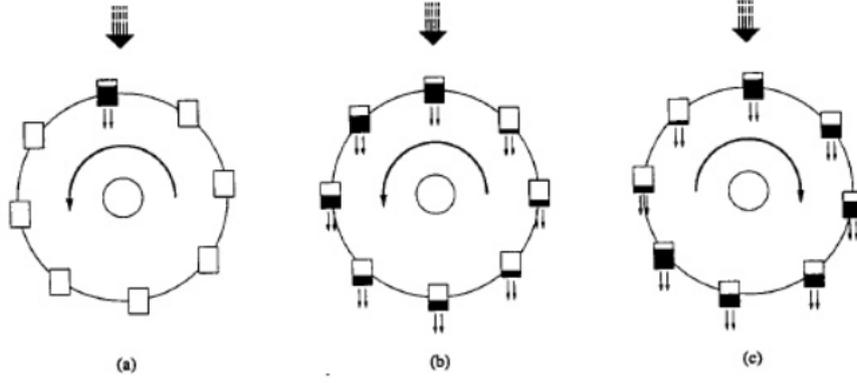


Figura 16: Esquema do movimento da roda d'água caótica de Malkus.

## 2.5 Desenvolvimento Matemático

A roda d'água estudada neste trabalho será discreta, isto é, possuirá um número  $N$  de copos de mesmo tamanho e espaçados igualmente. Assume-se que os copos nunca colidem ou encham até transbordar, e que sempre haverá um copo na saída de água. A posição angular  $\theta$  é calculada a partir do copo 0, tal que o  $i$ -ésimo copo tem posição dada por  $\theta_i = \theta + i\frac{2\pi}{N}$ . Já em coordenadas cartesianas, a posição de um copo será dada por  $\vec{r}_i = [r\sin(\theta_i), r\cos(\theta_i)]$ , onde  $r$  é o raio da roda d'água.

Uma das principais considerações a serem feitas para o desenvolvimento matemático deste modelo é a de que um certo copo não “captura” a água que cai de outro. Assim, a variação de massa de um copo será devido ao *inflow* de água, que acontece apenas num ponto específico do movimento, e ao *outflow*, que ocorrerá ao longo de todo o movimento e será proporcional à massa de água dentro deste copo:

$$\frac{dm_i}{dt} = q_i - km_i, \quad (21)$$

onde  $k$  é a taxa de vazamento e  $q_i$  é o *inflow* de água. Neste caso, o *inflow* deve ser uma função discreta: numa certa região próxima à saída de água ele é igual ao *inflow* total do sistema, denotado por  $\tilde{q}$ , enquanto que nas demais posições é identicamente nulo.

É razoável dizer que um copo “captura” água apenas na região em que  $\theta'_i = \frac{\pi}{2} + \theta_i$  vai de  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N}$  até  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{N}$ , vide Figura (17). Isto corresponde a dizer que a condição para que um copo tenha sua massa acrescida pelo *inflow* total do sistema é  $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{N}) < \sin(\theta'_i)$ . Utilizando a propriedade de que  $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$ , pode-se ainda utilizar como condição que  $\cos(\frac{\pi}{N}) < \cos(\theta_i)$ . Fora desta região, o *inflow* de água deverá ser igual a 0. Assim, é possível escrever que

$$q_i = \begin{cases} \tilde{q} & \text{se } \cos(\frac{\pi}{N}) < \cos(\theta_i), \\ 0 & \text{demais.} \end{cases} \quad (22)$$

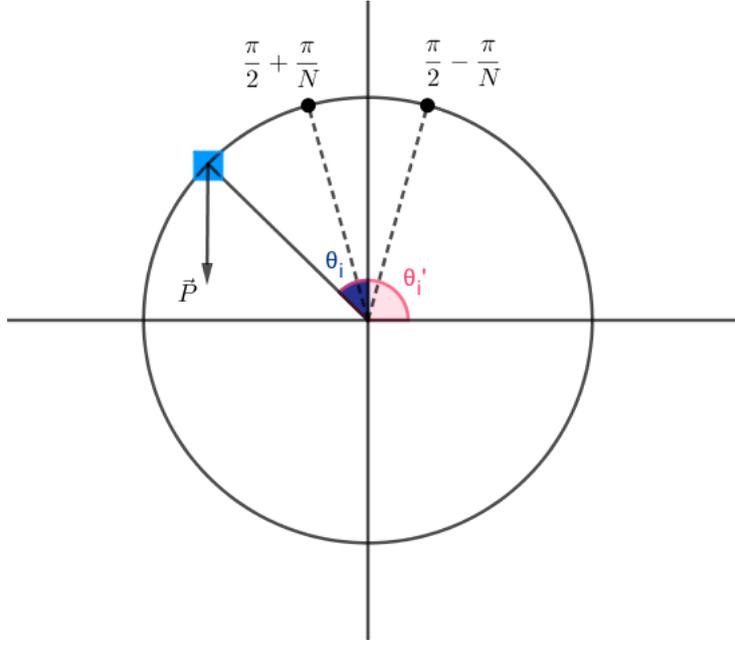


Figura 17: Representação da região em que deve acontecer o *inflow* de água.

A massa total do sistema é dada pela soma das massas de cada um dos copos e, por isso, também dependerá do tempo:

$$M(t) = \sum_{i=0}^{N-1} m_i(t). \quad (23)$$

Somando sobre  $i$  a Equação (21) e substituindo a definição de massa total, uma vez que somatória e derivada são operações comutativas, obtém-se que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{dm_i}{dt} = \sum_{i=0}^{N-1} (q_i - km_i) \rightarrow \frac{dM}{dt} = \tilde{q} - kM, \quad (24)$$

onde considerou-se que os copos recebem água um por vez, tal que apenas um dos  $q_i$ 's será não nulo e igual a  $\tilde{q}$ . Integrando diretamente o resultado, sendo  $\tilde{q}$  e  $k$  constantes, determina-se a expressão para a variação da massa total do sistema em função do tempo:

$$M(t) = \frac{\tilde{q}}{k}(1 - e^{-kt}). \quad (25)$$

Note que quando  $t \rightarrow \infty$ , a massa do sistema tende a ser constante. Ao supor que tempo suficiente se passou para que isso seja verdade, é possível assumir também que o momento de inércia da roda d'água é constante. Isto será importante para balancear de maneira eficaz o torque do sistema.

Além de considerar que muito tempo se passou para que a massa total seja constante, também é necessário supor que a roda vazia é simétrica, que a água deixando um copo não exerce torque e que os copos giram livremente em seus suportes, mas sempre mantendo a "boca" orientada verticalmente para cima.

Como a roda d'água é um sistema dissipativo, seu movimento será descrito corretamente apenas pelas equações de Euler-Lagrange para potenciais que dependem da velocidade:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = - \frac{\partial F}{\partial \omega} \quad (26)$$

onde  $L$  é a Lagrangiana,  $F$  é a função de dissipação de Rayleigh e  $\theta$  é o único grau de liberdade do sistema, tal que  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ . Para determinar a Lagrangiana, é preciso antes saber quais são as energias cinética e potencial da roda d'água. A energia cinética de rotação de cada copo é igual a

$$T_i = \frac{1}{2} I_i (\omega_i)^2, \quad (27)$$

sendo que  $I_i = m_i [r^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{n})^2]$  é o momento de inércia e  $\omega_i$  é a velocidade angular. Como  $\vec{n}$  é a direção do vetor velocidade angular e, no caso da roda d'água, é perpendicular a  $\vec{r}_i$ , o momento de inércia de um copo será dado

por  $I_i = m_i r^2$ . Utilizando agora a própria definição de  $\theta_i$  é fácil ver que  $\omega_i = \omega$ , ou seja, todos os copos possuem mesma velocidade angular. Assim, a energia cinética se reduz a

$$T_i = \frac{1}{2} m_i r^2 (\omega)^2. \quad (28)$$

Já a energia cinética total de rotação do sistema será a soma das energias cinéticas de rotação dos copos mais a energia cinética de rotação da roda vazia:

$$T = \sum_{i=0}^{N-1} T_i + \frac{1}{2} I_0 (\omega)^2 \rightarrow T = \frac{1}{2} I (\omega)^2, \quad (29)$$

onde  $I = I_0 + Mr^2$  é o momento de inércia total. Como assumiu-se que tempo suficiente passou para que a massa total pudesse ser considerada constante, o momento de inércia também será constante e igual a

$$I = I_0 + \frac{\tilde{q}}{k} r^2. \quad (30)$$

Já a energia potencial de cada copo nada mais é que a energia gravitacional devido a ação da força peso – Figura (17). Assim, a energia potencial total da roda d'água será a soma das energias potenciais individuais:

$$U_i = gr m_i \cos(\theta_i) \rightarrow U = \sum_{i=0}^{N-1} U_i = gr \sum_{i=0}^{N-1} m_i \cos(\theta_i). \quad (31)$$

Portanto, a Lagrangiana do sistema para um tempo suficientemente grande (massa e momento de inércia totais constantes) é dada por

$$L = T - U = \frac{1}{2} I (\omega)^2 - gr \sum_{i=0}^{N-1} m_i \cos(\theta_i). \quad (32)$$

A função de dissipação de Rayleigh pode ser interpretada como um potencial que corresponde a forças de fricção, isto é, forças que são proporcionais a velocidades. Esta função é usualmente definida em três dimensões como

$$F = \frac{1}{2} \sum_j [b_{xj} (v_{xj})^2 + b_{yj} (v_{yj})^2 + b_{zj} (v_{zj})^2], \quad (33)$$

onde a soma é sobre as partículas do sistema. Para a roda d'água, a velocidade de um copo é igual a  $\vec{v}_i = r\omega [\cos(\theta_i), -\sin(\theta_i)]$ . Supondo que  $b_{xi} = b_{yi} = b_i$ , a função de Rayleigh neste caso será

$$F = \frac{1}{2} (\omega)^2 r^2 \sum_{i=0}^{N-1} b_i = \frac{1}{2} (\omega)^2 \nu, \quad (34)$$

tal que  $\nu$  pode ser interpretado como uma taxa de amortecimento rotacional. Note que  $\nu$  possui unidades de  $kg \frac{m^2}{s}$ .

Substituindo as Equações (32) e (34) na Equação (26), obtém-se a expressão que rege o movimento da roda d'água caótica de Malkus:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I} \left[ gr \sum_{i=0}^{N-1} m_i \sin(\theta_i) - \nu \omega \right]. \quad (35)$$

Lembre-se que  $m_i$  depende do tempo e, por isso, para ser capaz de descrever completamente o movimento da roda d'água, é preciso considerar também a Equação (21).

## 2.6 Equivalência com as Equações de Lorenz

Para chegar às equações de Lorenz a partir das equações de movimento da roda d'água determinadas na seção anterior, é preciso fazer uma aproximação de centro de massa. Considerando que a massa total do sistema é constante, as coordenadas do centro de massa da roda d'água serão dadas por

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} m_i x_i}{\sum_{i=0}^{N-1} m_i} = \frac{k}{\tilde{q}} \left[ r \sum_{i=0}^{N-1} m_i \sin(\theta_i) \right], \quad (36)$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} m_i y_i}{\sum_{i=0}^{N-1} m_i} = \frac{k}{\tilde{q}} \left[ r \sum_{i=0}^{N-1} m_i \cos(\theta_i) \right]. \quad (37)$$

Substituindo a expressão de  $x_{CM}$  na Equação (35), obtém-se uma nova definição para a taxa de mudança da velocidade angular:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g\tilde{q}}{Ik} x_{CM} - \frac{\nu}{I} \omega. \quad (38)$$

Já para obter equações que descrevem o movimento do centro de massa, é preciso derivar as Equações (36) e (37) em relação ao tempo. Começando por  $x_{CM}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx_{CM}}{dt} &= \frac{k}{\tilde{q}} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \frac{dm_i}{dt} r \sin(\theta_i) + \sum_{i=0}^{N-1} m_i r \omega \cos(\theta_i) \right] \\ &= \frac{k}{\tilde{q}} \left[ r \sum_{i=0}^{N-1} q_i \sin(\theta_i) - kr \sum_{i=0}^{N-1} m_i \sin(\theta_i) + \omega r \sum_{i=0}^{N-1} m_i \cos(\theta_i) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

onde a Equação (21) foi utilizada da primeira para a segunda igualdade. Note que apenas para o intervalo  $-\frac{\pi}{N} < \theta_i < \frac{\pi}{N}$  o *inflow* será não nulo. Assim, sabendo que o seno é uma função ímpar e que o intervalo para  $q_i \neq 0$  é simétrico em relação a 0, a soma sobre  $i$  do termo  $q_i \sin(\theta_i)$  é identicamente nula. Portanto, a variação temporal de  $x_{CM}$  em termos das próprias coordenadas do centro de massa é dada por

$$\frac{dx_{CM}}{dt} = \omega y_{CM} - k x_{CM}. \quad (40)$$

Fazendo o mesmo para  $y_{CM}$ , obtém-se que

$$\begin{aligned} \frac{dy_{CM}}{dt} &= \frac{k}{\tilde{q}} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \frac{dm_i}{dt} r \cos(\theta_i) - \sum_{i=0}^{N-1} m_i r \omega \sin(\theta_i) \right] \\ &= \frac{k}{\tilde{q}} \left[ r \sum_{i=0}^{N-1} q_i \cos(\theta_i) - kr \sum_{i=0}^{N-1} m_i \cos(\theta_i) - \omega r \sum_{i=0}^{N-1} m_i \sin(\theta_i) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Neste caso não é possível eliminar a somatória em  $i$  do termo  $q_i \cos(\theta_i)$ , tal que a variação temporal de  $y_{CM}$  em termos das coordenadas do centro de massa será igual a

$$\frac{dy_{CM}}{dt} = \frac{kr}{\tilde{q}} \sum_{i=0}^{N-1} q_i \cos(\theta_i) - k y_{CM} - \omega x_{CM}. \quad (42)$$

Portanto, o centro de massa da roda d'água tem o movimento descrito pelo sistema de equações diferenciais autônomas formado pelas Equações (38), (40) e (42). Este sistema pode ser reduzido ao sistema de Lorenz através das seguintes substituições de variáveis:

$$\begin{aligned} \omega &= kx, \\ x_{CM} &= \frac{\nu k^2}{g\tilde{q}} y, \\ y_{CM} &= \frac{r}{\tilde{q}} \sum_{i=0}^{N-1} q_i \cos(\theta_i) - \frac{\nu k^2}{g\tilde{q}} z, \\ t &= \frac{\tau}{k}. \end{aligned}$$

Assim, é possível estabelecer as correspondências

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g\tilde{q}}{Ik} x_{CM} - \frac{\nu}{I} \omega \rightarrow \frac{dx}{d\tau} = \sigma(y - x) \quad \text{onde } \sigma = \frac{\nu}{Ik}, \quad (43)$$

$$\frac{dx_{CM}}{dt} = \omega y_{CM} - k x_{CM} \rightarrow \frac{dy}{d\tau} = x(\rho - z) - y \quad \text{onde } \rho = \frac{gr}{\nu k^2} \sum_{i=0}^{N-1} q_i \cos(\theta_i), \quad (44)$$

$$\frac{dy_{CM}}{dt} = \frac{kr}{\tilde{q}} \sum_{i=0}^{N-1} q_i \cos(\theta_i) - ky_{CM} - \omega x_{CM} \rightarrow \frac{dz}{d\tau} = yx - \beta z \quad \text{onde } \beta = 1. \quad (45)$$

A somatória que aparece em  $\rho$  pode ser aproximada, em primeira ordem, pelo *inflow* total de água no sistema,  $\tilde{q}$ . Isto porque apenas um dos copos estará na saída de água, tal que um único  $q_i$  será não nulo. Como foi mostrado anteriormente, a condição para que isso seja verdade é  $\cos(\frac{\pi}{N}) < \cos(\theta_i)$ . Considerando que  $N$  seja suficientemente grande e que, conseqüentemente,  $\theta_i$  seja pequeno o bastante, é possível expandir  $\cos(\theta_i)$  em série de Taylor, retraindo termos apenas em primeira ordem. Assim, o parâmetro  $\rho$  pode ser reescrito como

$$\rho = \frac{gr}{\nu k^2} \tilde{q}. \quad (46)$$

Apesar de constante, este é o único parâmetro que dependerá da variação do *inflow* de água no sistema. A princípio, somente o *inflow* pode ser controlado experimentalmente e, portanto, é o que ditará o aparecimento de caos no sistema. Dessa forma, as equações de Lorenz para a roda d'água terão o comportamento (caótico ou periódico) dependente apenas da variação do valor de  $\rho$ .

## 2.7 Pontos Fixos e Estabilidade

Um sistema de equações diferenciais pode ser representado genericamente pelo campo de velocidades

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}). \quad (47)$$

Se  $\vec{F}(\vec{r}) = 0$ , então a trajetória no espaço de fases é chamada de ponto fixo. Os pontos fixos são caracterizados principalmente pela sua estabilidade. Um ponto fixo é dito estável se as trajetórias convergem para ele, enquanto que o ponto fixo é instável se as trajetórias divergirem dele.

A estabilidade pode ser determinada matematicamente a partir dos auto-valores do Jacobiano do sistema calculado no ponto fixo em questão. Todos os auto-valores negativos correspondem a um ponto fixo estável, porém basta apenas um dos auto-valores ser positivo para que o ponto seja considerado instável.

As equações de Lorenz possuem três pontos fixos que são bem conhecidos:  $(0, 0, 0)$ ,  $(\sqrt{\rho-1}, \sqrt{\rho-1}, \rho-1)$  e  $(-\sqrt{\rho-1}, -\sqrt{\rho-1}, \rho-1)$ . Os dois últimos existem apenas se  $\rho > 1$ . Para estudar a estabilidade destes pontos, é preciso calcular o Jacobiano em cada um deles:

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Note que para ser compatível com o caso da roda d'água caótica de Malkus, assume-se  $\beta = 1$  em todas as situações.

Para o ponto fixo  $(0, 0, 0)$ , os auto-valores do Jacobiano serão dados por

$$\lambda_1 = -1, \quad (49)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ -(\sigma - 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)} \right], \quad (50)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left[ -(\sigma - 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)} \right]. \quad (51)$$

Quando  $\rho > 1$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_3$  serão negativos, enquanto que  $\lambda_2$  será positivo. Assim, a origem sempre será um ponto de sela instável.

Os outros dois pontos fixos,  $(\sqrt{\rho-1}, \sqrt{\rho-1}, \rho-1)$  e  $(-\sqrt{\rho-1}, -\sqrt{\rho-1}, \rho-1)$ , apresentam a mesma equação característica que diagonaliza o Jacobiano e determina os auto-valores:

$$\lambda^3 + \lambda^2(\sigma + 2) + \lambda(\sigma + \rho) + 2\sigma(\rho - 1) = 0. \quad (52)$$

Para estes pontos, é mais fácil estudar sua estabilidade numericamente. Variando os valores de  $\rho$  e  $\sigma$  durante as simulações que serão apresentadas na próxima seção, ambos os pontos mostraram-se estáveis todas as vezes.

## 2.8 Simulações

Para entender como o caos emerge das equações de Lorenz e se manifesta em sistemas físicos como a roda d'água, foram adotadas diversas ferramentas computacionais (séries temporais, espaços de fases, diagramas de bifurcações e mapas de primeiro retorno). Foi necessário integrar numericamente as equações de Lorenz e, para isso, utilizou-se como condições iniciais  $\vec{r}(0) = (0, 1, 0)$  e como parâmetros fixos  $\sigma = 3$  e  $\beta = 1$ . Já  $\rho$  foi considerado o parâmetro de controle, sendo variado num intervalo de 20 até 100.

O diagrama de bifurcações, também conhecido como rota para o caos, evidencia as bifurcações de período que acontecem devido à variação do parâmetro de controle. Ele é feito plotando os pontos de máximo local das séries temporais de uma das variáveis do sistema para cada valor de  $\rho$ . Na Figura (18), é possível observar que a roda d'água já começa num regime caótico e, apenas para maiores valores de  $\rho$ , passa a apresentar um comportamento periódico. Note que existem dois ramos caóticos principais que, como será mostrado a seguir, correspondem aos dois "lóbulos" do atrator estranho – Figuras (19) e (20).

Ao plotar os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , é possível perceber, em alguns casos, a concentração das trajetórias do sistema numa certa região do espaço de fases. Este confinamento das trajetórias é chamado de atrator. Dependendo dos parâmetros utilizados, o atrator pode ser estacionário, periódico, quase-periódico ou caótico. Para exemplificar este fato, a partir do diagrama de bifurcações foram escolhidos dois valores de  $\rho$ : um que correspondia a um atrator caótico – Figura (19) – e outro que correspondia um atrator periódico – Figura (20). Por apresentar uma forma tão característica, dois "lóbulos" que juntos lembram as asas de uma borboleta, o atrator correspondente às equações de Lorenz recebeu o nome de atrator estranho.

Nas Figuras (19) e (20) também estão representados os pontos fixos do sistema de Lorenz. A origem, um quadrado azul, é claramente um ponto de sela: ao mesmo tempo que as trajetórias convergem ao ponto por um lado, divergem por outro. Já os outros dois pontos fixos, os círculos vermelhos, são em ambos os casos estáveis.

O mapa de primeiro retorno é uma forma alternativa de analisar as propriedades de um atrator. Obtém-se este mapa localizando todos os pontos de máximo local da série temporal em questão, neste caso da variável  $x$ , e plotando  $\max(x)_{n+1}$  por  $\max(x)_n$ . Assim, o mapa de primeiro retorno é capaz de determinar, por exemplo, se o atrator é de fato caótico ou periódico e, se for periódico, qual o seu período correspondente. Portanto, das Figuras (21) e (22) é possível confirmar que o atrator cujo  $\rho = 26$  é realmente caótico, uma vez que não há um número bem definido de pontos no mapa. Por este mesmo motivo, conclui-se que o atrator com  $\rho = 71$  é periódico e de período igual a 3 (número de pontos que aparecem no mapa de primeiro retorno).

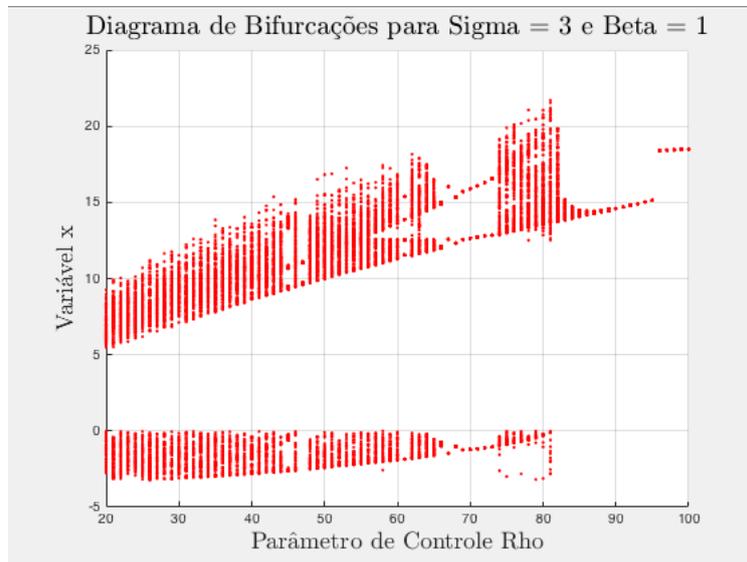


Figura 18: Diagrama de bifurcações ou rota para o caos.

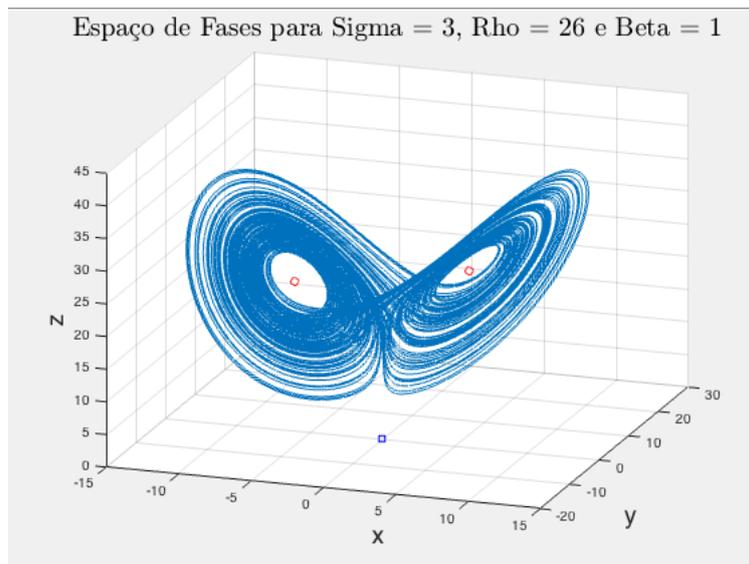


Figura 19: Espaço de fases com o atrator estranho caótico para  $\rho = 26$ .

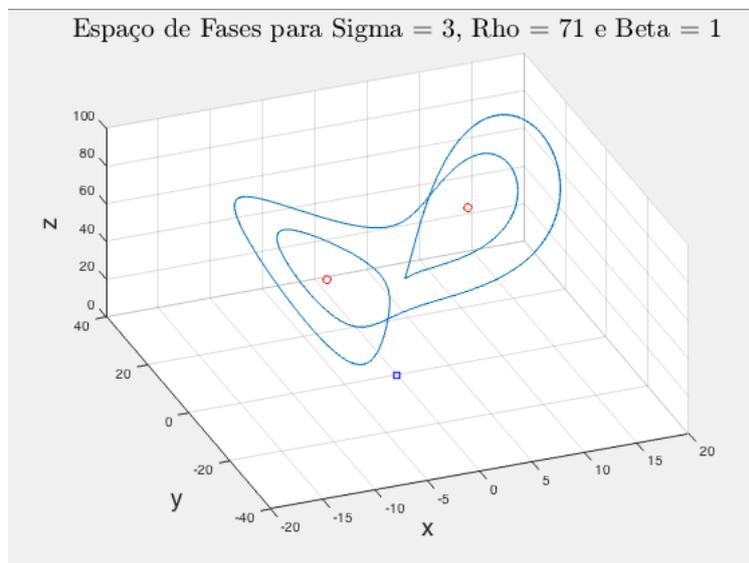


Figura 20: Espaço de fases com o atrator estranho periódico para  $\rho = 71$ .

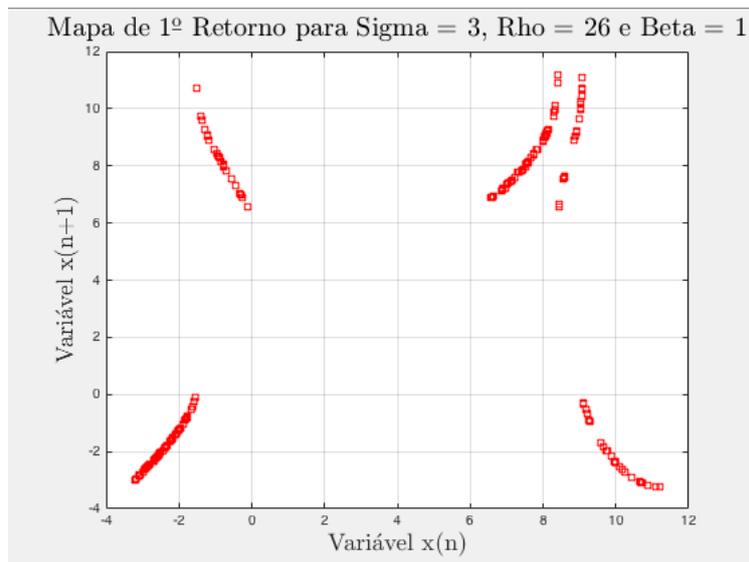


Figura 21: Mapa de primeiro retorno para  $\rho = 26$ .

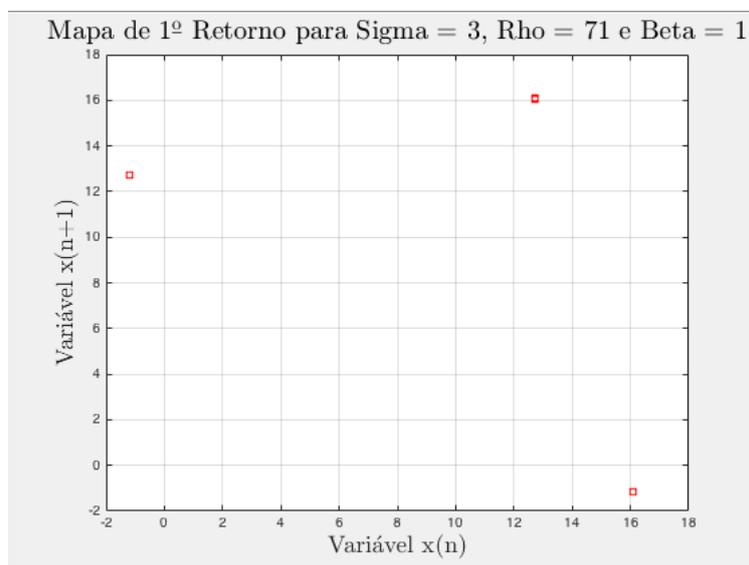


Figura 22: Mapa de primeiro retorno para  $\rho = 71$ .

## Referências

- [1] Oliveira, Hércules A.. (2014). Transição de fase no sistema de Hénon-Heiles. Revista Brasileira de Ensino de Física, 36(4), 01-07. <https://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172014000400014>
- [2] GOLDSTEIN, Herbert. & POOLE, Charles. & SAFKO, John. Classical Mechanics. 3ª edição. Addison-Wesley.
- [3] PODE, Edward. Modelling the Chaotic Waterwheel. 88 páginas. Dissertação. School of Mathematical Sciences/University of Nottingham. 2014/15.
- [4] FORDYCE, Rachel F. Chaotic Waterwheel. 72 páginas. Tese. Division of Mathematics and Natural Sciences/Reed College. 2009