

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

FÍSICA MODERNA I

AULA 04

Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 220
rizzutto@if.usp.br

2o. Semestre de 2017

Página do curso:

<https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=53869>

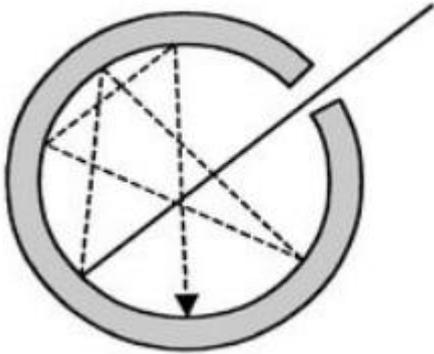
14/08/2017

Radiação de corpo negro



Caso + simples

Corpo Negro



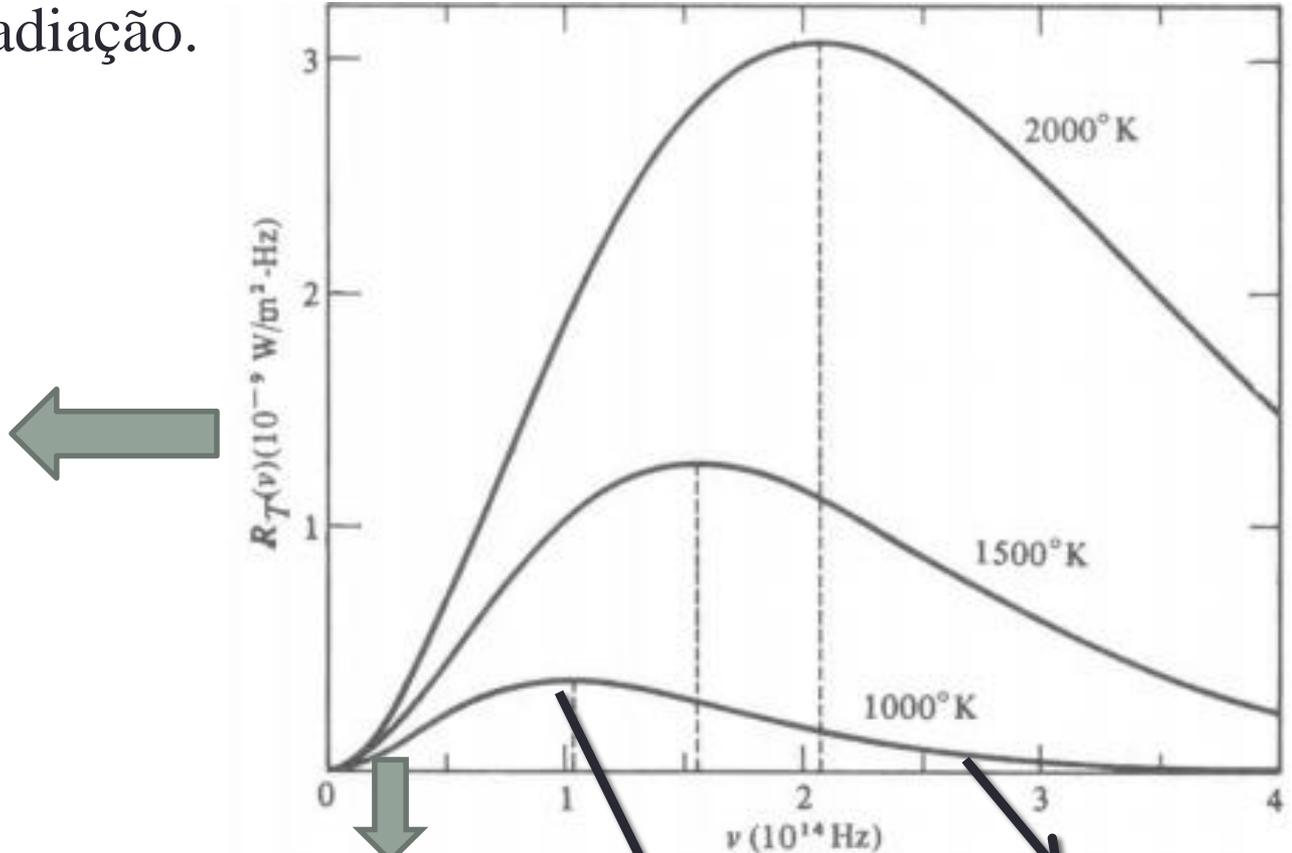
Corpo ideal que absorve toda a radiação e não reflete nada, a radiação vinda do exterior entre na cavidade e é refletida várias vezes na parede até ser absorvida totalmente.

Verifica-se que todos os corpos negros à mesma temperatura emitem radiação térmica com o mesmo espectro

Radiação de corpo negro

- A Radiância espectral: $R_T(\nu)$ de um corpo em função da frequência da radiação.

A frequência em que a radiância é máxima varia linearmente com a temperatura. Potência total emitida por metro quadrado (área sob a curva) aumenta rapidamente com a temperatura



Potência irradiada é nula

Potência irradiada é máxima em

$$\nu = 1,1 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Potência irradiada cai

Radiação de corpo negro

- A Radiância espectral $R_T(\nu)$: função de distribuição da potência irradiada por unidade de área, em um intervalo de frequência, em função de ν e T .

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu$$

Energia total emitida por unidade de área

O crescimento rápido de R_T com a temperatura é chamada de Lei de Stefan anunciada em 1879

$$R_T = \sigma T^4 \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \text{ (constante de Stefan-Boltzman) medida experimen.}$$

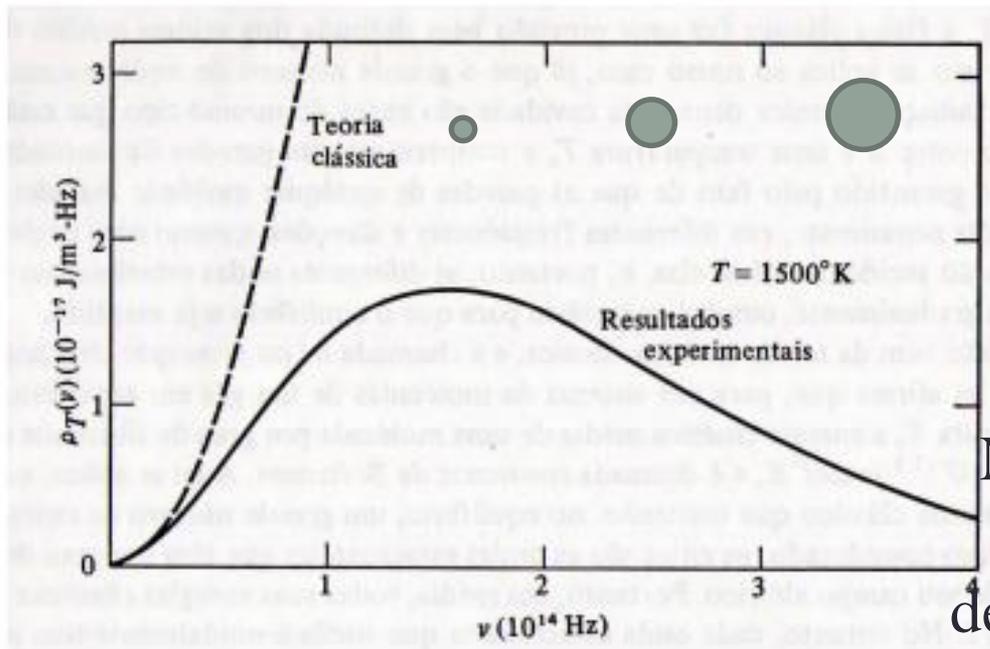
O espectro se desloca para valores maiores de frequências à medida que T aumenta

Como $\longrightarrow T\lambda_{\max} = c^*$

Resultado-Lei de deslocamento de Wien (1893) $\nu_{\max} \approx T$

c^* é a constante de Wien = $2,898 \times 10^{-3} \text{ mK}$
Quando a temperatura aumenta $\longrightarrow \lambda_{\max}$ diminui

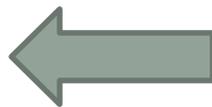
Dúvidas sobre o espectro de $R_T(\lambda)$:



Classicamente conseguimos explicar pequenos valores de ν

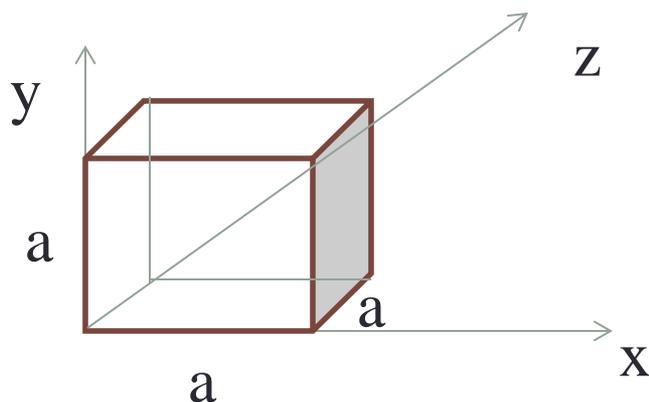
No início do século Ralyleigh-Jeans fizeram cálculo da densidade de energia da radiação da cavidade (ou do corpo negro) mas mostrou uma série de divergência entre a física clássica e os resultados experimentais

Calculo da densidade de energia usando ondas estacionárias
 $\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu)$

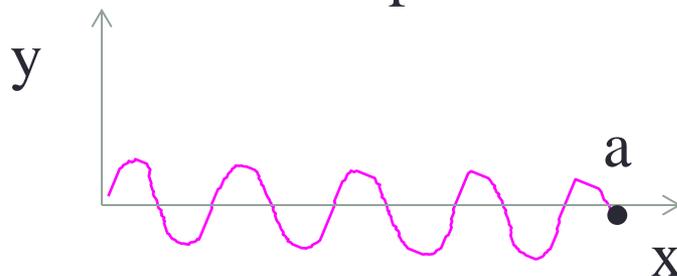


Suposições clássicas:

1) Cavityde com paredes metálicas contendo radiação eletromagnética (cubo com aresta a)



2) Radiação é refletida sucessivamente nas paredes e decomposta em três componentes



3) Como as paredes opostas são perpendiculares, as três componentes da radiação não se misturam e podemos tratá-las separadamente

4) Onda estacionária dentro da cavidade:

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \operatorname{sen}(2\pi \nu t)$$

Como um oscilador harmônico

Nas paredes temos os nós com amplitude zero

$$\boxed{x=0} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi \cdot 0}{\lambda}\right) = 0 \quad \boxed{x=a} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) = 0$$

Isto só é possível quando $\left(\frac{2\pi a}{\lambda_x}\right) = n\pi \rightarrow \lambda_x = \frac{2a}{n_x}$

ou $\nu \lambda = c$

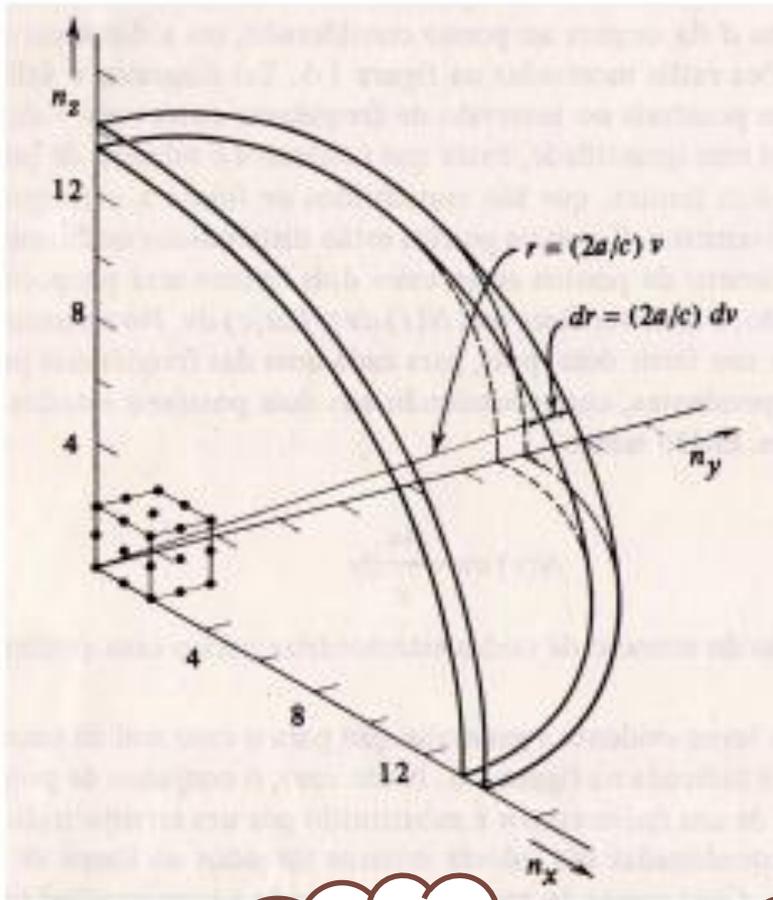
$$n_x = \frac{2a}{\lambda_x} \quad \text{ou} \quad n_x = \frac{2a\nu_x}{c} \quad \nu_x = \frac{n_x c}{2a}$$

5) O que queremos é o número de frequências possíveis entre ν e $\nu + d\nu$

$$N(\nu) d\nu$$

6) O número de onda dentro da cavidade

Caso tridimensional



2 ondas possíveis para cada frequência

$$r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2a}{c} \nu$$

$$dr = \frac{2a}{c} d\nu$$

A representação do cubo no espaço \mathbf{n} pode ser dado como 1/8 da área de uma esfera

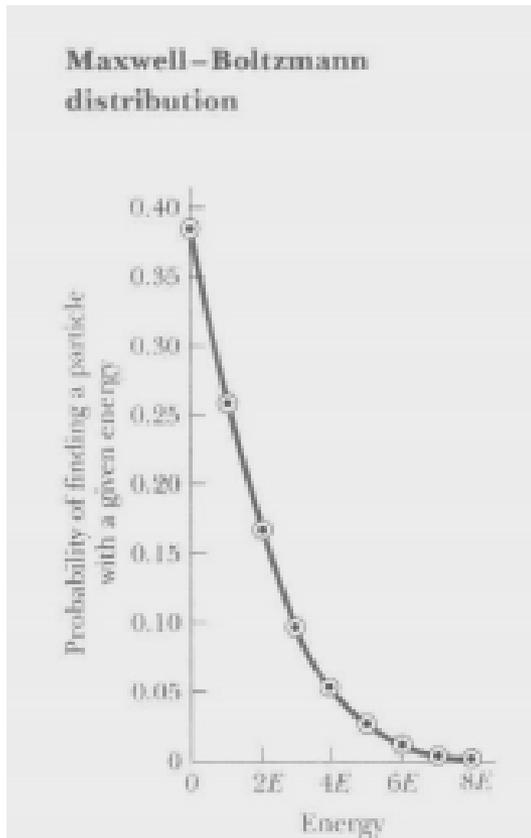
$$N(r)dr = \frac{1}{8} 4\pi r^2 dr$$

$$N(\nu)d\nu = (2) \frac{\pi}{2} \left(\frac{2a}{c} \right)^3 \nu^2 d\nu$$

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot V \cdot \nu^2 d\nu$$

Queremos agora calcular o valor da energia média emitida no espectro correspondente a este intervalo de frequência

Para calcularmos o valor médio da energia precisamos saber a distribuição de energia → vamos usar uma abordagem estatística
MAXWELL-BOLTZMANN



$$n(\varepsilon) = A e^{-\varepsilon/E_0}$$

O valor médio

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\infty} A \varepsilon e^{-\varepsilon/E_0} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} A e^{-\varepsilon/E_0} d\varepsilon} \quad \frac{1}{E_0} = \alpha$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon e^{-\varepsilon\alpha} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\alpha} d\varepsilon}$$

Lembrando que :

$$-\frac{d}{d\alpha} \ln \int e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon = \frac{-\int \frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon}{\int e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon} = \frac{\int \varepsilon e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon}{\int e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon}$$

como

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\infty} A\varepsilon e^{-\varepsilon/E_0} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} A e^{-\varepsilon/E_0} d\varepsilon}$$

Então posso escrever:

$$-\frac{d}{d\alpha} \ln \int e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon = \bar{\varepsilon}$$

$$-\frac{d}{d\alpha} \ln \left[\frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha\varepsilon} \Big|_0^{\infty} \right] = -\frac{d}{d\alpha} \ln \left[\frac{1}{\alpha} \right] =$$

$$-\alpha \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} \right) = -\alpha \left(\frac{-1}{\alpha^2} \right) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{\alpha} = E_0$$

O teorema de equipartição de energia diz que cada grau de liberdade tem $1/2kT$ para o oscilador harmônico ($k=1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ constante de Boltzmann). Então para a energia cinética + potencial temos $\bar{\epsilon} = kT$

A densidade de energia por unidade de volume entre ν e $\nu+d\nu$ $\rho_T(\nu)d\nu = \frac{N(\nu)d\nu\bar{\epsilon}}{\text{vol}}$
 Energia média por onda vezes o nº de ondas dividido pelo volume da cavidade $\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi a^3}{c^3} \nu^2 d\nu \frac{kT}{a^3}$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT d\nu$$

Esta a fórmula de Rayleigh-Jeans para a radiação de corpo negro

Ainda podemos escrever:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\lambda \nu = c$$

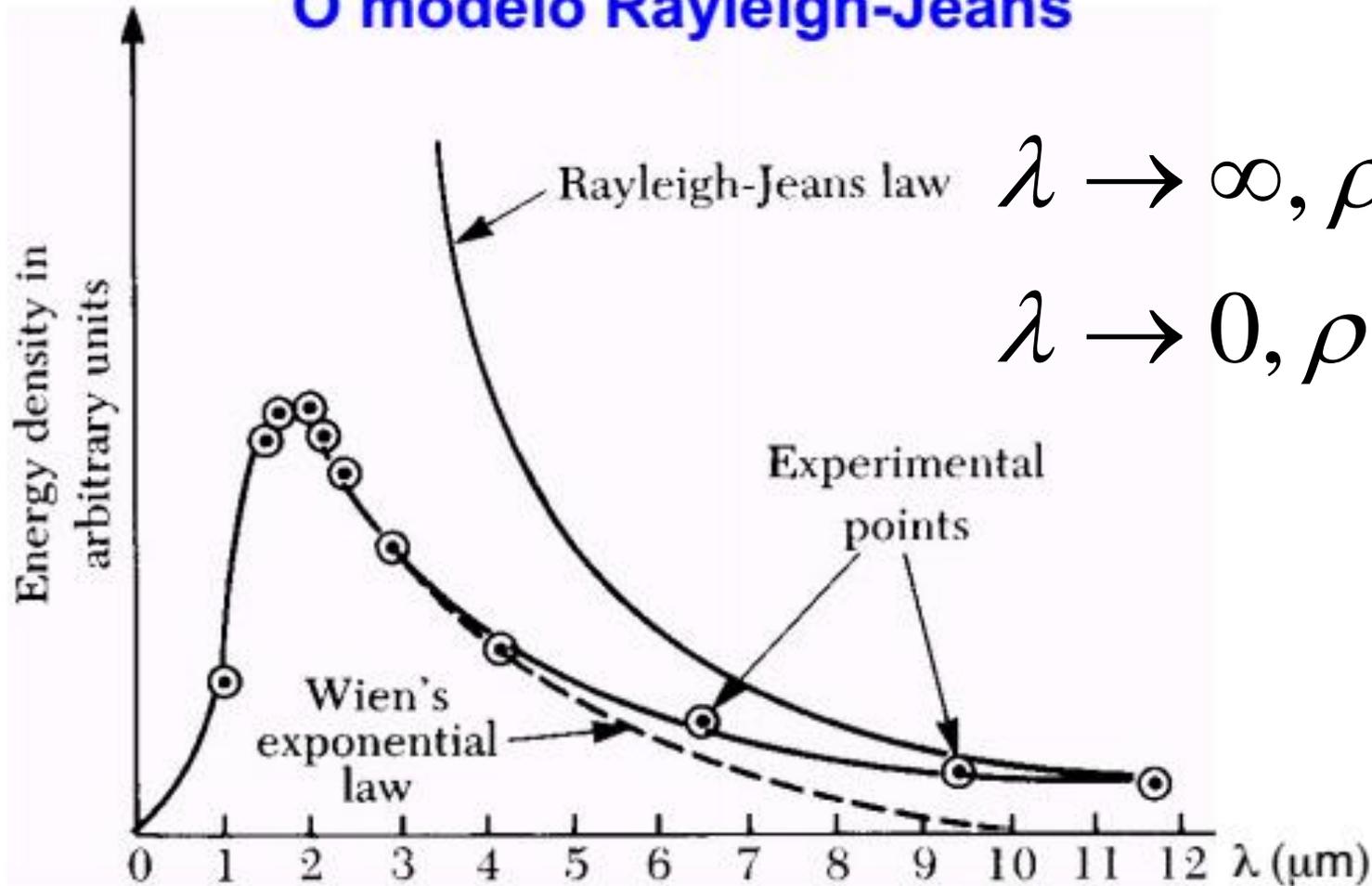
$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = -\frac{8\pi kT}{c^3} \frac{c^2}{\lambda^2} \left[-\frac{c}{\lambda^2} \right] d\lambda$$

$$\frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{d\rho(\nu)}{d\nu}$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT \cdot d\lambda$$

O modelo Rayleigh-Jeans



$$\lambda \rightarrow \infty, \rho(\lambda) \rightarrow 0$$

$$\lambda \rightarrow 0, \rho(\lambda) \rightarrow \infty$$

catástrofe do ultravioleta

Teoria de Planck da radiação da cavidade

- Discrepância entre teoria e dados experimentais, como solucionar???
- Baixas frequências o modelo é satisfatório



$$\bar{\varepsilon}_{\nu \rightarrow 0} \rightarrow kT$$

Energia total media tende a kT para baixas frequências ou altos comprimentos de onda

- Porém para altas frequências ou pequenos comprimentos de onda o modelo falha, gostaríamos de ter

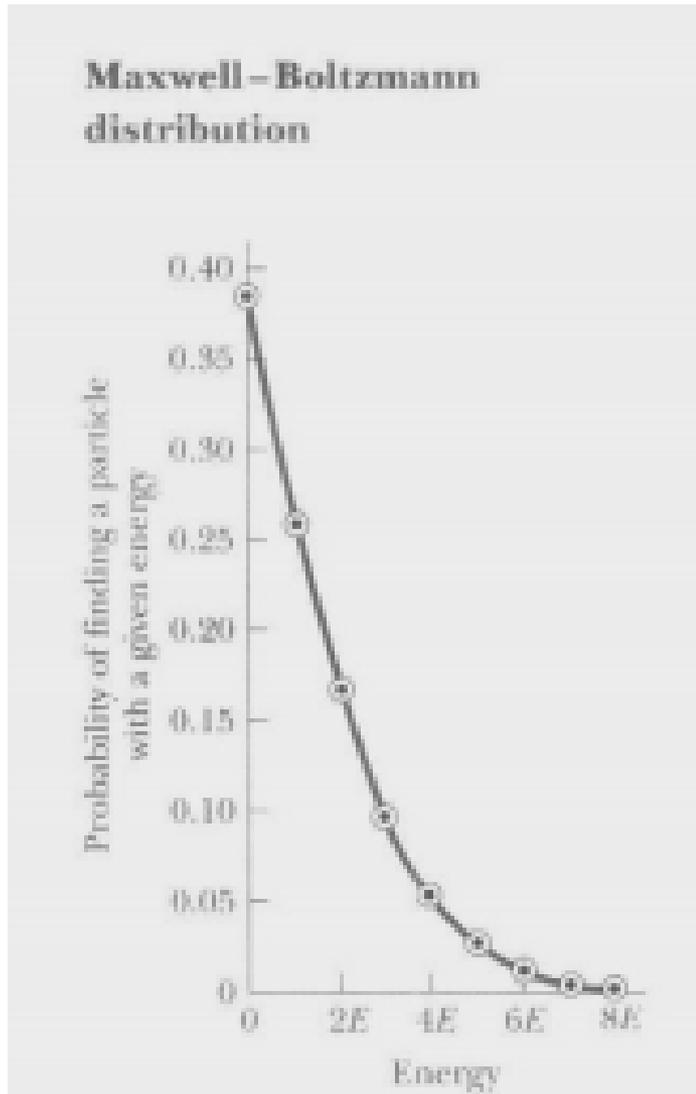
$$\bar{\varepsilon}_{\nu \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

• Nova proposta: tratar a energia como uma variável discreta e não mais contínua (sempre considerado na física clássica). A parede aquecida do corpo negro (cavidade), possui ressoadores vibrando com várias frequências diferentes cada um emitindo luz com mesma frequência que a frequência de vibração

$$\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_1 = \Delta\varepsilon, \varepsilon_2 = 2.\Delta\varepsilon, \dots$$

Teoria de Planck da radiação da cavidade

- Na abordagem da estatística clássica de Maxwell Boltzmann



$$P(\varepsilon)d\varepsilon = Ae^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$$

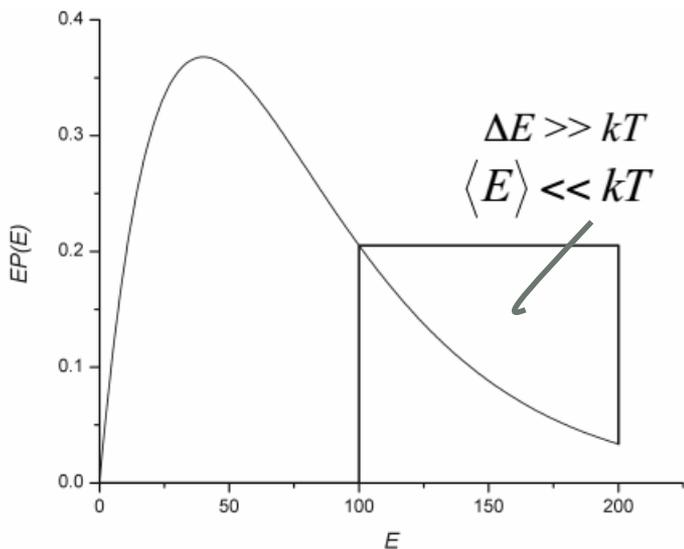
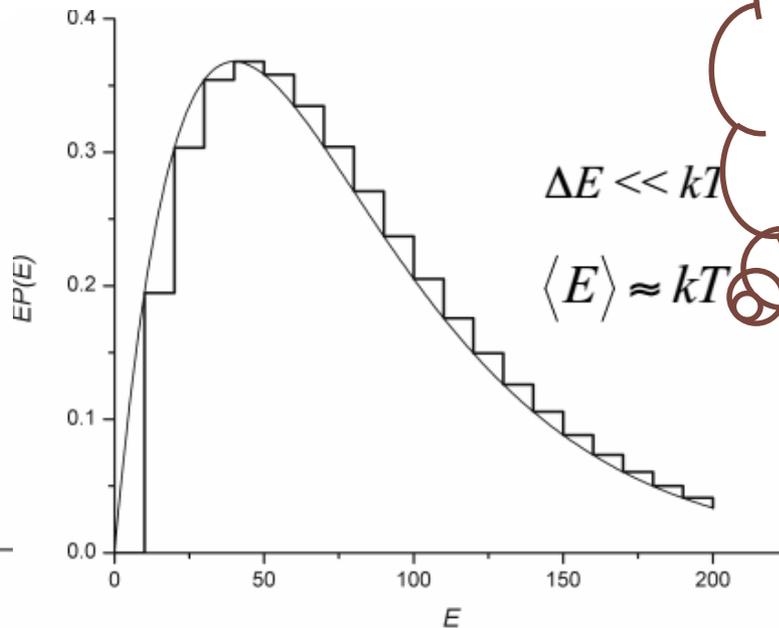
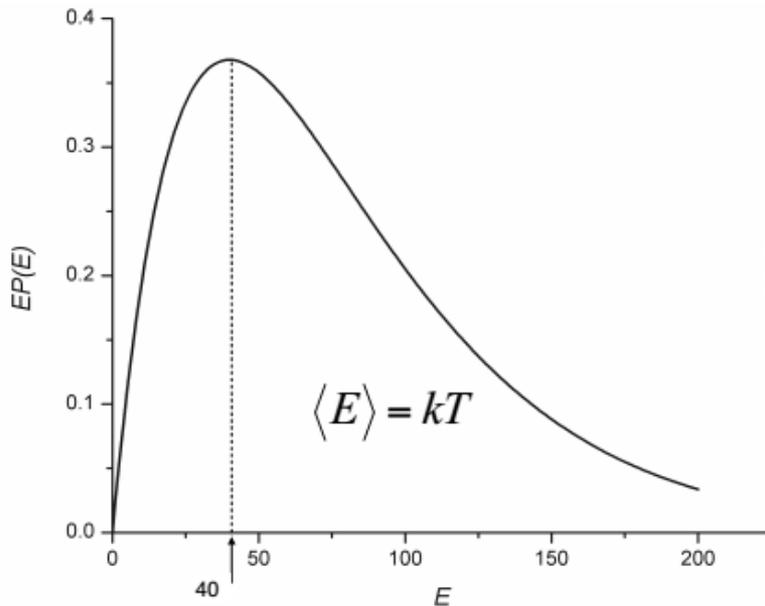
Probabilidade de encontrar um dado com energia entre ε e $\varepsilon+d\varepsilon$

- O valor máximo desta função é $1/kT$ para $\varepsilon=0$
- $P(\varepsilon)d\varepsilon$ decresce suavemente se aproximando do zero quando

$$\varepsilon \rightarrow \infty$$

Teoria de Planck – Energia discreta

Valor de energia media quase igual ao clássico
 Não faz diferença se é discreto ou contínuo



Resumindo:
 $E \sim kT$ quando a diferença de energia sucessiva for pequena
 $E \sim 0$ quando a diferença de energia sucessiva ΔE for grande

Há uma proporcionalidade de entre $\Delta E \sim \nu$

Teoria de Planck: matematicamente

$$\int \bar{\varepsilon} \rightarrow \sum \bar{\varepsilon}$$

- Considerando que temos n_i osciladores com ε_i e tomando as energias discretas ε_i em intervalos regulares: $\varepsilon_0=0$, $\varepsilon_1=\Delta\varepsilon$, $\varepsilon_2=2\Delta\varepsilon$

$$n_i(\varepsilon) = n_0 e^{-\varepsilon_i/kT}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum A \varepsilon_i e^{-\varepsilon_i/E_0}}{\sum A e^{-\varepsilon_i/E_0}} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} n_i \varepsilon_i}{\sum_{i=0}^{\infty} n_i} = \frac{n_0 \varepsilon_0 + n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots}{N}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_0 0 + n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots}{N}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{0 + n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT} \Delta\varepsilon + n_0 e^{-2\Delta\varepsilon/kT} 2\Delta\varepsilon + \dots}{N}$$

Teoria de Planck: matematicamente

$$\bar{\varepsilon} = \frac{0 + n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT} \Delta\varepsilon + n_0 e^{-2\Delta\varepsilon/kT} 2\Delta\varepsilon + \dots}{N}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT} \Delta\varepsilon (1 + 2e^{-\Delta\varepsilon/kT} + 3e^{-2\Delta\varepsilon/kT} + \dots)}{N}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT} \Delta\varepsilon}{N} \frac{1}{(1 - e^{-\Delta\varepsilon/kT})^2}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

$$soma = \frac{1}{(1-x)^2}$$

O que é????

$$N = \sum n_i = n_0 + n_1 + n_2 + \dots$$

$$N = n_0 + n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT} + n_0 e^{-2\Delta\varepsilon/kT} + \dots$$

$$N = n_0 (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{n_0}{(1-x)}$$

Teoria de Planck: matematicamente

$$\bar{\varepsilon} = \frac{n_0 e^{-\Delta\varepsilon/kT} \Delta\varepsilon}{N} \frac{1}{(1 - e^{-\Delta\varepsilon/kT})^2}$$

$$N = n_0 (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{n_0}{(1 - x)}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\cancel{n_0} e^{-\Delta\varepsilon/kT} \Delta\varepsilon (1 - \cancel{e^{-\Delta\varepsilon/kT}})}{1 \cancel{n_0}} \frac{1}{(1 - e^{-\Delta\varepsilon/kT})^2}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{e^{-\Delta\varepsilon/kT} \Delta\varepsilon}{(1 - e^{-\Delta\varepsilon/kT})} = \frac{\Delta\varepsilon}{e^{\Delta\varepsilon/kT} - 1}$$

$$e^{\Delta\varepsilon/kT} \xrightarrow{\Delta\varepsilon/kT \rightarrow 0} 1 + \frac{\Delta\varepsilon}{kT}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\varepsilon}{e^{\Delta\varepsilon/kT} - 1} = \frac{\Delta\varepsilon}{1 + \frac{\Delta\varepsilon}{kT} - 1} = kT$$

$$e^{\Delta\varepsilon/kT} \xrightarrow{\Delta\varepsilon/kT \rightarrow \infty} \infty$$

$$\bar{\varepsilon} = 0$$

~ kT para ΔE pequeno (ν → 0)

~ 0 para ΔE grande (ν → ∞)

Teoria de Planck: matematicamente

A densidade de energia na cavidade, em função da frequência ou do comprimento de onda é dada por:

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT \cdot d\lambda$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \bar{\varepsilon} \cdot d\lambda$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{\lambda \Delta \varepsilon}{e^{\Delta \varepsilon / kT} - 1} \cdot d\lambda$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \cdot d\lambda$$

Escrevendo $\Delta \varepsilon = h\nu$ e $\lambda \nu = c$

c é a velocidade da luz

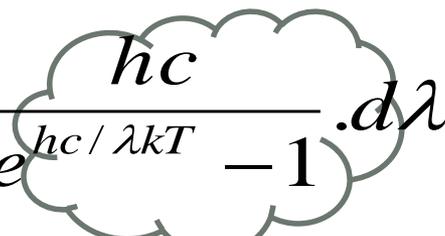
h = constante de Planck

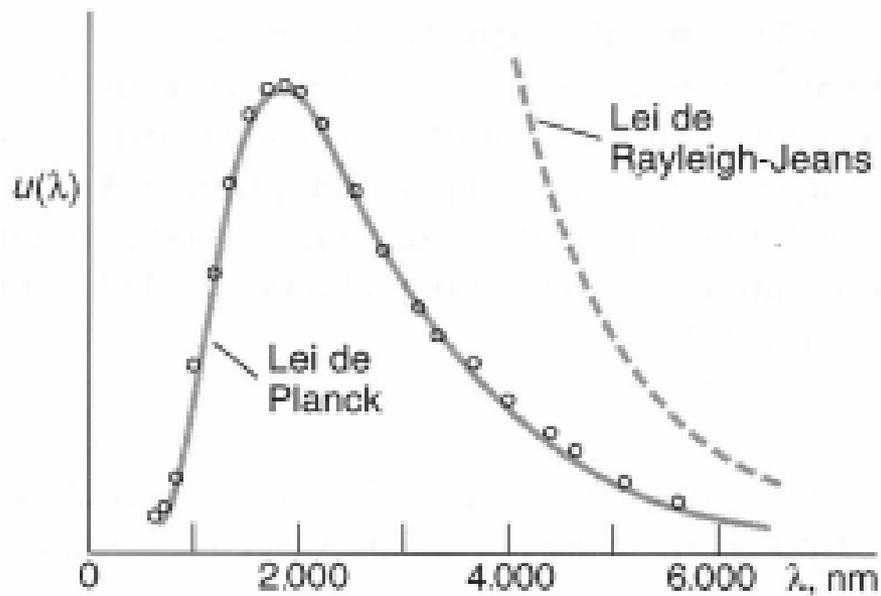
$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ou $4,14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi \nu^5}{c^5} \frac{ch\nu}{\nu e^{h\nu/kT} - 1} \cdot \frac{c}{\nu^2} d\nu$$

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \cdot d\nu$$

Deve ser a função que Wien procurava

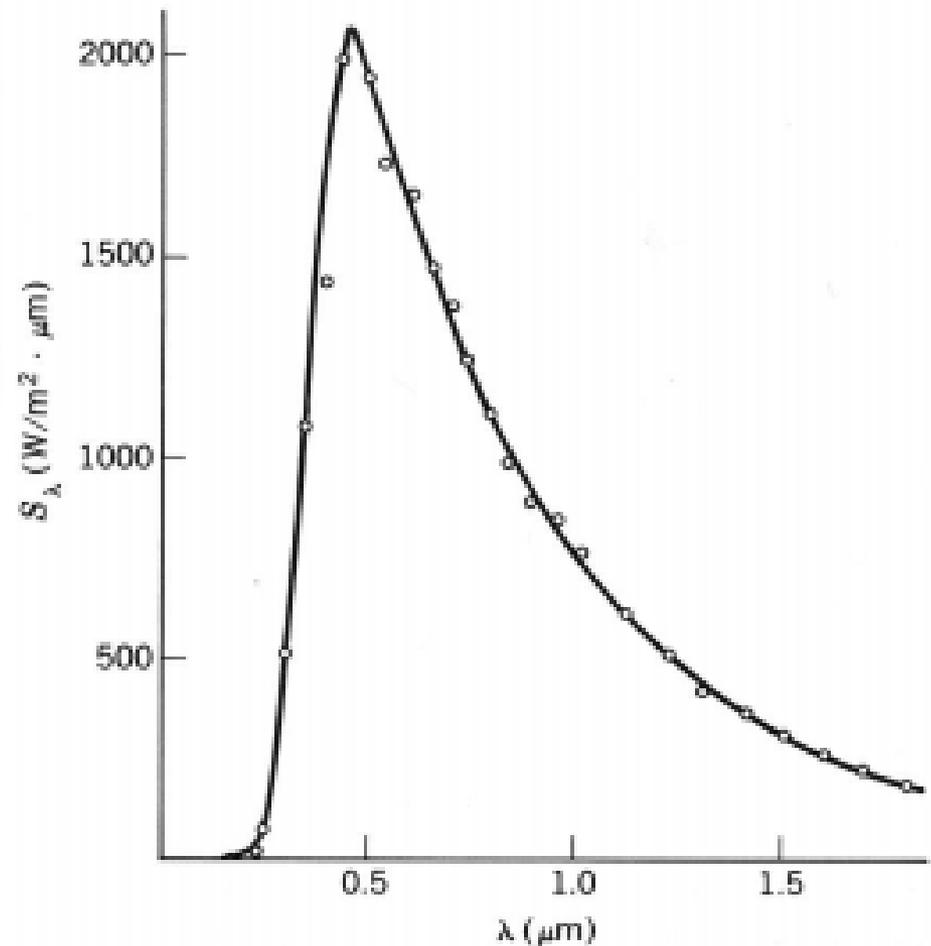




↑
 Comparação entre as teorias
 de Planck e de Wien e as
 medidas de Coblentz (~1915)

Radiância espectral do Sol

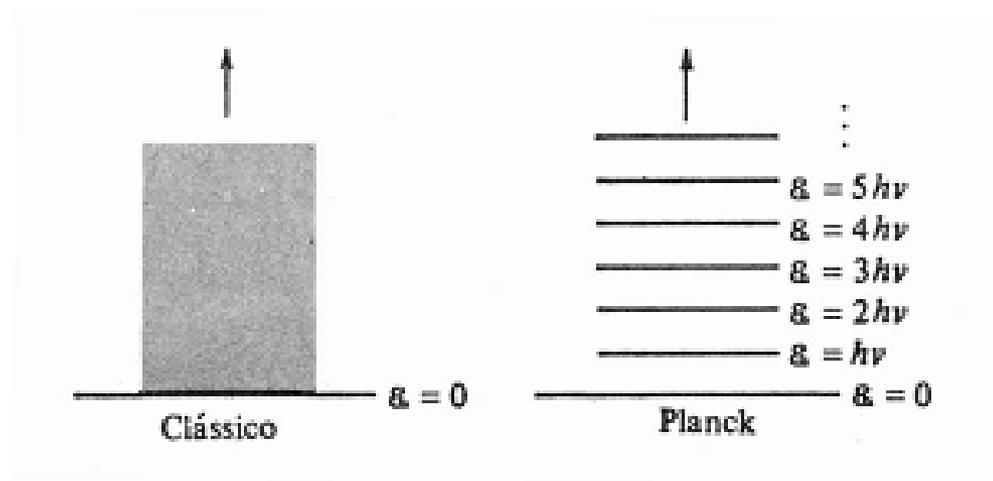
M.P. Thekaekara, *et al.*,
 Appl. Opt. **8**(1969)1713



Implicações do resultado de Planck

- Qual o significado físico da hipótese de Planck?
- Ela impõem que os pequenos osciladores que constituem as paredes da cavidade e estão em equilíbrio com a radiação, só podem assumir certos valores discretos de energia:

$$E = nh\nu$$



Exercícios:

- 1) De acordo com a Lei de Planck, qual é a energia média de um oscilador cuja energia é kT ?
- 2) Use a lei de Planck para mostrar que a densidade total de energia de um corpo negro é proporcional a T^4 como afirma a Lei de Stefan-Boltzmann