Lista de Exercícios 3 – Circuitos RLC

Atenção: ω é freqüência angular, com unidades de s^{-1}, enquanto a freqüência f representa o número de oscilações por unidade de tempo; $f = 1/T$ ou $f = \omega/2\pi$. A unidade de f é s^{-1} = Hertz.

1. Considere um circuito RLC, com amortecimento fraco e com oscilações livres. A carga inicial do capacitor é q_0 e este se descarrega através do circuito, com $i_0=0$. A energia armazenada no circuito é dada por $E(t)=U_L(t) + U_C(t)$.

a) Escreva a equação diferencial para a q(t), onde q(t) representa a carga no capacitor.

b) Verifique que a função $q(t)=A\exp(-\gamma t/2)\cos(\omega t+\varphi)$. Discuta a condição para que essa solução seja válida e o significado dos parâmetros ω, γ, φ, e A na equação. Explique fisicamente o significado dessa solução.

c) Obtenha uma expressão para E(t).

d) Calcule o valor médio da energia armazenada no circuito em um período.

(Use o fato de que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\,dx=\frac{1}{2}$)

e) Partindo da expressão obtida no item c, verifique que a variação da energia armazenada no circuito por unidade de tempo é igual à potência dissipada por efeito Joule no resistor.

f) Determine o valor médio da potência dissipada pelo resistor em um período.

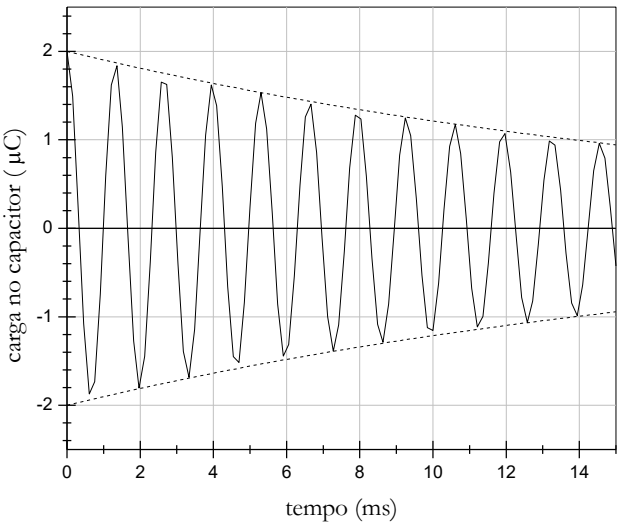
2. Um capacitor é carregado por uma bateria que fornece 100V e em seguida ele é descarregado através de um indutor de indutância igual a 1H. A figura ao lado representa a carga no capacitor q(t) enquanto o capacitor é descarregado.

a) Qual é o tipo de amortecimento para esse circuito?

b) Determine o valor da freqüência de oscilação ω.

c) Qual é o valor do fator de amortecimento γ?

d) A partir dessas informações determine a capacitância (C) e a resistência interna do indutor (R).



3. Um circuito RLC é formado por uma resistência $R=60\Omega$, capacitância igual a 400 μF e indutor igual 1H. Suponha que no instante t=0 a carga inicial do capacitor é igual a 4 μC, e a corrente é igual a 24mA.

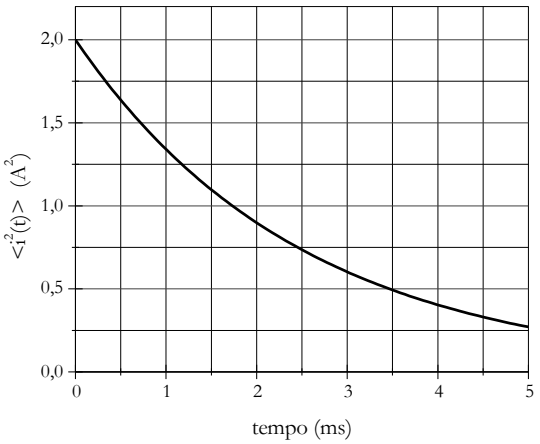
a) Calcule o fator de amortecimento γ, a freqüência de oscilação natural do circuito ω_0 e diga qual é o tipo de amortecimento desse circuito.

b) Obtenha uma expressão para a carga q(t) compatível com as condições inicias acima e indique claramente o valor numérico das grandezas físicas que aparecem na equação.

c) Obtenha o valor de R para que o amortecimento seja crítico.

d) Para esse valor de R, repito o item b.

4. Um capacitor de capacitância C=8μF é carregado e em seguida é desconectado da bateria. O capacitor é então descarregado através de um indutor de indutância igual 500mH cuja resistência não é conhecida. Utilizando-se um amperímetro, mede-se a corrente quadrática média no circuito em função do tempo, após vários ciclos. Os valores obtidos são usados para construir o gráfico de $\langle i^2(t)\rangle$, apresentado ao lado.



a) Obtenha uma expressão para a corrente quadrática média $\langle i^2(t)\rangle$ em um período para um circuito RLC, com amortecimento fraco.
b) Explique como a partir desse gráfico você pode obter o valor da resistência do indutor e apresente o resultado obtido.
c) Calcule a freqüência de oscilação do circuito e compare com a freqüência natural.

5. Mostre que a expressão da impedância do circuito RLC em série, dada por $Z^2 = (\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2$, pode ser reescrita em termos das impedâncias do capacitor e do indutor; $X_C=1/(\omega C)$ e $X_L=\omega L$, respectivamente como $Z^2=(X_C-X_L)^2+R^2$.

6. A carga de um capacitor em um circuito RLC, alimentado por um gerador de corrente alternada de frequência angular ω, oscila com uma amplitude dada por $A(\omega)=Q_0/Z(\omega)$. A freqüência de ressonância (f_{ress}) é aquela para a qual a amplitude da oscilação atinge seu valor máximo.

a) A partir da expressão de A(ω), determine $f_{ress}=\omega_{ress}/2\pi$.
b) Qual é o valor de $A(\omega=\omega_{ress})$.
c) Calcule os valores de $A_0=A(\omega=0)$ e $A_\infty=A(\omega\rightarrow\infty)$. Represente esquematicamente em um gráfico o comportamento de $A(\omega)/A_0$.

7. Considere um circuito RLC com os seguintes valores; $C=10^{-12}$ F, L=1H e R=100Ω. Suponha que esse circuito é ligado a um gerador de corrente alternada senoidal que fornece um tensão com amplitude de 20 V e frequência igual a $(5\times10^5/\pi)$ Hz. Responda as perguntas abaixo, considerando a oscilação do circuito no regime estacionário.

a) Obtenha a expressão para a corrente no circuito i(t) e indique os valores numéricos das grandezas físicas que aparecem na equação.
b) Qual é a freqüência de ressonância para esse circuito?
c) Determine a impedância do circuito, e a amplitude da tensão em cada elemento do circuito.
d) Qual é a diferença de fase entre a tensão no capacitor e no indutor?