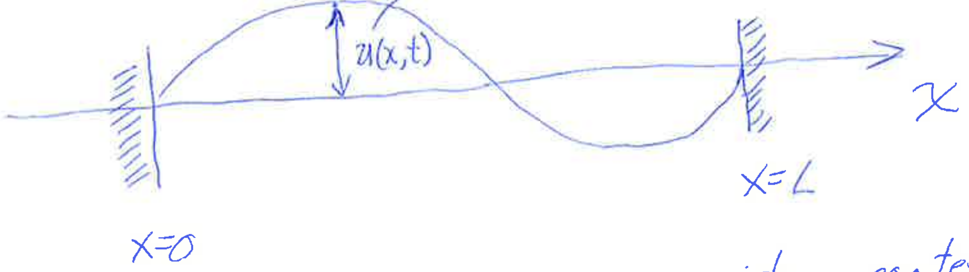
A Equação de Onda: Vibrações de uma Corda Elástica



- A equação de onda aparece em muitos contextos físicos: como na propagação de ondas acústicas, eletromagnéticas, de água, sísmicas, etc.
- Aqui vamos restringirnos a analisar as vibrações de uma corda elástica: como a corda de um violão.
- São desprezados os efeitos de amortecimento e a amplitude do movimento não é muito grande.
- Nestas condições o movimento de cada ponto da corda satisfaz a equação unidimensional (espacialmente) de ondas

$$\boxed{a^2} u_{xx} = u_{tt} \qquad \text{ou} \qquad a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

u_{xx} ← Segunda Derivada Parcial em x

u_{tt} ← Segunda Derivada Parcial em t

$$a^2 = \frac{T}{\rho}$$

T ← Tensão da Corda (Força). Unidades $[T] = N = M\frac{L}{T^2}$

ρ ← densidade linear de massa da corda (M/L)

$$[a^2] = \frac{L^2}{T^2}$$

L^2 ← distância^2

T^2 ← tempo^2

$a^2 = v_x^2$ ← velocidade de propagação da onda na direção do eixo x.

Lembrando →

$\alpha^2 u_{xx} = u_{\boxed{t}}$ ← Eq. de Condução do Calor

$a^2 u_{xx} = u_{\boxed{tt}}$ ← Eq. de Ondas.

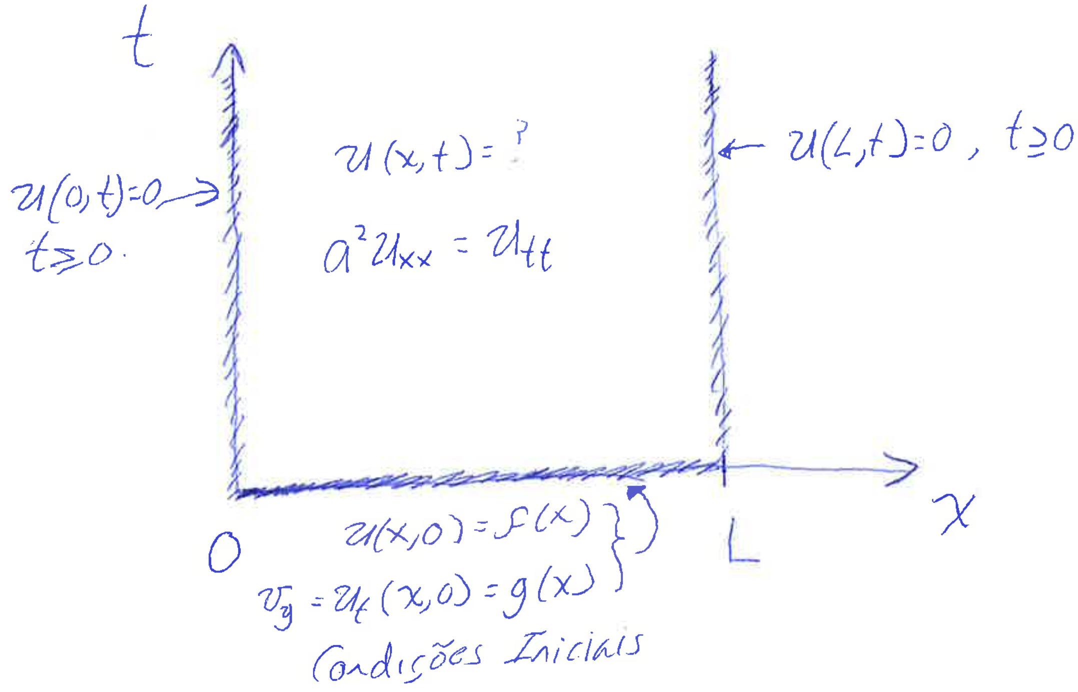
Problema Geral (I) 1D

- Eq. Dif. Em Derivadas Parciais → $a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}$, $0<x<L$, $t>0$

- Condições de Contorno em x (duas) → $u(0,t)=0$ e $u(L,t)=0$, $t\geq 0$

- Condições Iniciais em t (DUAS) → $\underbrace{u(x,0)=f(x)}_{①\ \text{posição inicial}}$ e $\underbrace{u_t(x,0)=g(x)}_{②\ \text{velocidade vertical inicial}}$, $0\leq x<L$

A equação diferencial é de 2ª ordem em t



Eq. de Ondas

- 1D → $a^2 u_{xx} = u_{tt}$
- 2D → $a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}$
- 3D → $a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}$

Corda Elástica com Deslocamento Inicial não nulo

$$(1)\quad \begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, & 0<x<L,\ t>0 \leftarrow \text{Eq. Dif.} \\ u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0, & t\geq 0 \leftarrow \text{Contorno} \\ u(x,0)=\underbrace{f(x)}_{\text{conhecido deslocamento inicial}} \quad \underbrace{u_t(x,0)=0}_{v_y(x,0)=0 \text{ velocidade inicial em } y \text{ ZERO}}, & 0\leq x\leq L \leftarrow \text{Inicial} \end{cases}$$

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \leftarrow \text{Método de Separação de Variáveis}$$

Colocando na eq. dif.

$$a^2 \left[X(x)T(t)\right]_{xx} = \left[X(x)T(t)\right]_{tt} \leftarrow \text{Eq. Dif. em Derivadas Parciais}$$

$$a^2 X'' T = X T''$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \boxed{-\lambda} \leftarrow \text{Constante a ser Determinada}$$

Equivalentes

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + a^2 \lambda T = 0 \end{cases} \leftarrow \text{Duas Eq. Dif. Ordinárias para } X(x) \text{ e } T(t)$$

Vamos considerar agora as condições de contorno

- $\underbrace{u(0,t)=0 = X(0)T(t)}_{\text{ou}}$

$X(0)=0$ ou $\underbrace{T(t)=0 \quad \forall t>0}$

leva a solução trivial
pelo que $T(t) \neq 0$ e
ficamos com $\boxed{X(0)=0}$

- $u(L,t)=0 = X(L)T(t)$

De forma análoga teremos que $\boxed{X(L)=0}$.

Agora vamos considerar a segunda condição inicial:

$u_t(x,0)=0$.

$u(x,t) = X(x)T(t)$

$u_t(x,t) = X(x)T'(t)$

$u_t(x,0) = \underbrace{X(x)T'(0)=0}_{\text{ou}}$, $0 \leq x \leq L$

$\underbrace{X(x)=0}$ ou $T'(0)=0$

Leva a Solução Trivial
pelo que ficamos com

$\boxed{T'(0)=0}$

Resumindo, teremos dois problemas interligados de autovalores e autofunções:

1ro Problema em X

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \quad e \quad X(L) = 0 \end{cases}$$

2do Problema em t

$$\begin{cases} T'' + a^2 \lambda T = 0 \\ T'(0) = 0 \leftarrow \text{Segunda Condição Inicial} \\ + u(x,0) = f(x) \leftarrow \text{Primeira } \cancel{\text{seg}} \text{ Condição Inicial} \end{cases}$$

A solução para este problema já estudamos no contexto da eq. dif. de condução do calor. (Problema Homogêneo)

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad , n = 1, 2, \ldots \quad n \in \mathbb{N} \leftarrow \text{Autovalores}$$

positivo

$$X(x) = \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad , n = 1, 2, \ldots , n \in \mathbb{N} \leftarrow \text{Autofunções}$$

Para resolver o 2do Problema em t, vamos reescrever-lo

$$T''(t) + a^2 \lambda T = 0 \quad e \quad T'(0) = 0$$

$$r^2 + a^2 \lambda = 0 \leftarrow \text{Eq. Caraterística}$$

$$r^2 = -a^2 \lambda = -a^2 \mu^2 \qquad (\lambda = \mu^2)$$

$$r_{1,2} = \pm i a \mu \quad (\text{Tipo III})$$

$$\alpha = 0 \quad e \quad \beta = a\mu$$

$$T(t) = K_1 \cos(a\mu t) + K_2 \operatorname{sen}(a\mu t)$$

Para usar a Condição Inicial Derivamos

$$T'(t) = -K_1 a\mu \operatorname{sen}(a\mu t) + K_2 a\mu \cos(a\mu t)$$

em $t = 0$ $\quad T'(0) = 0 = -K_1 a\mu \cancel{\operatorname{sen}(a\mu \cdot 0)}^{0} + K_2 a\mu \cancel{\cos(a\mu \cdot 0)}^{1}$

$$K_2 a \mu = 0$$

$$\boxed{K_2 = 2}$$

$T(t) = K_1 \cos(a\mu t)$

$T_n(t) = K_1 \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right)$ são autofunções para $T(t)$

Ignorando as K_1.

$$\underbrace{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}_{\text{Autovetores}} \quad e \quad \underbrace{T_n(t) = \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right)}_{\text{Autofunções}}$$

do Segundo Problema em t

Como $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\underbrace{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, \ldots \; n \in \mathbb{N}}_{\text{Autovalores}} \quad e \quad \underbrace{u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right)}_{\text{Autofunções em } u(x,t).}$$

ou Soluções Fundamentais

- São periódicas em x com período $\frac{2L}{n}$. Período Fundamental ($n=1$) de $2L$.

$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right)$

$\lambda_n = \frac{2L}{n}$ comprimento de onda

aqui não significa autovalor

- São periódicas em t com período $\frac{2L}{na}$. O período fundamental ($n=1$) é de $\frac{2L}{a}$.

$\cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) = \cos(\omega_n t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T_n}\right)$.

$\omega_n = a \frac{n\pi}{L}$ ← frequência angular

$[\omega_n] = \text{segundo}^{-1}$

$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$

$T_n = \frac{2L}{an}$ ← período temporal

$[T_n] = \text{segundos}$

$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{an}{2L}$ ← frequências

A solução geral será uma combinação linear de todas as soluções fundamentais.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(a\, n\frac{\pi}{L} t\right)$$

Vamos considerar agora a primeira condição inicial: $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq L$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\underbrace{\cos(0)}_{1}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

→ Série de Fourier em Senos de uma extensão periódica ímpar de $f(x)$.

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Resumindo, se

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt} \\ u(0,t) = 0 \ \text{ e } \ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \ \text{ e } \ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

a solução é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(a\, n\frac{\pi}{L}t\right) \quad \text{onde}$$

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx \qquad n = 1, \ldots$$

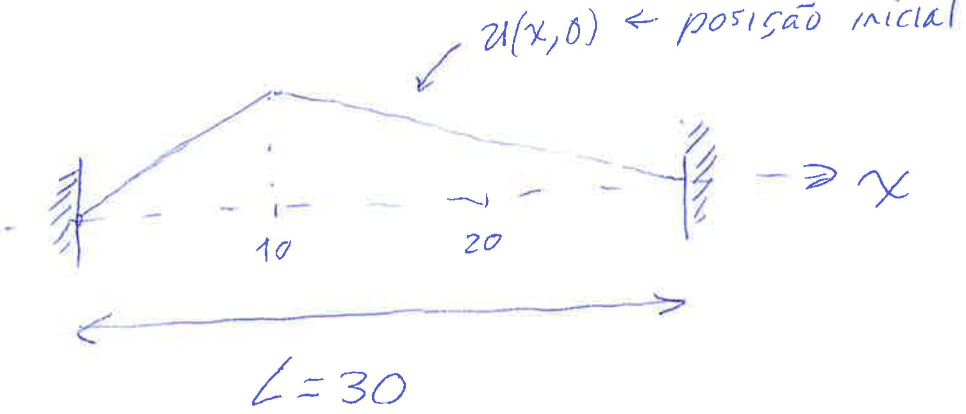
Exemplo: Considere uma corda vibrante de comprimento $L=30$ que satisfaz a equação de onda

$$4u_{xx} = u_{tt} \quad , \quad 0<x<30 \; , \; t>0 .$$

Suponha que as extremidades da corda estão fixas e que a corda é colocada em movimento sem velocidade inicial da posição inicial

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x/10 & , \; 0<x\leq 10 \\ \dfrac{30-x}{20} & , \; 10<x\leq 30 \end{cases}$$

Encontre o deslocamento $u(x,t)$ da corda e descreva seu movimento durante um período.



$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_{tt} \quad , \quad 0<x<30 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) \quad , \forall t>0 \\ u(x,0) = f(x) \quad e \quad u_t(x,0) = 0 \quad , \quad 0\leq x\leq L \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)\cos\left(2n\frac{\pi}{30}t\right)$$

$$c_n = \frac{2}{30}\left[\int_0^{10} \frac{x}{10}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx + \int_{10}^{30} \frac{30-x}{20}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx\right]$$

$$C_n = \frac{1}{150}\int_0^{10} x\,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx + \frac{1}{10}\int_{10} \text{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx \; -$$

$$-\frac{1}{300}\int_{10}^{30} x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)dx$$

Por partes

$$\int x\,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx = -\frac{30x}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right) + \frac{30}{n\pi}\int \cos\left(n\pi/30\, x\right)dx$$

$u = x \qquad dv = \text{sen}(n\,\pi/30\; x) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$du = dx \qquad v = -\frac{30}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right)$

$$\int x\,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx = -\frac{30x}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right) + \left(\frac{30}{n\pi}\right)^2\text{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)$$

$$C_n = \frac{1}{150}\left[-\frac{300}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + 0\right] + \frac{1}{150}\left[\left(\frac{30}{n\pi}\right)^2\text{sen}\left(n\frac{\pi}{3}\right) - 0\right]$$

$$+\frac{1}{10}\left(\frac{30}{n\pi}\right)(-1)\cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right)\Big|_{10}^{30} +$$

$$-\frac{1}{300}\left[-\frac{900}{n\pi}(-1)^n + \frac{300}{n\pi}\cos(n\pi/3)\right] - \frac{1}{300}\left(\frac{30}{n\pi}\right)^2\left[\overset{0}{\cancel{\text{sen}(n\pi)}} - \text{sen}(n\pi/3)\right]$$

$$C_n = -\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \frac{6}{n^2\pi^2}\text{sen}(n\pi/3) - \frac{3}{n\pi}\left[(-1)^n - \cos(n\pi/3)\right] +$$

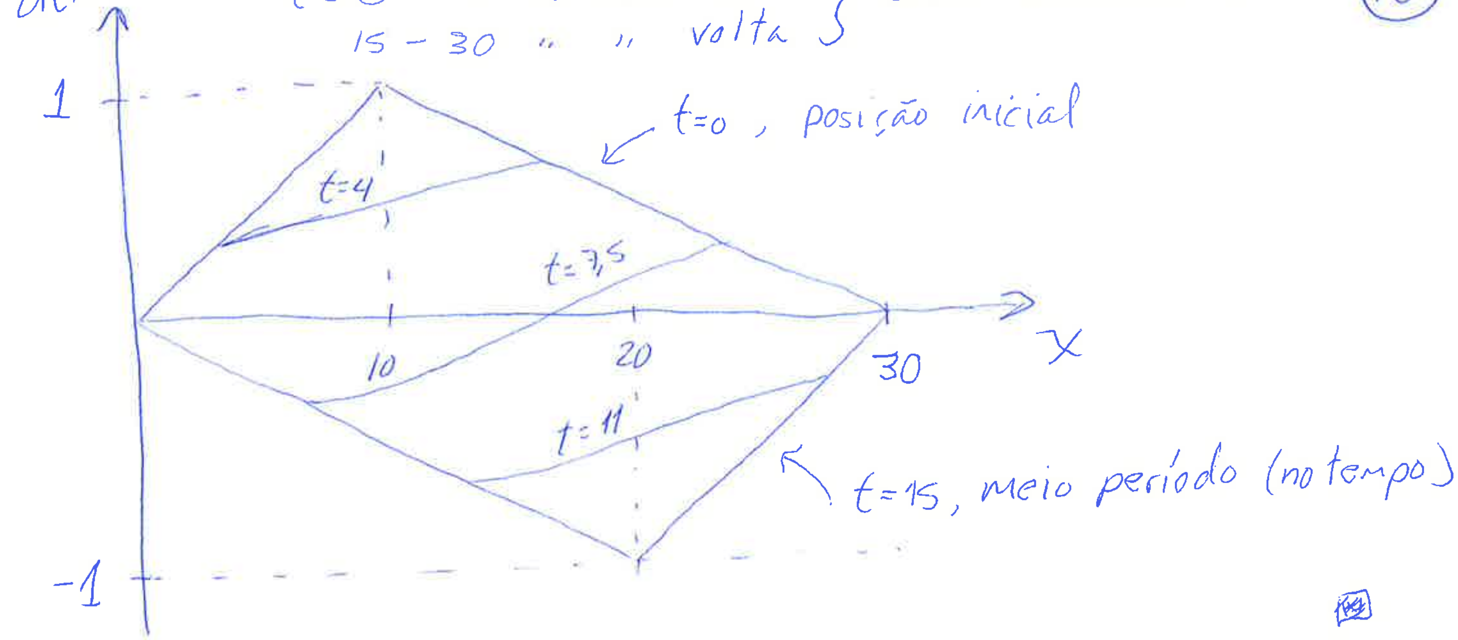
$$+\frac{3}{n\pi}(-1)^n - \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi/3) + \frac{3}{n^2\pi^2}\text{sen}(n\pi/3)$$

$$C_n = \frac{9}{n^2\pi^2}\text{sen}(n\pi/3)$$

Então, a solução é

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n^2\pi^2}\text{sen}(n\pi/3)\,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)\cos\left(2n\frac{\pi}{30}t\right)}$$

$t = 0 - 15$ a onda vai
$15 - 30$ " " volta } onda estacionária



A solução do problema

$$\begin{cases} \begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt} \\ u(0,t) = 0 \quad e \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad e \quad u_t(x,0) = 0 \end{cases} \\ u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(a n \frac{\pi}{L} t\right) \quad \text{onde} \\ c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx \end{cases}$$

pode ser escrita como

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{h(x-at)}_{\text{onda que volta}} + \underbrace{h(x+at)}_{\text{onda que vai}}\Big]$$

Expansão Periódica Ímpar de $f(x)$

$$\begin{cases} h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq L \\ -f(-x), & \text{se } -L < x < 0 \end{cases} \\ h(x) = h(x + 2L) \end{cases}$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$ ← Série de Fourier para $h(x)$ = Série de Fourier para $f(x)$

Se trocamos $x \to x - at$ • dentro de $h(x)$.
$x \to x + at$

$$h(x-at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{L}(x-at)\right)$$

$$h(x+at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{L}(x+at)\right)$$

mas, $\text{sen}(\theta+\beta) = \text{sen}(\theta)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\cos(\theta)$

$$h(x-at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\text{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\overbrace{\cos\left(an\frac{\pi}{L}t\right)}^{par} - \cancel{\overbrace{\text{sen}\left(an\frac{\pi}{L}t\right)}^{ímpar}\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)}\right]$$

$$+\; h(x+at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\text{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(an\frac{\pi}{L}t\right) + \cancel{\text{sen}\left(an\frac{\pi}{L}t\right)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)}\right]$$

$$h(x-at) + h(x+at) = 2u(x,t).$$

Isso prova que a solução pode ser interpretada como uma superposição de uma onda que vai e outra que volta.

Veja uma animação em moodle.stoa.usp.br/mod/resource/view.php?id=2955

Corda Elástica com Velocidade Inicial Não Nula

$$v_y = u_t(x,0) = g(x)$$

$u(x,0) = 0 \leftarrow$ Posição Inicial. $\boxed{y=0}$

Eq. Dif. $a^2 u_{xx} = u_{tt}$ $\quad 0 < x < L,\ t > 0$

Condições de contorno em x $\quad u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = 0,\ t \geq 0$

Condição Inicial em t. $\quad u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = g(x)$ $\quad 0 \leq x \leq L$

Repetimos o procedimento de separação de Variáveis discutido anteriormente:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Para $X(x)$ a solução é idêntica

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{e} \quad X(x) = \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

autovalores $\qquad$ autofunções em x

Para $T(t)$ somente muda a condição inicial $\boxed{T(0) = 0}$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad \text{e} \quad \boxed{T(0)=0}$$

no problema anterior era $T'(0) = 0$

$$\lambda = \lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 > 0$$

$$T(t) = C_1 \cos(a\mu_n t) + C_2 \operatorname{sen}(a\mu_n t)$$

condição inicial $\rightarrow$ $T(0) = 0 = C_1 \cdot \overset{1}{\cos(0)} + C_2 \overset{0}{\operatorname{sen}(0)}$

$$C_1 = 0$$

$$T_n(t) = \operatorname{sen}\left(a n \frac{\pi}{L} t\right) \leftarrow \text{Autofunções em } t$$

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(a n \frac{\pi}{L} t\right) \qquad n = 1, \ldots \quad n \in \mathbb{N}$$

Autofunções para u ou Soluções Fundamentais.

$$u(x,t) = \sum_{n=1} c_n u_n(x,t) \leftarrow$$ Combinação Linear das Soluções Fundamentais

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \mathrm{sen}\left(an\frac{\pi}{L}t\right)}$$

$$u_t(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \frac{an\pi}{L} \cos\left(an\frac{\pi}{L}t\right)$$

Usamos agora a segunda condição inicial: $u_t(x,0) = g(x)$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \frac{an\pi}{L} \cos(0) = g(x)$$

ou

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{c_n\, a n \frac{\pi}{L}}_{\text{coeficientes}} \mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

coeficientes da Série de Fourier em Senos de $g(x)$.

$$\boxed{a n \frac{\pi}{L} c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx}$$

Permite Calcular os c_n.

Resumindo, se

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt} \\ u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,t) = 0 \quad u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

A solução é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(a n \frac{\pi}{L} t\right)$$

onde $\quad a n \frac{\pi}{L} c_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx$

Problema Geral para a Corda Elástica

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \text{ e } u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ e } u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Aqui podemos usar o princípio de superposição (a eq. dif. é linear)

$$\underbrace{u(x,t)}_{\substack{\text{Solução do} \\ \text{Problema} \\ \text{Geral} \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x)}} = \underbrace{v(x,t)}_{\substack{\text{Solução do} \\ \text{Problema} \\ \text{com} \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=0}} + \underbrace{w(x,t)}_{\substack{\text{Solução do} \\ \text{Problema} \\ \text{com} \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=g(x)}}$$