P-1, EAD, Cálculo IV, 26/10/2016 (1)

1) Encontre a expansão em série de potências, ao redor de $x_0=0$, para a função $f(x)=e^{ax}$, onde a é um parâmetro real.

Sol.: Temos que escrever $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ onde os coeficientes são $c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $f^{(n)}(x)$ significa a derivada de ordem n, com $f^{(0)}(x)=f(x)$ (função sem derivar)

- $f^{(0)}(x)=f(x)=e^{ax} \Rightarrow f^{(0)}(0)=e^0=1. \Rightarrow c_0=\frac{f^{(0)}(0)}{0!}$

$$\boxed{c_0=1}$$

- $f^{(1)}(x)=ae^{ax} \Rightarrow f^{(1)}(0)=ae^0=a \Rightarrow c_1=\frac{f^{(1)}(0)}{1!}=\frac{a}{1}$

$$\boxed{c_1=a}$$

- $f^{(2)}(x)=a^2e^{ax} \Rightarrow f^{(2)}(0)=a^2e^0=a^2 \Rightarrow c_2=\frac{f^{(2)}(0)}{2!}=\frac{a^2}{2}$

$$\boxed{c_2=\frac{a^2}{2}}$$

- $f^{(3)}(x)=a^3e^{ax} \Rightarrow f^{(3)}(0)=a^3e^0=a^3 \Rightarrow c_3=\frac{f^{(3)}(0)}{3!}=\frac{a^3}{6}$

$$\boxed{c_3=\frac{a^3}{6}}$$

$\vdots$

- $f^{(n)}(x)=a^ne^{ax} \Rightarrow f^{(n)}(0)=a^ne^0=a^n \Rightarrow c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$\boxed{c_n=\frac{a^n}{n!}}$$

Logo, $\boxed{f(x) = e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{a^n}{n!}\right)}_{c_n} x^n}$

Note que no caso que $a=1$ temos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

e no caso que $a=-1$ temos

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Esses resultados serão usados no problema a seguir.

2) Use uma série de potências, centrada em $x=0$, para resolver detalhadamente a eq. diferencial
$y''(x) = y(x)$.

Sol.: $y''(x) = y(x)$ (I)

Procuramos uma solução na forma $\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}$ (I')

Supondo a série convergente em $|x| < R$, onde o R é o raio de convergência podemos derivar no interior da somatória:

(II) $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$

(III) $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$

Colocando (I') e (III) em (I) temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n\cdot(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ou

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n(n-1)\, x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

- A menor potência de x deve ser a mesma nos dois somatórios. ~~No~~ No primeiro é x^0 e no segundo x^0. OK.
- No primeiro somatório fazemos a mudança de variáveis $k = n-2$, logo $n = k+2$ e se $n=2$ temos que $k=0$.
- No segundo somatório trocamos $n = k$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2} (k+2)(k+1)\, x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

- Agora podemos escrever tudo como um único somatório

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[c_{k+2} (k+2)(k+1) - c_k\right] x^k = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k$$

A igualdade deve ser interpretada como sendo entre séries de potências. A do lado direito com todos os coeficientes nulos.

Logo,

$$c_{k+2} (k+2)(k+1) - c_k = 0 \,, \quad \forall k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

$$c_{k+2} (k+2)(k+1) = c_k$$

$$\boxed{c_{k+2} = \frac{c_k}{(k+2)(k+1)}}$$

Eq. de Recorrência $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$k=0 \Rightarrow C_2 = \frac{C_0}{2\cdot 1} = \frac{C_0}{2!}$$

$$k=1 \Rightarrow C_3 = \frac{C_1}{3\cdot 2} = \frac{C_1}{3!}$$

$$k=2 \Rightarrow C_4 = \frac{C_2}{4\cdot 3} = \frac{C_0}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{C_0}{4!}$$

$$k=3 \Rightarrow C_5 = \frac{C_3}{5\cdot 4} = \frac{C_1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \frac{C_1}{5!}$$

$$k=4 \Rightarrow C_6 = \frac{C_4}{6\cdot 5} = \frac{C_0}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{C_0}{6!}$$

$$k=5 \Rightarrow C_7 = \frac{C_5}{7\cdot 6} = \frac{C_1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{C_1}{7!}$$

Podemos conjeturar que os coeficientes são da forma

- $C_{2n} = \dfrac{C_0}{(2n)!}$ se $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

  subíndice par

- $C_{2n+1} = \dfrac{C_1}{(2n+1)!}$ se $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

  subíndice ímpar

A proposta inicial de solução deve ser dividida em duas séries (uma com termos pares e outra com termos ímpares).

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} x^{2n+1}$$

$$y(x) = C_0 \underbrace{x^0}_{1} + C_1 x^1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n+1} x^{2n+1}$$

$$y(x) = C_0 + C_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_0}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

ou

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0 x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$y(x) = \underbrace{C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{y_1(x)} + \underbrace{C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{y_2(x)}$$

A solução geral de uma eq. diferencial tem a forma

$y_{gh}(x) = A y_1(x) + B y_2(x)$, onde A e $B \in \mathbb{R}$
e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ precisam ser linearmente independentes.

Neste caso encontramos que $A = C_0$ e $B = C_1$ e que

$$\boxed{y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}} \quad \text{e} \quad \boxed{y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

- Mas qual é a relação dessas séries como o resultado do problema 1?

Tinhamos encontrado que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Vamos encontrar as séries de potências das funções

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Temos que $\cosh(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \dots + 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \dots\right]$

$$\cosh(x) = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right]$$

somente sobram os termos de potência par

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

logo $\boxed{y_1(x) = \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$

Análogamente, $\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{2}[e^{x} - e^{-x}]$

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{2}\left[\cancel{1} + x + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \cdots - \left(\cancel{1} - x + \cancel{\frac{x^2}{2!}} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\right]$$

e agora simplificam as potências de índice par, sobram as de índice ímpar

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\left[x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right]$$

$$\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = y_2(x).$$

logo $\boxed{y_2(x) = \operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$

$$y_{gh}(x) = C_0 \cosh(x) + C_1 \operatorname{senh}(x)$$

A mesma eq. dif. era resolvida de um jeito bem mais simples propondo uma solução do tipo exponencial

$$y''(x) = y(x)$$

$$y''(x) - y(x) = 0$$

$y(x) = e^{rx}$ ← proposta de solução

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{troca}\\ y'' \to r^2\\ y' \to r\\ y \to 1\end{array}}$$

$r^2 - 1 = 0$ Eq. Auxiliar ou Caraterística

$$r^2 = 1$$

$$r_1 = -1 \text{ e } r_2 = 1$$

$$y_{gh}(x) = Ae^{-x} + Be^{x}$$

Note que escolhendo $A = \frac{1}{2}$ e $B = \frac{1}{2}$ temos $y_1(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

e se $A = -\frac{1}{2}$ e $B = \frac{1}{2}$ temos $y_2(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x)$

A solução geral também pode ser escrita como

$$y_{gh}(x) = D_1 \cosh(x) + D_2 \operatorname{senh}(x).$$

3) Resolva detalhadamente o problema de valor inicial:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad , \; y(1) = 5 \quad , \; y'(1) = 3$$

Sol.: A eq. dif. é do tipo CAUCHY-EULER de 2da ordem.
Vamos propor que exista uma solução da forma $y = x^r$:

$$y(x) = x^r \quad , \; \cancel{x} > 0$$

$$y'(x) = r x^{r-1}$$

$$y''(x) = r(r-1) x^{r-2}$$

e substituir na eq. dif. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

$$x^2 r(r-1) x^{r-2} - 3x r x^{r-1} + 4x^r = 0$$

$$x^r \left[r(r-1) - 3r + 4 \right] = 0$$

Supondo $x > 0$

$$\boxed{r(r-1) - 3r + 4 = 0}$$ Eq. Auxiliar ou Caraterística

$$\boxed{r^2 - 4r + 4 = 0}$$

$$(r-2)^2 = 0$$

$\boxed{r = 2}$ raiz dupla, tipo II.

Logo, as soluções são da forma

$$y_{gh}(x) = \lambda_1 x^r + \lambda_2 x^r \ln(x)$$ com λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

Isto é,

$$\boxed{y_{gh}(x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^2 \ln(x) \quad \text{com } x > 0}$$

$$\boxed{\lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \in \mathbb{R}}$$

Vamos usar a primeira restrição: $y(1) = 5$.

$$y(1) = 5 = \lambda_1 \cdot 1^2 + \lambda_2 \cdot 1^2 \cancel{\ln(1)}^{0}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 5}$$

Antes de usar a segunda restrição precisamos derivar $y_{gh}(x)$.

$$y'_{gh}(x) = 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x \ln(x) + \lambda_2 \cancel{x^2} \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$y'_{gh}(x) = (2\lambda_1 + \lambda_2)x + 2\lambda_2 x \ln(x)$$

Usando agora a segunda restrição: $y'(1) = 3$

$$y'(1) = 3 = (2\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 1 + 2\lambda_2 \cdot 1 \cdot \cancel{\ln(1)}^{0}$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = 3$$

mas $\lambda_1 = 5$

$$10 + \lambda_2 = 3$$

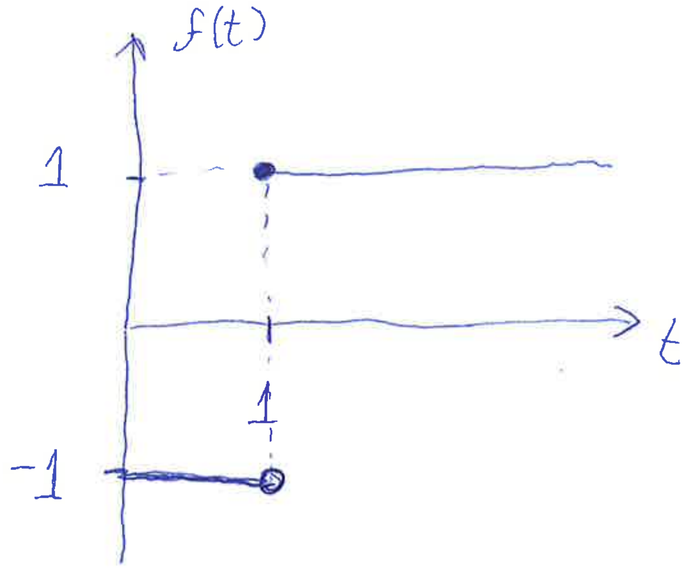
$$\boxed{\lambda_2 = -7}$$

$$\boxed{y_{P.V.I.}(x) = 5x^2 - 7x^2 \ln(x) \quad \text{se } x > 0}$$

Prob. 4: Use a definição para determinar a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

Sol.:



A transformada de Laplace de $f(t)$, denotada como $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, é definida como

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Logo, temos que calcular

$$F(s) = \underbrace{\int_0^1 (-1)\, e^{-st}\, dt}_{(I)} + \underbrace{\int_1^\infty (1)\, e^{-st}\, dt}_{(II)} \qquad (1)$$

$$(I)\quad -\int_0^1 e^{-st}\, dt = (-1)\left(\frac{-1}{s}\right) e^{-st}\Big|_0^1 = \frac{1}{s}\left[e^{-s\cdot 1} - \underbrace{e^{-s\cdot 0}}_{1}\right]$$

$$= \frac{1}{s}\left[e^{-s} - 1\right]$$

$$(II)\quad \int_1^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{A\to\infty}\left[\int_1^A e^{-st}\, dt\right] = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{-1}{s} e^{-st}\Big|_1^A\right]$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{s}\left(e^{-sA} - e^{-s}\right)\right]$$

$$\int_1^\infty e^{-st}dt = \underbrace{\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{se^{sA}}\right)}_{=\ 0} + \underbrace{\lim_{A\to\infty}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right)}_{+\ \frac{1}{s}e^{-s}} \quad \text{se } s>0$$

$$\int_1^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}e^{-s}$$

Voltando em 1

$$F(s) = \frac{1}{s}\left[e^{-s}-1\right] + \frac{1}{s}e^{-s}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{1}{s} = \frac{2e^{-s}-1}{s} \qquad s>0}$$

O problema pedia para usar a definição, mas outra possibilidade é escrever

$f(t) = -1 + 2u(t-1)$ onde

$$u(t-a) = u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0\leq t<1 \\ 1 & \text{se } t\geq 1 \end{cases}$$

Neste caso, precisava provar que

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\mathcal{L}\{1\} + 2\mathcal{L}\{u(t-1)\}$$

$$= -\frac{1}{s} + 2\frac{e^{-s}}{s}$$

Chegando no mesmo resultado. ∎

5) Encontre a transformada de Laplace INVERSA da função 11

$$F(s) = \frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+9}$$

Sol.: Pode ser provado que

(I) $\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$, $s>0$

(II) $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$, $s>0$

Logo $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}$

Aqui foi usado que a tranformada inversa é linear, isto é, $\mathcal{L}^{-1}\{\lambda F(s) + \beta G(s)\} = \lambda \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}}_{\text{multiplicamos e dividimos por 2 para usar (I)}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}}_{\text{Usando (II)}}$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2}\text{sen}(2t) + \cos(3t)}$$

■