Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier (1)

Queremos aprender a resolver três tipos de equações diferenciais em derivadas parciais

(1) A eq. de condução do calor (Problema Unidimensional Espacialmente) ou eq. da difusão

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \alpha^2 u_{xx} = u_t$$

constante → α^2

Neste caso u pode ser interpretado como temperatura ou concentração.

(2) A eq. de ondas

$$v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{ou} \quad v^2 u_{xx} = u_{tt}$$

constante → v^2

(3) A eq. de Laplace (ou eq. do potencial)

em 2D → $$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

em 3D → $$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} = 0, \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

Aparece na solução de estados estacionários dos problemas do calor ~~unidimensionais~~. Os estados estacionários são aqueles que não dependem do tempo. A letra u pode significar um potencial elétrico ou gravitatório.

- Precisamos estudar primeiro as Séries de Fourier. Elas serão usadas na resolução das equações diferenciais em derivadas parciais.

- Lembrando que as séries de Taylor são uma forma de representar uma função usando potências de x.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

se $x_0 = 0 \rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

$\underbrace{\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}}_{\text{funções da base}}$

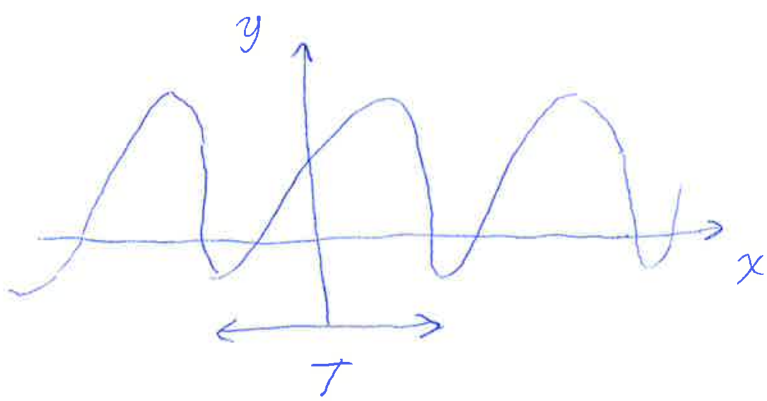
- Uma Série de Fourier será uma forma de representar uma função periódica usando funções $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$.

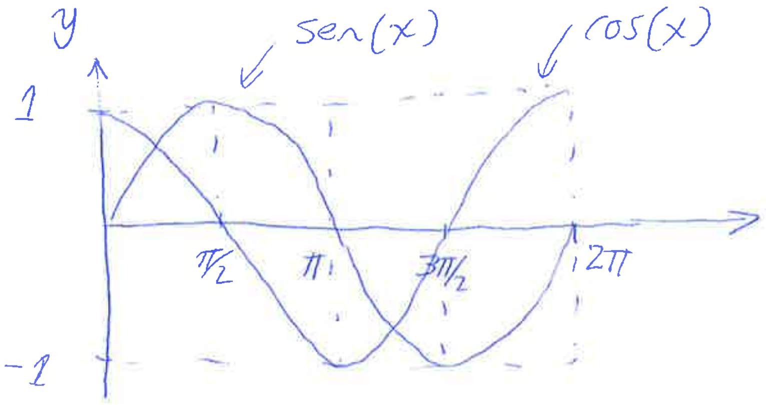
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

$$\{\underbrace{1, \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x), \operatorname{sen}(3x), \dots, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \dots}_{\text{funções da base.}}\}$$

- Nos dois casos uma função complicada é escrita como uma soma infinita de funções simples.

- Uma função periódica satisfaz $f(x+T) = f(x)$ para todo x. T é o período de f.





Nos dois casos o período $T = 2\pi$

$$sen(x + \overset{T}{2\pi}) = sen(x)$$
$$cos(x + 2\pi) = cos(x).$$

- Se troco $sen(x) \longrightarrow sen(nx)$ o período muda

para $n\cancel{x} = 2\pi \rightarrow nT = 2\pi \longrightarrow T = \frac{2\pi}{n}$

$$sen(n(x+T)) = sen\left(n\left(x + \frac{2\pi}{n}\right)\right) = sen(nx + 2\pi)$$

- Normalmente estudaremos uma função $f(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq L$. O "π" no gráfico anterior corresponde ao L neste gráfico.

$$sen\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

Se $x = L \rightarrow sen\left(n\frac{\pi}{\cancel{L}}\cancel{L}\right) = sen(n\pi) = 0$

e o período muda de $T = \frac{2\pi}{n}$ para $T = \frac{2L}{n}$

- Por isso vamos re-escrever a série de Fourier como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

- O sentido do $a_0/2$ em lugar do a_0 ficará claro posteriormente.
- As duas funções $sen\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$ e $\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$ tem período

$$T = \frac{2L}{n}: \quad sen\left(n\frac{\pi}{L}\left(x + \frac{2L}{n}\right)\right) = sen\left(n\frac{\pi}{L}x + 2\pi\right)$$

- Assumimos que as séries são convergentes

Ortogonalidade das funções Seno e Cosseno

- Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais (perpendiculares) entre si quando o produto escalar (interno) de eles é zero.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$$

- Para funções $u(x)$ e $v(x)$ definidas no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ se define o produto interno (escalar) como

$$\langle u(x), v(x) \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx$$

- As funções $u(x)$ e $v(x)$ são chamadas de ortogonais se

$$\langle u(x), v(x) \rangle = 0 = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx$$

- As funções $\text{sen}(n\frac{\pi}{L}x)$ e $\cos(n\frac{\pi}{L}x)$ com $n = 1, 2, \ldots$ formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $-L \leq x \leq L$.

$$\int_{-L}^{L} \cos(m\tfrac{\pi}{L}x)\cos(n\tfrac{\pi}{L}x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ L, & \text{se } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos(m\tfrac{\pi}{L}x)\,\text{sen}(n\tfrac{\pi}{L}x)dx = 0, \quad \forall m e n$$

$$\int_{-L}^{L} \text{sen}(m\tfrac{\pi}{L}x)\,\text{sen}(n\tfrac{\pi}{L}x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ L, & \text{se } m = n \end{cases}$$

Fórmulas de Euler-Fourier

$$(I)\qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(m\frac{\pi}{L}x\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\left(m\frac{\pi}{L}x\right)$$

Multiplicando por $\cos(n\frac{\pi}{L}x)$ e integrando entre $-L$ e L dos dois lados da eq. anterior

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L}\cos\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx + \cancelto{0}{\sum_{m=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx}$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx + a_n\cdot L$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx = \frac{a_0 L}{2n\pi}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\Big|_{-L}^{L} + a_n L$$

$$'' \qquad = \frac{a_0 L}{2n\pi}\left[\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}L\right) - \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}(-L)\right)\right] + a_n L$$

$$'' \qquad = \frac{a_0 L}{n\pi}\cancelto{0}{\operatorname{sen}(n\pi)} + a_n\cdot L$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx\,, \quad n = 1, 2\ldots$$

Para encontrar a_0 integramos a eq. I de $-L$ a L.

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-L}^{L} 1\,dx}_{2L} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cancelto{0}{\int_{-L}^{L}\cos\left(m\frac{\pi}{L}x\right)dx} + \sum_{m=1}^{\infty}\cancelto{0}{\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(m\frac{\pi}{L}x\right)dx}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

Podemos incluir a_0 na fórmula para a_n

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx \quad , n=0,1,\dots}$$

Multiplicando a eq. (I) por $\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$ e integrando se encontra que

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx \quad , n=1,2,\dots}$$

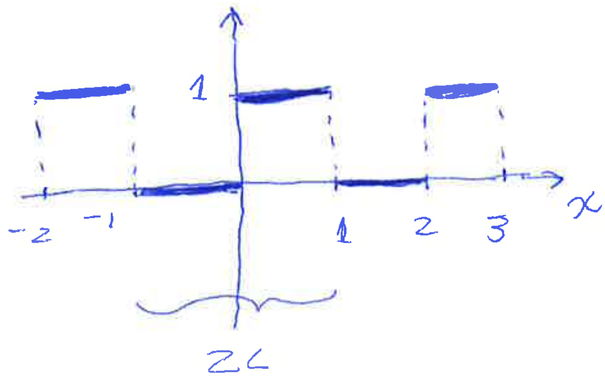
- A determinação de qualquer coeficiente é independente dos outros coeficientes.

Ex. $a_5 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(5\frac{\pi}{L}x\right)dx.$

- As fórmulas dependem de $f(x)$ apenas no intervalo $[-L, L]$. $f(x)$ deve ser periódica com $T=2L$.

Ex. Encontre a Série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -1 \le x < 0 \\ 1 & , 0 \le x < 1 \end{cases} \qquad f(x+2) = f(x)$$



$\boxed{L=1}$

Se $n=0 \rightarrow a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 1\,dx = x\Big|_0^1$

$$\boxed{a_0 = 1}$$

Se $n \geq 1$

$$a_n = 1\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{1}x\right)dx = \int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx$$

$$a_n = \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi) = 0$$

$$\boxed{a_n = 0 \;/\; \forall n \geq 1}$$

$$b_n = 1\int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{1}x\right)dx = \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx$$

$$b_n = \frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \underbrace{\cos(0)}_{1}\right]$$

$$b_n = \frac{-1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \qquad n=1,2\ldots$$

Se n é par $\Rightarrow b_n = 0 \longrightarrow b_{2s} = 0$, $s = 1, 2, \ldots$

Se n é ímpar $\Rightarrow b_n = \frac{2}{n\pi} \rightarrow b_{2s-1} = \frac{2}{(2s-1)\pi}$, $s = 1, 2, \ldots$

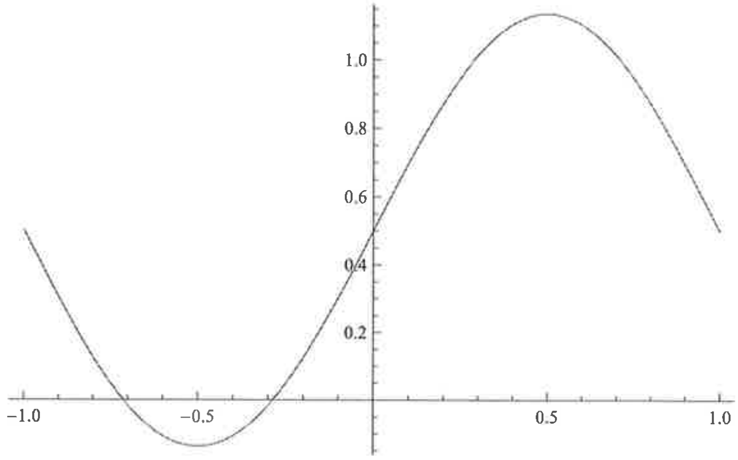
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)}^{\,0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2s-1}\right)\operatorname{sen}\left((2s-1)\pi x\right)}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\pi x) + \frac{2}{\pi}\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5\pi x)$$

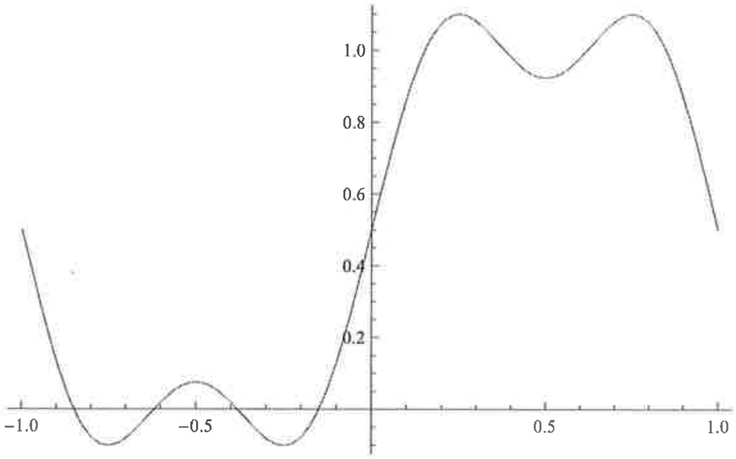
In[1]:= `Plot[(1 / 2) + (2 / Pi) Sin[Pi x], {x, -1, 1}]`

Out[1]=



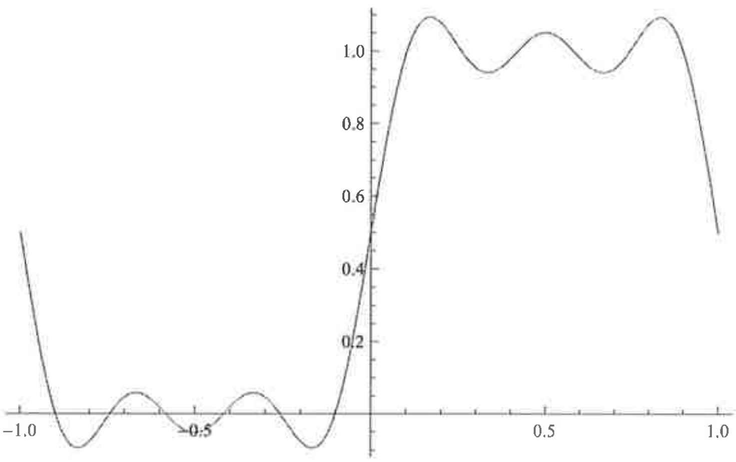
In[2]:= `Plot[(1 / 2) + (2 / Pi) Sin[Pi x] + (1 / 3) (2 / Pi) Sin[3 Pi x], {x, -1, 1}]`

Out[2]=



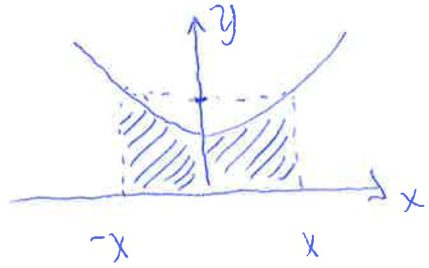
In[3]:=
```
Plot[(1 / 2) + (2 / Pi) Sin[Pi x] +
  (1 / 3) (2 / Pi) Sin[3 Pi x] + (1 / 5) (2 / Pi) Sin[5 Pi x], {x, -1, 1}]
```

Out[3]=



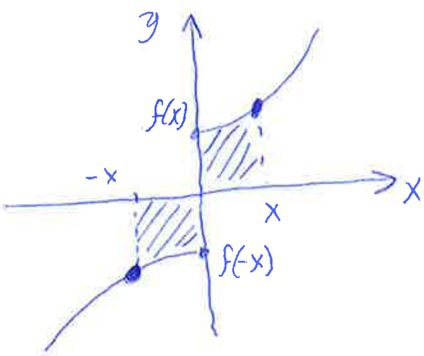
Funções Pares e Impares

Função Par: $f(-x) = f(x)$



$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

Função Impar: $f(-x) = -f(x)$



$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$$

Propriedades das Funções Pares e Impares

① A soma (diferença) e o produto (quociente) de duas funções pares são pares. $P \pm P = P$ $\quad P \cdot P = P$ $\quad \frac{P}{P} = P$

② A soma (diferença) de duas funções impares é impar. O produto (quociente) de duas funções impares é par.

$I \pm I = I$ $\quad I \cdot I = P$ $\quad \frac{I}{I} = P$

3 A soma (diferença) de uma função ímpar e outra par não é nem par nem ímpar. O produto (quociente) de uma função par e outra ímpar é ímpar.

$$P \pm I = \text{Nem } P \text{ Nem } I \qquad P \times I = I \qquad \frac{P}{I} = I$$

Ex. Seja $g(x) = f(x)h(x)$ onde $f(-x) = f(x)$ par, $h(-x) = -h(x)$ ímpar

$$g(-x) = f(-x)h(-x) = f(x)(-h(x)) = -\underbrace{f(x)h(x)}_{g(x)}.$$

$$g(-x) = -g(x) \leftarrow \text{IMPAR.}$$

Ex. Seja $g(x) = f(x)h(x)$ onde $f(-x) = -f(x)$ ímpar, $h(-x) = -h(x)$ ímpar

$$g(-x) = f(-x)h(-x) = [-f(x)][-h(x)] = \underbrace{f(x)h(x)}_{g(x)}.$$

$$g(-x) = g(x) \leftarrow \text{par}$$

Série em Cossenos ($f(x)$ par)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)}^{\,0}$$

mas as funções $\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{L}x)$ são ímpares. Isso leva a que os $\boxed{b_n = 0 \ \forall n.}$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx \qquad n = 0, 1, \dots$$

$$\underbrace{\underbrace{f(x)}_{PAR}\ \underbrace{\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)}_{PAR}}_{PAR.}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Série de Fourier em Senos ($f(x)$ impar)

$$f(x) = \cancel{\frac{a_0}{2}}^{0} + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)}^{0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

a função $\cos(x)$ é par. $\boxed{a_n = 0 \quad \forall n \geq 0}$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

$$\underbrace{\underbrace{f(x)}_{ÍMPAR}\ \underbrace{\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)}_{ÍMPAR}}_{PAR.}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx}$$

- Se uma função $f(x)$ for dada originalmente somente no intervalo $[0, L]$ é possível fazer uma extensão periódica <u>par</u> de ela:

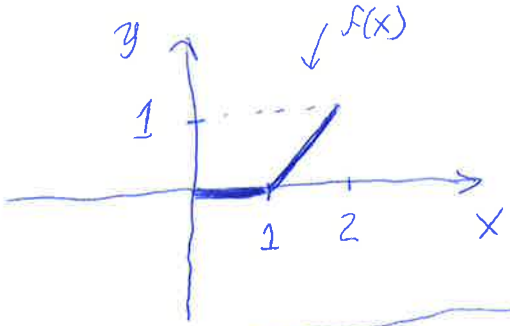
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L \\ f(-x) & -L < x \leq 0 \end{cases} \qquad g(x+2L) = g(x)$$

Extensão Periódica Par

(12)

Ex. Seja $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$. Encontre a extensão periódica par.

Sol.:



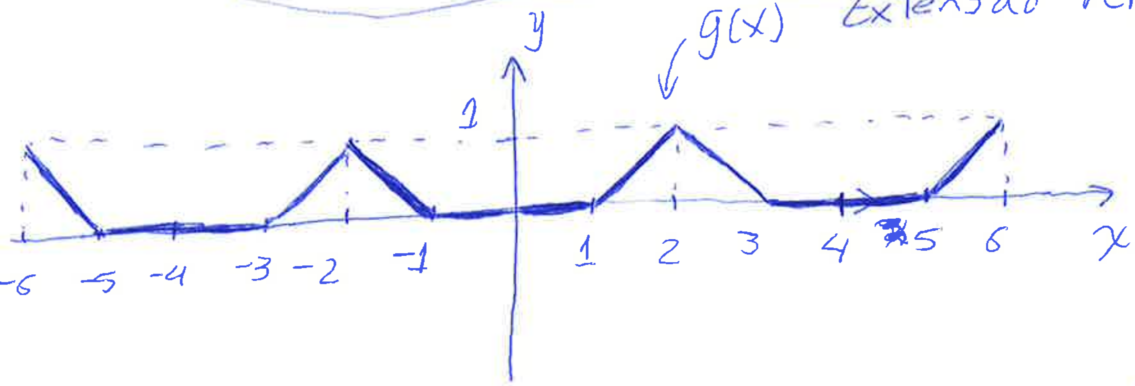
$L = 2$

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \le x < 2 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 0 & -1 \le x < 0 \\ -x-1 & -2 \le x < -1 \end{cases}$$

par

$g(x+4) = g(x)$

Extensão Periódica Par



- Se uma função $f(x)$ for dada somente no intervalo $[0, L]$ é possível fazer uma extensão periódica ímpar de ela.

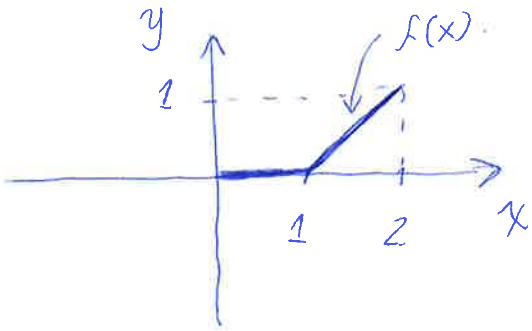
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ 0 & x = 0 \text{ e } x = L \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$

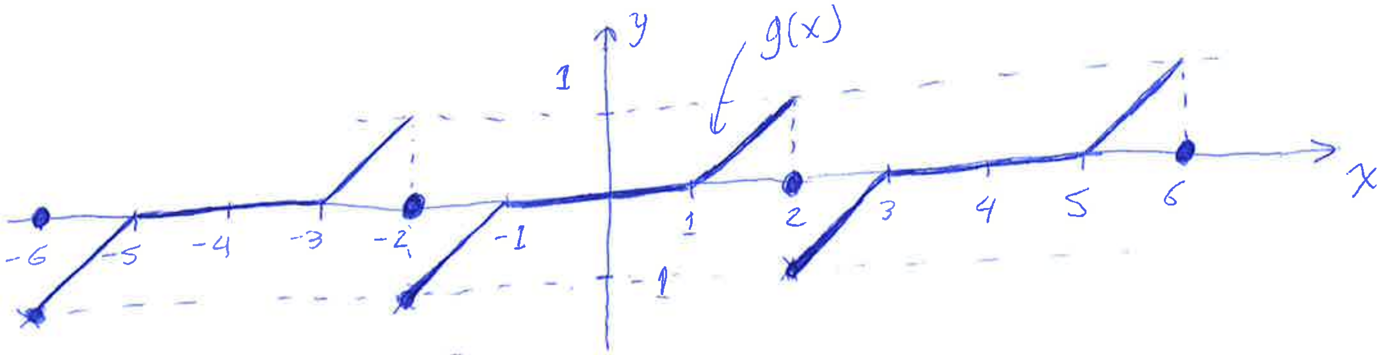
$g(x+2L) = g(x)$

Extensão Periódica Ímpar

Ex. Seja $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$. Encontre a extensão periódica ímpar.

Sol.





$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 2 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 0 & -1 \le x < 0 \\ x+1 & -2 < x < -1 \\ 0 & x = -2 \end{cases}$$

$L = 2$

$g(x+4) = g(x)$

Extensão Periódica Ímpar

Ex. Encontre a série de Fourier da Extensão Periódica par e ímpar da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 \,, & 0 \le x < 1 \\ x-1 \,, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

Sol. a) Extensão Periódica Par

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \le x < 2 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 0 & -1 \le x < 0 \\ -x-1 & -2 \le x < -1 \end{cases} \qquad L=2 \qquad g(x+4)=g(x)$$

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

Como $L=2$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_1^2 (x-1)\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx = \int_1^2 x\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx - \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

Integração por partes

$$\int_1^2 u\,dv = uv\Big|_1^2 - \int_1^2 v\,du$$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \qquad v = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$

$$\int_1^2 x\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{n\pi}\,x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_1^2 - \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

$$\int_1^2 x\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{n\pi}\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}2\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] - \frac{2}{n\pi}(-1)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\frac{2}{n\pi}\Big|_1^2$$

$$\int_1^2 x\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{n\pi}\left[2\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{\cancel{2}}\cancel{2}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$\int_1^2 x\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)dx = \frac{2}{n\pi}\left[2\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$\int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_1^2$$

$$\int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{n\pi}\left[\mathrm{sen}(n\pi) - \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left[2\,\mathrm{sen}(n\pi) - \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] - \frac{2}{n\pi}\left[\mathrm{sen}(n\pi) - \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left[\cancel{\mathrm{sen}(n\pi)}^{\,0}\right] + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$n=1 \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$n=2 \rightarrow \cos(\pi) = -1$

$n=3 \rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$n=4 \rightarrow \cos(2\pi) = 1$

$$a_0 = \int_1^2 (x-1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2$$

$$a_0 = \underbrace{\frac{4}{2} - 2}_{0} - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 1/2$$

$\boxed{a_0 = 1/2}$ $\boxed{a_1 = -\frac{4}{\pi^2}}$ $\boxed{a_2 = \frac{8}{2^2\pi^2}}$ $\boxed{a_3 = \frac{-4}{3^2\pi^2}}$ $\boxed{a_4 = 0}$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\right\}}$$

Série de Fourier em Cossenos.

b) Extensão Periódica Ímpar de

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , & 0 < x < 1 \\ x-1 \quad , & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x = 2 \\ x-1 \quad , & 1 \leq x < 2 \\ 0 & -1 \leq x < 1 \\ x+1 & -2 < x < -1 \\ 0 & x = -2 \end{cases}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad e \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

Como $L = 2$

$$b_n = \int_1^2 (x-1)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx = \underbrace{\int_1^2 x \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx}_{\text{Por Partes.}} - \int_1^2 \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$\int_1^2 u\,dv = uv\Big|_1^2 - \int_1^2 v\,du$$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx \qquad v = -\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)$

$$\int_1^2 x\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx = -\frac{2}{n\pi}x\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_1^2 + \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[2\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_1^2$$

$$\int_1^2 x\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx = -\frac{2}{n\pi}\left[2(-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\overset{0}{\operatorname{sen}(n\pi)} - \boxed{\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$\int_1^2 \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)dx = -\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_1^2 = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$b_n = \frac{-2}{n\pi}\left[2\cdot(-1)^n - \cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\right] + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[-\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - \cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\right]$$ (17)

$$\boxed{b_n = \frac{-2}{n\pi}\left[(-1)^n\right] - \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

$$b_1 = +\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2} \qquad \boxed{b_1 = -\frac{2}{\pi^2}}$$

$$\boxed{b_2 = -\frac{1}{\pi}} \qquad \boxed{b_3 = \frac{2}{3\pi} + \frac{4}{9\pi^2}} \qquad \boxed{b_4 = -\frac{1}{2\pi}}$$

$$\boxed{g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{-2(-1)^n}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}x\right)\right\}}$$

Série de Fourier em Senos

- O tipo de Extensão periódica que será usada depende do problema proposto.