MECÂNICA 1

NOTURNO/2017

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Uma partícula de massa m, em movimento unidimensional, em repouso na origem no instante t=0, está submetida a uma força unidimensional $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \theta)$.

(a) Esboce a forma que se deve esperar para v(t) e para x(t), para vários períodos de oscilação da força.

(b) Determine v(t) e x(t) e compare com o seu esboço anterior.

2. Uma partícula de massa m, inicialmente em repouso, está submetida a uma força unidimensional $F(t) = k\,t \exp(-\alpha t)$ onde k e α são constantes. Suponha que a força comece a atuar no instante t=0.

(a) Determine a velocidade v(t) da partícula. Qual a velocidade final da partícula.

(b) Determine a equação horária que descreve o movimento da partícula. O que acontece para $t \to \infty$?

3. Uma partícula, em movimento unidimensional, de massa m, em repouso na origem no instante t=0, está submetida à força $F(t) = F_0 \mathrm{sen}^2 \omega t$.

a) Esboce a forma que se deve esperar para v(t) e para x(t), para vários períodos de oscilação da força.

b) Determine v(t) e x(t) e compare com o seu esboço anterior.

4. Uma partícula de massa m, inicialmente em repouso, é submetida a uma força $F(t) = F_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \theta)$. Suponha que a força comece a atuar no instante t=0.

(a) Determine a equação horária que descreve o movimento da partícula. O que acontece para $t \to \infty$?

(b) Como a velocidade final da partícula depende de θ e de ω ?

Sugestão: A álgebra pode ser simplificada escrevendo-se cos $(\omega t+\theta)$ como uma soma de funções exponenciais complexas.

5. Um barco de massa **m** e velocidade inicial $\mathbf{v_0}$ é freado por uma força de atrito **F= - b exp (av), a e b>0**.

(a) Determine a velocidade do barco **v(t)**.

(b) Mostre que o barco vai parar após um tempo $t = \frac{m}{a\,b}[1 - \exp(-a\,v_0)]$.

(c) Determine x(t) e mostre que a distância percorrida pelo barco até parar será:

$$d = \frac{m}{a^2 b}[1 - (a\,v_0 + 1)\exp(-a\,v_0)\,.$$

Dado: $\int \ln u\, du = u[\ln|u| - 1] + C$

6. Um corpo é abandonado do repouso em y=0 caindo sob a influência da gravidade e da resistência do ar. Obtenha uma relação entre a velocidade $v_y(t)$ e a distância percorrida y(t) considerando a resistência do ar igual a (a) bv_y e a (b)bv_y^2.

7. Um corpo é projetado verticalmente para cima em um campo gravitacional constante com uma velocidade inicial v_0. Mostre que se existir uma força retardadora proporcional ao quadrado da velocidade instantânea, a velocidade do corpo ao retornar à posição inicial será: $\frac{v_0 v_f}{\sqrt{v_0^2 + v_f^2}}$ onde v_f é a velocidade final quando o movimento se torna uniforme.

8. Uma partícula de massa m se movimenta para baixo em um campo gravitacional constante partindo do repouso. Se existir uma força retardadora proporcional ao quadrado da velocidade, $F=kmv^2$, mostre que a distância percorrida pela partícula na queda quando acelerada de v_0 a v_1 será: $s(v_0 \rightarrow v_1) = \frac{1}{2k} \ln\left[\frac{g - kv_0^2}{g - kv_1^2}\right]$.

9. Uma partícula de massa m desce um plano inclinado sob ação da gravidade. Se o movimento for retardado por uma força $F= kmv^2$, mostre que o tempo que ela levará para percorrer uma distância d a partir do repouso será: $t = \frac{\cosh^{-1}[\exp(kd)]}{\sqrt{kg\text{sen}\theta}}$ onde θ é o ângulo de inclinação do plano.

10. Um canhão, inclinado de um ângulo θ em relação ao plano horizontal, lança uma bala com velocidade inicial v_0.
(a) Calcule a velocidade, o deslocamento e o alcance da bala lançada pelo canhão.
(b) Calcule o decréscimo sofrido pelo alcance do projétil na presença de uma força de resistência do ar proporcional à velocidade do projétil.

11. Uma partícula de massa m acha-se sob a ação de uma força cuja energia potencial é $U(x) =ax^2 - bx^3$, onde a e b são constantes positivas.
(a) Determine a força que atua sobre a partícula e esboce o gráfico de F(x) e de U(x).
(b) A partícula parte da origem x=0 com velocidade v_0. Mostre que se $|v_0|<v_c$, onde v_c é uma velocidade crítica, a partícula permanecerá confinada numa região próxima à origem. Determine v_c.
(c) Delimite 2 valores x_i e x_s entre os quais podemos considerar o movimento como harmônico simples. Qual é a freqüência das oscilações nesta região?

12. Uma partícula de massa m está sujeita a um potencial $U(x)= C[2(\frac{x}{x_0})^2 - (\frac{x}{x_0})^4]$, onde C e x_0 são constantes positivas. Obtenha os limites dos intervalos de energia em que:
(a) O movimento é periódico.
(b) O movimento não é periódico e não é limitado em nenhum dos dois sentidos de x.
Calcule o período para pequenas oscilações no caso do movimento periódico.

13. A energia potencial para uma força entre dois átomos em uma molécula diatômica tem a seguinte forma aproximada: $U(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$, onde a e b são constantes positivas.
(a) Determine a força que atua entre os átomos.
(b) Supondo que um dos átomos seja muito pesado e praticamente permaneça em repouso enquanto o outro se move ao longo de uma linha reta, descreva os movimentos possíveis.
(c) Determine a distância de equilíbrio e o período para pequenas oscilações, em torno da posição de equilíbrio, se a massa do átomo mais leve for m.

14. Uma partícula de massa m move-se num poço de potencial dado por $U(x) = \frac{-U_0 a^2 (a^2 + x^2)}{8a^4 + x^4}$, onde U_0 e a são constantes positivas.
(a) Esboce U(x) e F(x).
(b) Discuta os movimentos que podem ocorrer. Localize todos os pontos de equilíbrio e determine a freqüência para pequenas oscilações em torno de qualquer um dos pontos de equilíbrio estável.

15. Uma partícula está sujeita à ação da força $F = -kx + \frac{a}{x^3}$, onde k e a são constantes positivas.
(a) Determine o potencial U(x), descreva a natureza das soluções e determine a solução x(t).
(b) Você pode dar uma interpretação simples do movimento quando $E^2 >> ka$, onde E é a energia total da partícula?

16. Um próton com velocidade v_0, proveniente de um ponto muito distante, aproxima-se pela direita de uma região descrita pelo potencial $U(x)=-\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$. Num ponto **x’** ocorre a emissão de um fóton de tal forma que há perda de energia cinética, ficando o próton então confinado ao poço.
(a) Qual a mínima energia que o fóton deve ter para que isso ocorra?
(b) Qual deve ser a energia do fóton para que a velocidade do próton se anule nesse ponto?
(c) O próton continua em repouso no ponto? Discuta.

17. Uma partícula de massa m está submetida à força restauradora de uma mola de constante de elasticidade k e à força de atrito de escorregamento $\pm$ μmg, onde μ é o coeficiente de atrito. A partícula se move linearmente e parte do repouso, de uma distância $x_0 >> \frac{\mu mg}{k}$ da posição de equilíbrio.

a) Qual será o período de oscilações?

b) Qual será o decréscimo na amplitude após um ciclo? E dois ciclos?

Quanto tempo gastará a partícula para deixar de oscilar?

18. Uma força $F = F_0 e^{-at}$ atua sobre um oscilador harmônico de massa m, constante de mola k e constante de amortecimento b. Determine uma solução particular da equação do movimento, partindo da suposição de que existe uma solução possível com a mesma dependência do tempo que a força aplicada.

19. Dada a equação $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$ para oscilações amortecidas do oscilador harmônico. Mostre que se $E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$ então $\frac{dE}{dt} = -b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$. Isto mostra que se existe amortecimento, a energia total E decresce com o tempo. O que acontece com a energia perdida?

20. Uma partícula de massa m está sujeita a uma força de restauração linear F= - kx, cuja constante k é proporcional ao tempo, isto é, k=at, onde a é uma constante positiva. Obtenha uma solução da equação do movimento para a partícula sob a forma de uma série de potências em t. Indique qual a lei geral de recorrência dos termos da série bem como o seu valor em termos das condições iniciais $x(t=0)=x_0$ e $v(t=0)=v_0$.

21. Um pêndulo simples consiste de uma massa m pendurada de um ponto fixo por uma barra estreita de massa desprezível, inextensível, de comprimento l. Obtenha a equação de movimento e, utilizando a aproximação senθ ~ θ, mostre que a freqüência natural do pêndulo é $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Discuta o movimento do pêndulo na presença de um meio viscoso representado pela força retardadora $F_R = 2m\sqrt{gl}\,\frac{d\theta}{dt}$.

22. Determine, usando o princípio da superposição, o movimento de um oscilador subamortecido com $\gamma = \frac{1}{3\omega_0}$, inicialmente em repouso e submetido, após t=0, à ação da força $F = A \text{ sen } \omega_0 t + B \text{ sen } 3\omega_0 t$, onde ω_0 é a freqüência natural do oscilador.

Qual deve ser a razão entre B e A para que as oscilações forçadas com freqüência $3\omega_0$ tenham a mesma amplitude que as oscilações cuja freqüência é ω_0.