MECÂNICA 1

4^a LISTA DE EXERCÍCIOS-2017

1) Mostre que a geodésica na superfície de um cilindro circular reto é um segmento de hélice.

2) Mostre que a geodésica em uma superfície esférica é um grande círculo, isto é, um círculo cujo centro está no centro da esfera.

3) Considere a luz passando de um meio de índice de refração n_1 para outro de índice de refração n_2. Utilize o princípio de Fermat para minimizar o tempo de percurso da luz e deduza a lei da refração (Lei de Snell): n_1 sen $\theta_1 = n_2$ sen θ_2.

4) Seja dado um sistema mecânico com um grau de liberdade cuja Lagrangeana é $L = L(q, \dot{q}, t)$.
a) Para esse sistema, enuncie de forma clara o princípio da mínima ação.
b) Mostre que, admitindo-se a validade das equações de Lagrange, concluímos que o princípio da mínima ação também é válido.

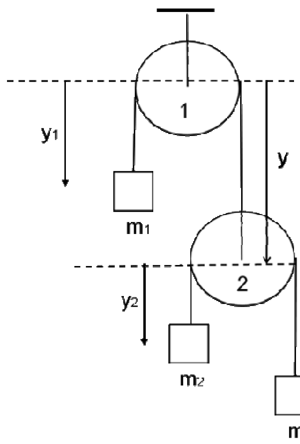
5) Utilize o formalismo Lagrangeano para obter as equações do movimento, para analisar a existência e a natureza dos vínculos e das grandezas que se conservam, para as seguintes situações:
a) Partícula livre em coordenadas cartesianas e em coordenadas esféricas.
b) Partícula de massa m em campo gravitacional.
c) Oscilador harmônico unidimensional
d) Pêndulo simples.

6) Um pendulo consiste de uma massa m suspensa do seu ponto de apoio por uma mola de comprimento desprezível e constante k. Escreva as equações de Lagrange desse movimento.

7) Um sistema "pêndulo-mola" composto por uma massa m amarrada num dos extremos de uma mola de massa desprezível e constante k possui o outro extremo fixo a um suporte. Quando a mola está suspensa livremente, seu comprimento é l. Assuma que o movimento ocorre no plano vertical.
a)Escreva as equações de Lagrange desse movimento. Use coordenadas θ e $\rho = (r - r_0)$ onde r_0 é o comprimento em repouso do pêndulo.
b) Resolva as equações do movimento para aproximações de pequenos ângulos e pequenos deslocamentos em relação à posição de equilíbrio. Considere condições iniciais $\theta = 0,\ \dot{\rho} = 0,\ \rho = A$ e $\dot{\theta} = gB/r_0$ com A e B constantes.

8) Duas massas, m_1 e m_2 estão conectadas por uma corda ideal de comprimento l que passa através de um buraco que existe numa mesa horizontal. A massa m_1 se move sem atrito sobre a mesa e a massa m_2 se desloca numa linha vertical.
a) Qual é a velocidade inicial que m_1 deve ter para que m_2 permaneça parada a uma distância d abaixo da superfície da mesa.
b) Se m_2 for ligeiramente deslocada da posição vertical, ela efetuará pequenas oscilações. Utilize as equações de Lagrange para determinar o período de pequenas oscilações.

9) Um pêndulo simples de comprimento ℓ e massa m está ligado a um suporte que se move lateralmente com aceleração constante a.
a) Escreva a Lagrangeana e obtenha as equações do movimento.
b) Determine o período de pequenas oscilações.
10) Um pêndulo simples de comprimento ℓ e massa m está ligado a um suporte que se move verticalmente para cima com aceleração constante a.
a) Escreva a Lagrangeana e obtenha as equações do movimento.
b) Determine o período de pequenas oscilações.
11) Uma partícula de massa m se movimenta no interior de uma parábola plana $z = \frac{x^2}{\ell}$ onde ℓ é um comprimento constante. Sobre essa partícula atua somente a força gravitacional.
a) Escreva a Lagrangiana do sistema em termos de coordenadas convenientes. Justifique a sua escolha.
b) Escreva a equação do movimento dessa partícula.
c) Determine o ponto de equilíbrio da partícula e resolva a equação do movimento para o caso em que ela efetua pequenas oscilações em torno desse ponto de equilíbrio.
12) Considere o sistema formado por duas polias de massas e dimensões desprezíveis e corpos de massas m_1, m_2 e m_3 pendurados por cordas ideais de comprimentos l_1 na polia 1 e l_2 na polia 2 como mostra a figura.



a) Usando o sistema de coordenadas indicado na figura, escreva a Lagrangeana e as equações de vinculo para este sistema.

b) Resolva as equações para as coordenadas y_1 e y_2 considerando as seguintes condições iniciais: $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$;

c) A partir do método dos multiplicadores de Lagrange determine as tensões nas duas cordas.
13) Considere uma partícula de massa m que se move sob a ação de um potencial V(x, y, z).
a) Escreva a Lagrangiana do movimento dessa partícula em um sistema de coordenadas que gira com velocidade angular ω constante em torno do eixo z.
b) Obtenha as equações de Lagrange determine as equações diferenciais envolvendo as coordenadas.
c) Identifique as forças de Coriolis e Centrífuga.
14) Um pêndulo de comprimento l e massa m tem a sua extremidade presa a um ponto O que descreve movimento circular uniforme no plano vertical de raio R como mostra a figura.
a) Escreva a Lagrangiana associada ao movimento da partícula. Justifique o sistema de coordenadas escolhido.
b) Obtenha as equações do movimento.
c) Existem grandezas que são conservadas? Justifique sua resposta.