Método de Frobenius para a resolução de eq. dif. em torno de um ponto SINGULAR REGULAR.

①

Teorema de Frobenius

Se $x=x_0$ for um ponto singular regular da eq. dif.

$$A(x)y''(x)+B(x)y'(x)+C(x)y(x)=0$$

$$\Downarrow \text{ então}$$

existirá pelo menos uma solução da forma

$$y(x)=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^{n+r}$$

onde o número r é uma constante a ser determinada. A série convergirá pelo menos em algum intervalo $0<x-x_0<R$.

- O teorema não assegura que possam ser encontradas duas soluções, apenas <u>uma</u>.
- Além dos coeficientes (C_n) da série temos que determinar o índice r.
- Assumindo $x_0=0$, o termo "extra" x^r coincide com a proposta de solução da eq. dif. de CAUCHY-EULER

Ex. Duas soluções em série para a eq. dif.

$$\boxed{3x}y''(x) + y'(x) - y\cancel{(x)}=0.$$

$A(x) = 3X$ e $X=0$ é um ponto singular REGULAR

Forma Padrão da Eq. Dif. →
$$y''(x) + \frac{1}{3x^1}y'(x) - \frac{1}{3x^1}y(x) = 0$$

potência não passa de 1

potência não passa de 2

Usando o Teorema de Frobenius vamos propor que exista uma solução do tipo

$$y(x) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

Colocando y, y' e y'' em $3xy''+y'-y=0$

$$3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

$$3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)(n+r-1)c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n}\right] = 0$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left[3(n+r)(n+r-1) + (n+r) \right] c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] = 0$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2) c_n \overset{\#}{x}^{\textcircled{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overset{\#}{x}^{\textcircled{n}} \right] = 0$$

$$\cancel{x^r \Big[\sum_{k=0}}$$

$$x^r \left[r(3r-2) c_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2) c_n x^{\overset{k}{\textcircled{n-1}}} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\overset{k}{\textcircled{n}}} \right] =$$

$$x^r \left[r(3r-2) x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r+1)(3(k+1)+3r-2) c_{k+1} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right] =$$

$$x^r \left[r(3r-2) x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+r+1)(3k+3r+1) c_{k+1} - c_k \right] x^k \right] = 0$$

↑ igualdad de polinômio

$$\boxed{r(3r-2) = 0} \leftarrow \text{Eq. Indicial}$$

$$(k+r+1)(3k+3r+1) c_{k+1} = c_k$$

$$\boxed{c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)}} \leftarrow \text{Eq. de Recorrência}$$

$k = 0, 1, \ldots$

→ $r_1 = 0$ e $3r - 2 = 0$ logo $r_2 = \frac{2}{3}$

r_1 e r_2 são chamadas de RAIZES INDICIAIS

- Colocando $r_1=0$ na eq. de recorrência

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(k+1)(3k+1)} \qquad k=0,1,2,\dots$$

$$k=0 \rightarrow C_1 = \frac{C_0}{1\cdot 1} = \frac{C_0}{1!\cdot 1}$$

$$k=1 \rightarrow C_2 = \frac{C_1}{2\cdot 4} = \frac{C_0}{2\cdot 4} = \frac{C_0}{2!\cdot 1\cdot 4}$$

$$k=2 \rightarrow C_3 = \frac{C_2}{3\cdot 7} = \frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7} = \frac{C_0}{3!\cdot 1\cdot 4\cdot 7}$$

$$k=3 \rightarrow C_4 = \frac{C_3}{4\cdot 10} = \frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot 7\cdot 10} = \frac{C_0}{n!\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdots}$$

$$\vdots$$

$$C_n = \frac{C_0}{n!\ \underbrace{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}_{\text{Produto que começa em 1 e termina em (3n-2).}}}$$

$$y_1(x) = x^0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n!\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}\,x^n\right]\right]$$

Primeira solução da eq. homogênea.

- Colocando $r_2 = 2/3$ na eq. de recorrência

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(3k+5)(k+1)} \qquad k=0,1,2,\dots$$

$$k=0 \rightarrow C_1 = \frac{C_0}{5\cdot 1}$$

$$k=1 \rightarrow C_2 = \frac{C_1}{8\cdot 2} = \frac{C_0}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8} = \frac{C_0}{2!\cdot 5\cdot 8}$$

$$k=2 \rightarrow C_3 = \frac{C_2}{11\cdot 3} = \frac{C_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 8\cdot 11} = \frac{C_0}{3!\cdot 5\cdot 8\cdot 11}$$

$$k=3 \longrightarrow \quad C_4 = \frac{C_3}{14\cdot 4} = \frac{C_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14} = \frac{C_0}{4!\,5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}$$

$$\vdots$$

$$C_n = \frac{C_0}{n!\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}$$

$$y_2(x) = x^{2/3}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n!\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}\,x^n\right]\right]$$

e

$$y_{g.h.}(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x).$$

$y_1(x)$ e $y_2(x)$ pode ser demostrado que são L.I. para todo valor de x $(x\neq 0)$ e que as séries são convergentes.

▨

Se $x=0$ for um ponto singular regular de

$$A(x)y''(x)+B(x)y'(x)+C(x)y(x)=0$$

colocamos na forma padrão

$$y''(x)+\frac{B(x)}{A(x)}y'(x)+\frac{C(x)}{A(x)}y(x)=0$$

e multiplicamos por x^2

$$x^2y''(x) + x\underbrace{\left[x\frac{B(x)}{A(x)}\right]}_{}y'(x)+\underbrace{\left[\frac{x^2C(x)}{A(x)}\right]}_{}y(x)=0$$

singular regular $\Longrightarrow$

como x pode aparecer no máximo elevado a potência 1 no denominador.

como x pode aparecer no máximo elevado a potência 2 no denominador.

(e finitas)

As duas funções entre colchetes são analíticas em $x=0$. Isto é, elas podem ser escritas como series de potências

$$x\frac{B(x)}{A(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$ [redacted]

e

$$x^2\frac{C(x)}{A(x)} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$ [redacted]

Tomando como aproximação somente o primeiro termo

$$x\frac{B(x)}{A(x)} \approx a_0 \quad e \quad \frac{x^2 C(x)}{A(x)} \approx b_0$$

a eq dif. se transforma em uma eq. dif. de CAUCHY-EULER

$$x^2 y''(x) + x a_0 y'(x) + b_0 y(x) = 0$$

A eq. Indicial em geral somente depende dos coeficientes a_0 e b_0 da expansão de Maclaurin anterior:

$$\boxed{r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0}$$ Eq. Indicial em geral

é uma equação quadrática em r.

As raízes da eq. indicial (r_1 e r_2) são chamadas EXPOENTES NA SINGULARIDADE. Elas determinam a natureza qualitativa das soluções em uma vizinhança do ponto singular.

Três Casos

I

Se $r_1 > r_2$ e $r_1 - r_2$ não é um número natural sempre será possível encontrar duas soluções na forma:

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)\, x^n\right] ,$$

[illegible] $x > 0$

e

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)\, x^n\right] ,$$

[illegible] $x > 0$

onde a notação $a_n(r_1)$ e $a_n(r_2)$ indica que os coeficientes das séries foram determinados com os valores diferentes de r.

II

Se $r_1 > r_2$, mas $r_1 - r_2$ é um número natural não nulo existirá uma solução da forma

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)\, x^n\right]$$

mas a segunda solução deve ser da forma

$$y_2(x) = C\, y_1(x) \ln(x) + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad , b_0 \neq 0$$

e C pode ser nulo

III

Se $r_1 = r_2 = r$

$$y_1(x) = x^r\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\, x^n\right] \qquad x > 0$$

$$y_2(x) = \textcircled{1}\, y_1(x) \ln(x) + x^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \qquad x > 0$$

$C = 1$ sempre

$b_0 = 0$

Eq. de Bessel

$$\boxed{x^2} y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y = 0$$ ν - é um parâmetro

$A(x) = x^2 = 0 \implies x = 0$ é um ponto singular regular

Forma padrão $$y''(x) + \left[\frac{1}{x}\right] y'(x) + \left[\frac{x^2-\nu^2}{x^2}\right] y(x) = 0$$

máximo potência 1 — máximo potência 2

Vamos propor que exista uma solução da forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

Colocando y, y' e y'' em $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + (x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (x^2 - \nu^2) a_n x^n \right] = 0$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 a_n x^n \right] = 0$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)^2 - \nu^2\right] a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \right] = 0$$

$$x^r\left[\underbrace{(r^2-\nu^2)a_0}_{n=0}+\underbrace{[(r+1)^2-\nu^2]a_1x}_{n=1}+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+r)^2-\nu^2]a_n x^{\overset{k}{\text{\textcircled{n}}}}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{\overset{k}{\text{\textcircled{$n+2$}}}}\right]=0$$

$$x^r\left[(r^2-\nu^2)a_0+[(r+1)^2-\nu^2]a_1x+\sum_{k=2}^{\infty}[(k+r)^2-\nu^2]a_k x^k+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^k\right]=0$$

$$x^r\left[(r^2-\nu^2)a_0+[(r+1)^2-\nu^2]a_1x+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\{(k+r)^2-\nu^2\}a_k+a_{k-2}\right]x^k\right]=0$$

$x^0 \longrightarrow$ $(r^2-\nu^2)a_0=0$, como $a_0\neq0$

$r^2=\nu^2$ ← Eq. Indicial

$\boxed{r_1=+\nu}$ $\boxed{r_2=-\nu}$ ← raízes indiciais

$x^1 \longrightarrow$ $[(r+1)^2-\nu^2]a_1=0$

$x^k \longrightarrow$ $a_k=\dfrac{-a_{k-2}}{(k+r)^2-\nu^2}$ ← Eq. de Recorrênc

$k=2,3,\ldots$

Primeira Solução

$r_1=\nu \longrightarrow [(r+1)^2-\nu^2]a_1=0$

$[(\nu+1)^2-\nu^2]a_1=0$

$[\cancel{\nu^2}+2\nu+1-\cancel{\nu^2}]a_1=0$

$\boxed{(2\nu+1)a_1=0} \Longrightarrow a_1=0$

$r_1=\nu \longrightarrow a_k=\dfrac{-a_{k-2}}{(k+r)^2-\nu^2}$ $k=2,3,\ldots$

$a_k=\dfrac{-a_{k-2}}{(k+\nu)^2-\nu^2}=\dfrac{-a_{k-2}}{k^2+2k\nu+\nu^2-\nu^2}=$

$$a_k = \frac{-a_{\overset{n}{k-2}}}{k(k+2\nu)} \qquad k=2,3,\dots$$

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+2\nu+2)} \qquad n=0,1,\dots}$$

Como $a_1=0$, todos as coeficientes impares serão ZERO.
pela eq. anterior

$$a_1=a_3=a_5=\dots=a_{2n+2}=0 \qquad \forall n$$

Trocamos $n+2$ por $2s$ (todos os subíndices serão pares)

$n+2=2s \longrightarrow n=2s-2 \qquad s=1,2\dots$
esse

$$a_{2s} = \frac{-a_{2s-2}}{2s(2s-\cancel{2}+2\nu+\cancel{2})}$$

$$a_{2s} = \frac{-a_{2s-2}}{2s(2s+2\nu)} = \frac{-a_{2s-2}}{4s(s+\nu)}$$

Trocando $n=s$, $n=1,2,\dots$

$$\boxed{a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{2^2 n(n+\nu)} \quad , \ n=1,2,\dots}$$

Se $n=1 \Rightarrow a_2 = \dfrac{-a_0}{2^2\cdot 1(1+\nu)}$

Se $n=2 \Rightarrow a_4 = \dfrac{-a_2}{2^2\cdot 2(2+\nu)} = +\dfrac{a_0}{2^4\cdot 1\cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}$

Se $n=3 \Rightarrow a_6 = \dfrac{-a_4}{2^2\cdot 3\cdot(3+\nu)} = -\dfrac{a_0}{2^6\cdot 1\cdot 2\cdot 3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$

$$\vdots$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}\cdot n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)} \qquad n=1,2,\ldots$$

a_0 é um valor arbitrário, mas é uma prática habitual escolher

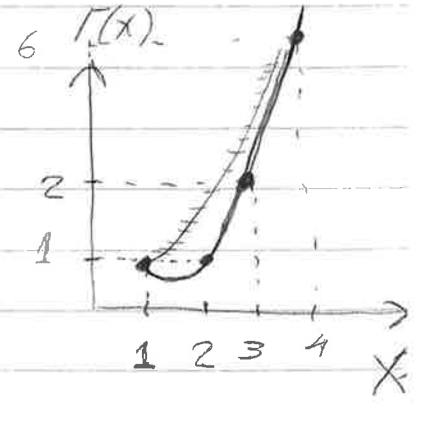
$$a_0 = \frac{1}{2^\nu\underbrace{\Gamma(1+\nu)}_{\text{FUNÇÃO GAMA}}}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$ Definida por Euler

- A integral converge se $x-1>1$ ou $x>0$
- Utilizando a fórmula de integração por partes pode ser provado que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$ → Relação de Recorrência

- Se $x=1 \Longrightarrow \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$
- Usando a relação de recorrencia



$$\Gamma(1+1) = \Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(2+1) = \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1$$
$$\Gamma(3+1) = \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2\cdot 1$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \qquad n\in\mathbb{N}$$

GAMA = Função Fatorial Generalizada

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}\, n!\, \underbrace{\underbrace{\underbrace{\Gamma(1+\nu)(1+\nu)}_{\Gamma(2+\nu)}(2+\nu)}_{\Gamma(3+\nu)}\cdots(n+\nu)}_{\Gamma(1+\nu+n)}}$$

$$\boxed{a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}\, n!\, \Gamma(1+\nu+n)}, \quad n = 0, 1, \ldots}$$

Voltando a proposta inicial

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = x^r \underset{\text{pares}}{\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}} + x^r \underset{\text{impares}}{\sum_{n=0}^{\infty} \cancelto{0}{a_{2n+1}} x^{2n+1}}$$

$$\boxed{r_1 = \nu}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n+\nu}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \right] = J_\nu(x)$$

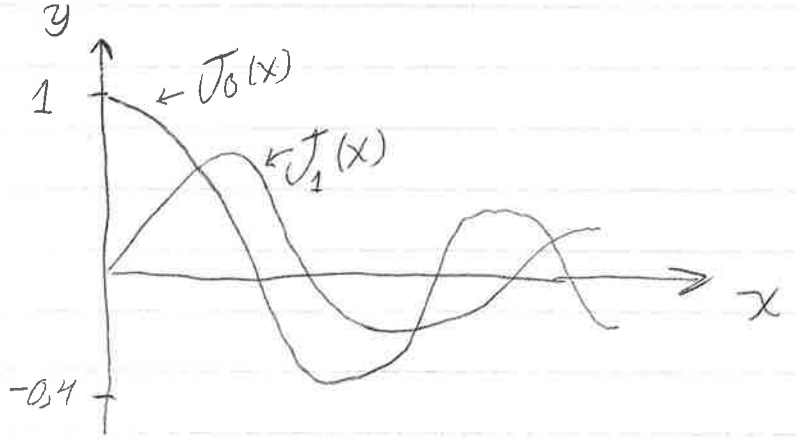
- Se $\nu \geq 0$ a série converge no intervalo $[0, \infty)$.

- Para $r_2 = -\nu$ se encontra da mesma forma que

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$$

- As funções $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ são chamadas de funções de Bessel de primeira espécie de ordem ν e $-\nu$, respectivamente.

- Dependendo do valor de ν, a função $J_{-\nu}(x)$ pode conte potências negativas de x. Por isso é convergente em $(0,\infty)$.



Se $\nu = n$ (natural)

$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x$

$J_{-1}(x) = -J_1(x)$

$J_{-2}(x) = J_2(x)$

$J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ não são L.I. para n = natural

Três Casos da Eq. de Bessel

TIPO III ($\nu=0$)

Se $\nu = 0 \implies x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0$

$r_1 = \nu = -\nu = r_2 = r = 0$ TIPO (III).

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{n!\,\Gamma(1+n)}_{(n!)^2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \qquad x >$$

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right] \qquad x \geq 0$$

A segunda solução pode ser escrita como

$$y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_n}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad x > 0$$

e $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ soma parcial n-ésima da série harmônica

Porém, é mais comum encontrar a segunda solução como uma combinação linear de $J_0(x)$ e $y_2(x)$.

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)\right]$$

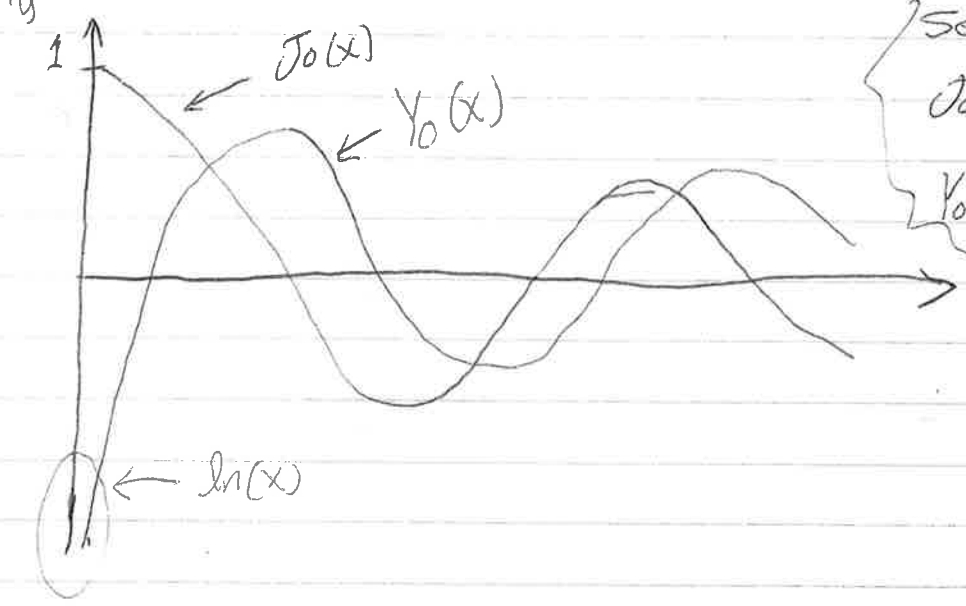
$$\gamma = \lim_{n \to \infty} (H_n - \ln n) \approx 0{,}5772$$ Constante de Euler-Mascheroni

Função de Bessel de segunda espécie de ordem zero

TIPO III ($\nu=0$)

A solução geral da eq. de Bessel de ordem zero ($\nu=0$) é

$$y_{g.h.}(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$



Se $x \to \infty$

$$J_0(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos(x - \pi/4)$$

$$Y_0(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen}(x - \pi/4)$$

Aproximação Assintótica

Se $\nu = 1/2 \Rightarrow x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 1/4)y(x) = 0$

$r_1 = 1/2$ e $r_2 = -1/2$, $r_1 - r_2 = \frac{1}{2} - (-1/2) = 1$ ← número natural

TIPO II

$$y_1(x) = J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}\right]$$

Colocando $\nu = 1/2$

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(3/2+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}$$

após várias transformações

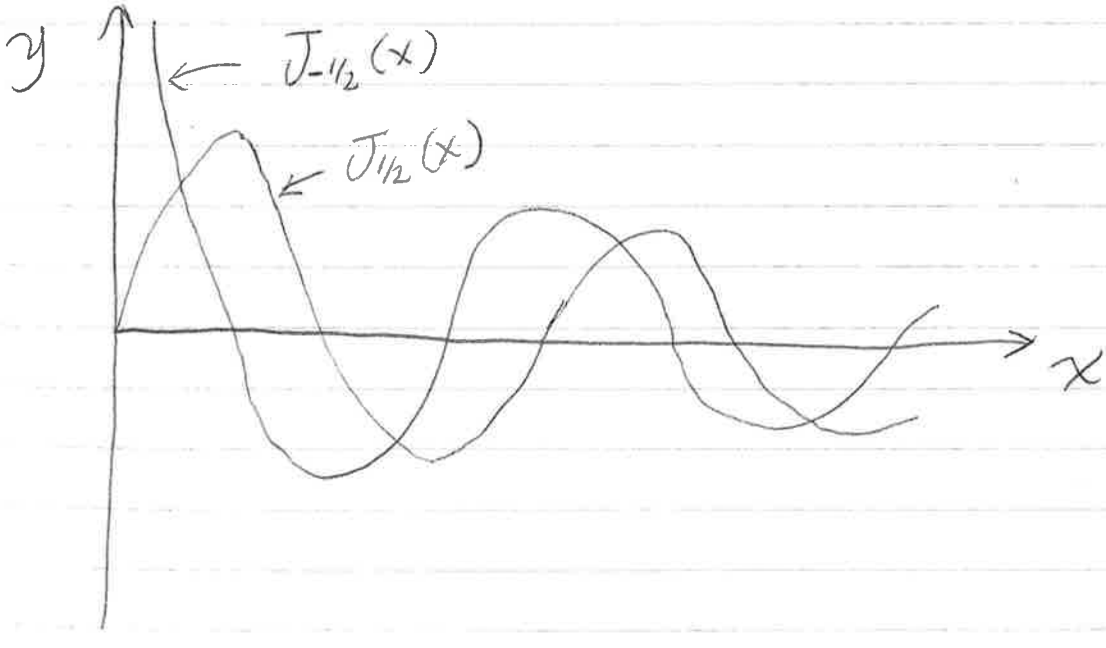
$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\operatorname{sen}(x)$$

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos(x)$$

$$y_{g.h.}(x) = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x)$$

TIPO II ($\nu = 1/2$)

SEM TERMO LOGARÍTMICO ($C = 0$)



Se $\nu = 1 \Rightarrow x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - 1) y = 0$

$r_1 = 1$ e $r_2 = -1$, $r_1 - r_2 = 2 \leftarrow$ Número natural.

TIPO (II).

Pode ser mostrado que as soluções são

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m+1)!\, m!} \right]$$

e

$$y_2(x) = -J_1(x) \ln(x) + \frac{1}{x} \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (H_m + H_{m-1})}{2^{2m}\, m! (m-1)!} x^{2m} \right] , \; x > 0$$

TIPO (II) ($\nu = 1$)

A segunda solução é escolhida, em geral, como uma combinação linear de J_1 e y_2.

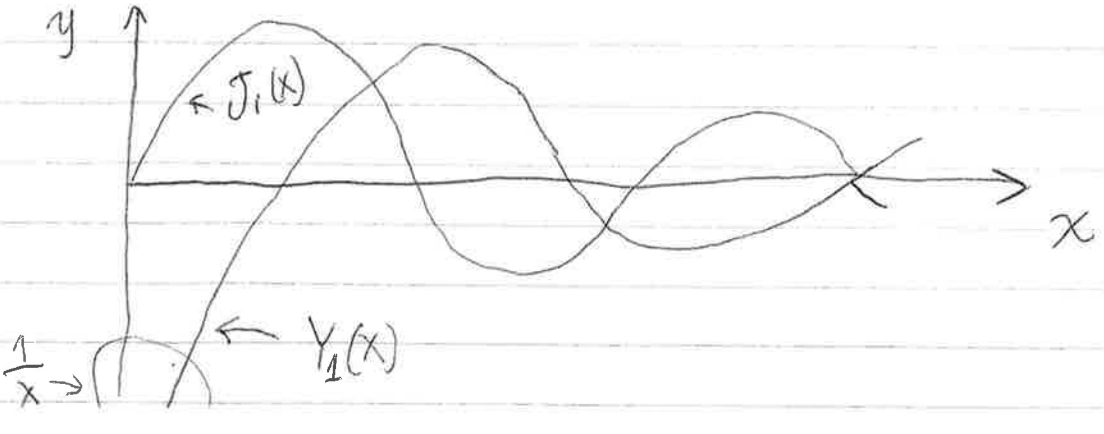
$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi} \left[-y_2(x) + (\gamma - \ln(2)) J_1(x) \right]$$

$\gamma = \lim_{n \to \infty} (H_n - \ln(n)) \approx 0{,}5772$ Constante de Euler - Máscheroni

Função de Bessel de Segunda Espécie de ordem um.

$$y_{g.h.}(x) = C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x)$$

COM TERMO LOGARÍTMICO ($\neq 0$)



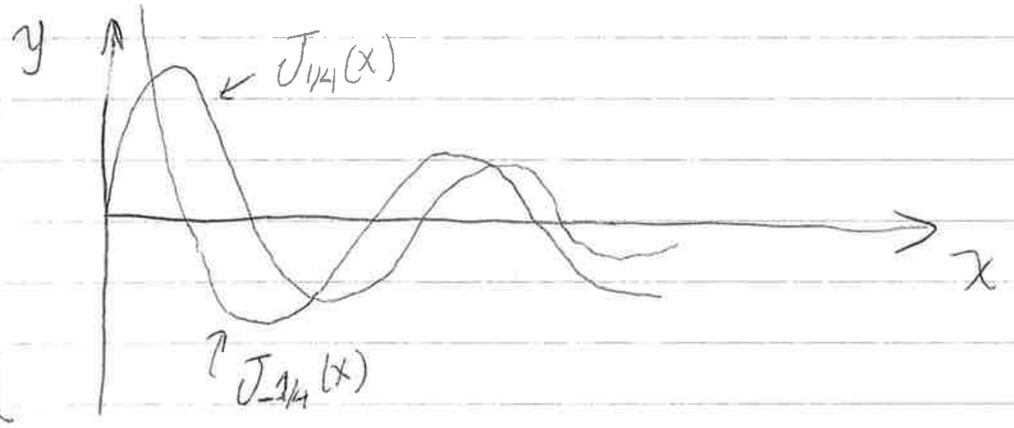
TIPO (I) $\nu = 1/4$

Se $\nu = 1/4 \Rightarrow x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \frac{1}{16}) y(x) = 0$

$r_1 = 1/4$, $r_2 = -1/4$, $r_1 - r_2 = 1/2 \rightarrow$ TIPO (I)

→ não é um número natural

$y_{g.h.}(x) = C_1 J_{1/4}(x) + C_2 J_{-1/4}(x)$, $x > 0$



Quando $x \to 0$, $J_{-1/4} \approx \frac{1}{x^4}$