Cálculo IV, Prova 1, 08/10/2015, Prof. Juan López Linares

IMPORTANTE: *O diabo mora nos detalhes*.

1a) A expressão $e^{i\pi} + 1 = 0$ é considerada a equação mais bela da matemática por envolver as constantes e e π, o símbolo de número imaginário i e os números *0* e *1*. Prove que é verdadeira. Prove primeiro que a fórmula de Euler, $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$, é verdadeira.

1b) Escreva a função $ln(1 + x)$ como uma série de potências centrada em x=0. Demostre como encontrar os coeficientes dessa série.

2a) Resolva detalhadamente a equação diferencial $y''(x)+k^2x^2\, y(x) = 0$ usando uma série de potências centrada em x=0, k é uma constante.

2b) Resolva detalhadamente a equação diferencial $y''(x) - (1+x\,)\, y(x) = 0$ usando uma série de potências centrada em x=0.

3a) Resolva detalhadamente o problema de valor inicial
$x^2y''(x)-5xy'(x)+8y(x) = 0,\ y(2) = 32,\ y'(2) = 0.$

3b) Resolva detalhadamente a equação diferencial
$2\,x\,y''(x)+(1+x)\,y'(x)+ y(x) = 0$ usando uma série de potências centrada em x=0.

4a) Use a transformada de Laplace para resolver detalhadamente o problema de valor inicial $y'(t) - y(t)=te^t sen(t),\ y(0) = 0.$

4b) Use a transformada de Laplace para resolver detalhadamente o problema de valor inicial $y''(t) + y'(t)=f(t),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$ onde

$$f(t) = \begin{cases} 1, se\ 0 \leq t < \pi/_2 \\ sen(t), se\ t \geq \pi/_2 \end{cases}.$$

5a) Use a transformada de Laplace para resolver detalhadamente o problema de valor inicial dado pela equação íntegro-diferencial
$y'(t)+6\,y(t)+9\int_0^t y(\tau)d\tau=1,\ y(0) = 0.$

5b) Use a transformada de Laplace para resolver detalhadamente o problema de valor inicial $y''(t)-2\,y'(t)=1+\delta(t-2),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$