Resolução de Eq. Dif. de 2ª ordem, lineares e homogêneas em torno de pontos singulares regulares

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$$

x_0 é um ponto singular se $A(x_0)=0$ — Ex: $xy''+y=0$ (singular para $x=0$)
x_0 " " " ordinário " $A(x_0)\neq 0$ — Ex: $y''+xy=0$ (ordinária para $\forall x$)

Ponto SINGULAR → REGULAR
Ponto SINGULAR → IRREGULAR

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$ Forma PADRÃO da eq. dif.

Definição: Se $x-x_0$ aparece no máximo na primeira potência no denominador de $P(x)$ e no máximo na segunda potência no denominador de $Q(x)$ então $x=x_0$ é um ponto singular REGULAR.

Ex. Classifique os pontos singulares da eq. dif.

$$\underbrace{(x^2-4)^2}_{A(x)}y'' + 3(x-2)y' + 5y = 0$$

$A(x) = 0 = (x^2-4)^2$ Pontos Singulares

$$x^2-4 = (x-2)^2(x+2)^2 = 0$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

$$y'' + \frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)^2}(x+2)^2}y' + \frac{5}{(x-2)^2(x+2)^2}y = 0$$ ← Forma PADRÃO

$$y'' + \frac{3}{(x-2)(x+2)^2}y' + \frac{5}{(x-2)^2(x+2)^2}y = 0$$

- Para que $x_1 = 2$ seja um ponto singular regular, o fator $x-2$ pode aparecer no máximo elevado a primeira potência em ~~no~~ denominador de $P(x)$ e no máximo na segunda potência no denominador de $Q(x)$

$$\Downarrow$$

$$P(x) = \frac{3}{(x-2)(x+2)^2} \qquad Q(x) = \frac{5}{(x-2)^2(x+2)^2}$$

$x_1 = 2$ é REGULAR

- Para $x_2 = -2$ checar $x-(-2) = x+2$

$x_2 = -2$ é um ponto SINGULAR IRREGULAR

Eq. de CAUCHY-EULER de 2ª ordem

mesma potência

(I) $$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad , x > 0$$

$A(x) = ax^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ é um ponto SINGULAR REGULAR

(II) $$y'' + \frac{b}{ax}y' + \frac{c}{ax^2}y = 0 \quad \text{Forma Padrão}$$

máximo potência 1 — máximo potência 2

Tentaremos uma solução da forma $y = x^m$, onde m deve ser determinado.

$$y(x) = x^m$$
$$y'(x) = m x^{m-1}$$
$$y''(x) = m(m-1)x^{m-2}$$

Substituindo y, y' e y'' em (I)

$$ax^2 m(m-1)x^{m-2} + bxmx^{m-1} + cx^m = 0$$

$$am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m = 0$$

$$x^m\left[am(m-1) + bm + c\right] = 0$$

x^m somente se anula se $x=0$, mas vamos excluir esse ponto da solução, consequentemente

$$\boxed{am(m-1) + bm + c = 0}$$

Eq. Auxiliar, quadrática em m sem derivadas

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

$\downarrow$

Três Casos.

(I) $(b-a)^2 > 4ac$ $\rightarrow$ $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $y_{g.h.}(x) = \lambda_1 x^{m_1} + \lambda_2 x^{m_2}$, λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

(II) $(b-a)^2 = 4ac$ $\rightarrow$ $m_1 = m_2 = m$, $m \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $y_{g.h.}(x) = \lambda_1 x^m + \lambda_2 x^m \ln(x)$, λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

(III) $(b-a)^2 < 4ac$ $\rightarrow$ $m_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ $\rightarrow$ $y_{g.h.}(x) = x^\alpha\left[\lambda_1 \cos(\beta \ln(x)) + \lambda_2 \operatorname{sen}(\beta \ln(x))\right]$

Ex. Raízes distintas, tipo I.

Resolva $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$

Suponha que $y(x) = x^m$

$y'(x) = m x^{m-1}$

$y''(x) = m(m-1)x^{m-2}$

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} - 2x m x^{m-1} - 4x^m = 0$$

$$m(m-1)x^m - 2m x^m - 4x^m = 0$$

$$x^m\left[m(m-1) - 2m - 4\right] = 0$$

$$m(m-1) - 2m - 4 = 0$$

$$m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \quad 5$$

$$m_1 = 4 \quad m_2 = -1$$

$$y_{g.h.}(x) = \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^{-1}$$

Tipo II: $m_1 = m_2 = m \in \mathbb{R}$

Aqui temos uma única solução $y_1(x) = x^m$ para

$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ Eq. Dif. Cauchy-Euler

$am^2 + (b-a)m + c = 0$ Eq. Característica

$$m_{1,2} = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m = -\frac{(b-a)}{2a}$$

Vamos propor que existe uma solução do tipo:

$$y_2(x) = D(x)\, y_1(x) \quad \leftarrow \text{Método de Variação dos Parâmetros}$$

$$y_2(x) = D(x)\, x^m$$

$$y_2'(x) = D'(x)\, x^m + D(x)\, m\, x^{m-1}$$

$$\cancel{y_2'(x) = x^m \left[D'(x) + \frac{m}{x} D(x) \right]}$$

$$\cancel{y_2''(x) = m x^{m-1} \left[D'(x) + \frac{m}{x} D(x) \right] + x^m \left[D''(x) \right.}$$

$$y_2''(x) = D''(x)\, x^m + m x^{m-1} D'(x) + m D'(x)\, x^{m-1} + m(m-1) D(x)\, x^{m-2}$$

Colocando $y_2(x)$, $y_2'(x)$ e $y_2''(x)$ na eq. de Cauchy-Euler

$$a x^2 \left[D''(x)\, x^m + m x^{m-1} D'(x) + m D'(x)\, x^{m-1} + m(m-1) D(x)\, x^{m-2} \right] + \ldots$$

$$\ldots + b x \left[D'(x)\, x^m + D(x)\, m\, x^{m-1} \right] + c \left[D(x)\, x^m \right] = 0$$

$$a x^2 m(m-1) D(x)\, x^{m-2} + b x\, D(x)\, m\, x^{m-1} + c\, D(x)\, x^m + \ldots$$

$$a x^2 \left[D''(x)\, x^m + 2 m x^{m-1} D'(x) \right] + b x \left[D'(x)\, x^m \right] = 0$$

$$D(x)\, x^m \left[\underbrace{a m(m-1) + b m + c}_{0} \right] + \ldots$$

$$\ldots\ a D''(x)\, x^{m+2} + 2 a m\, x^{m+1} D'(x) + b D'(x)\, x^{m+1} = 0$$

$$D'(x) \left[2 a m\, x^{m+1} + b x^{m+1} \right] = - a D''(x)\, x^{m+2}$$

$$D'(x) \left[2 a m + b \right] = - a D''(x)\, x$$

mas $m = -\dfrac{(b-a)}{2a}$

$$D'(x)\left[\cancel{2a}\,\frac{a-b}{\cancel{2a}}+b\right] = -a\,D''(x)\,x$$

$$\cancel{a}\,D'(x) = -\cancel{a}\,D''(x)\,x$$

$$D'(x) = -x\,D''(x)$$

$$z(x) = D'(x)$$
$$z'(x) = D''(x)$$

$$z(x) = -x\,z'(x).$$

$$z(x) = -x\,\frac{dz}{dx}$$

$$\cancel{\frac{z}{dz} = -\frac{x}{dx}}$$

$$\cancel{\int\frac{z}{dz} = \int\frac{x}{dx}}$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dz}{z}$$

$$c - \ln|x| = \ln|z|$$

tomando $c=0$ (procuramos uma solução)

$$-\ln|x| = \ln|z|$$

$$\ln|x|^{-1} = \ln|z|$$

$$z(x) = \frac{1}{x}$$

$$D'(x) = \frac{1}{x} = \frac{dD(x)}{dx}$$

$$\frac{dx}{x} = dD(x)$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int dD(x)$$

$$D(x) = \ln(x) \qquad x>0$$

Consequentemente $y_2(x) = \ln(x) \cdot x^m$

$$y_{g.h}(x) = \lambda_1 x^m + \lambda_2 x^m \ln(x) \qquad \text{TIPO II}$$

Ex: Raizes Repetidas

Resolva $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$.

Proponho $\begin{cases} y(x) = x^m \\ y'(x) = m x^{m-1} \\ y''(x) = m(m-1)x^{m-2} \end{cases}$

$$4x^2 m(m-1)x^{m-2} + 8x m x^{m-1} + x^m = 0$$

$$x^m\left[4m(m-1) + 8m + 1\right] = 0$$

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8}$$

$$m_1 = m_2 = -1/2 = m$$

$$y_{g.h.}(x) = \lambda_1 x^{-1/2} + \lambda_2 x^{-1/2} \ln(x)$$

Tipo III: Raizes Complexas Conjugadas

$m_{1,2} = \alpha \pm i\beta \qquad y(x) = x^m$

$$y_{g.h}(x) = \lambda_1 x^{\alpha + i\beta} + \lambda_2 x^{\alpha - i\beta}$$

$$y_{g.h}(x) = x^{\alpha}\left[\lambda_1 x^{i\beta} + \lambda_2 x^{-i\beta}\right]$$

8

$$a^b = [e^{\ln a}]^b = e^{b.\ln a} \quad \text{Identidade}$$

$$x^{i\beta} = [e^{\ln(x)}]^{i\beta} = e^{i\beta \ln(x)}$$

$$x^{-i\beta} = [e^{\ln(x)}]^{-i\beta} = e^{-i\beta \ln(x)}$$

$$y_{g.h.}(x) = x^{\alpha}\left[\lambda_1 e^{\overset{\theta}{i\beta \ln(x)}} + \lambda_2 e^{\overset{\theta}{-i\beta \ln(x)}}\right]$$

Fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta).$$

$$y_{g.h.}(x) = x^{\alpha}\Big[\lambda_1\{\cos[\beta\ln(x)] + i\,\text{sen}[\beta\ln(x)]\} +$$
$$+ \lambda_2\{\underbrace{\cos[-\beta\ln(x)]}_{\text{par}} + i\,\underbrace{\text{sen}[-\beta\ln(x)]}_{\text{impar}}\}\Big]$$

$$y_{g.h.}(x) = x^{\alpha}\Big[\lambda_1\{\cos[\beta\ln(x)] + i\,\text{sen}[\beta\ln(x)]\} +$$
$$+ \lambda_2\{\cos[\beta\ln(x)] - i\,\text{sen}[\beta\ln(x)]\}\Big]$$

$$y_{g.h.}(x) = x^{\alpha}\Big[\underbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}_{\gamma_1}\cos[\beta\ln(x)] + \underbrace{(+i(\lambda_1-\lambda_2))}_{\gamma_2}\text{sen}[\beta\ln(x)]\Big]$$

$$y_{g.h.}(x) = x^{\alpha}\Big[\gamma_1\cos[\beta\ln(x)] + \gamma_2\,\text{sen}[\beta\ln(x)]\Big]$$

Ex. Resolva $4x^2y'' + 17y = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$.

É um problema de valor inicial.

$4x^2y'' + 17y = 0$ Eq. Cauchy-Euler

$y(x) = x^m$
$y'(x) = m x^{m-1}$
$y''(x) = m(m-1)x^{m-2}$

$4x^2 m(m-1)x^{m-2} + 17x^m = 0$

$x^m\left[4m(m-1) + 17\right] = 0$

$4m^2 - 4m + 17 = 0$

$m_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16 \cdot 17}}{8} = \dfrac{4 \pm 4\sqrt{-16}}{8}$

$m_{1,2} = \dfrac{4 \pm 16i}{8}$

$m_{1,2} = \frac{1}{2} \pm 2i$

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = 2$

$$\boxed{y_{g.h.}(x) = x^{1/2}\left[\lambda_1 \cos(2\ln(x)) + \lambda_2 \operatorname{sen}(2\ln(x))\right]}$$

Usando a primeira restrição: $y(1) = -1$.

$$y(1) = 1^{1/2}\left[\underbrace{\lambda_1 \cos(2\underbrace{\ln(1)}_{0})}_{1} + \underbrace{\lambda_2 \operatorname{sen}(2\underbrace{\ln(1)}_{0})}_{0}\right] = -1$$

$$\boxed{\lambda_1 = -1}$$

Para usar a segunda restrição temos que derivar

$$y'_{g.h.}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}\left[\lambda_1 \cos(2\ln(x)) + \lambda_2 \operatorname{sen}(2\ln(x))\right] +$$

$$+ x^{1/2}\left[-\lambda_1 \operatorname{sen}(2\ln(x)) \cdot \frac{2}{x} + \lambda_2 \cos(2\ln(x))\frac{2}{x}\right]$$

$$y'(1) = \frac{1}{2}1^{-1/2}\left[\lambda_1 \underbrace{\cos(2\ln(1))}_{1} + \lambda_2 \underbrace{\operatorname{sen}(2\ln(1))}_{0}\right] + 1^{1/2}\left[-\lambda_1 \cdot 0 + \frac{2\lambda_2}{1} \cdot 1\right]$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left[\underbrace{\lambda_1}_{-1}\right] + 2\lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} + 2\lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2\lambda_2 = 0$$

$$\boxed{\lambda_2 = 0}$$

$$\boxed{y(x) = -x^{1/2}\cos(2\ln(x))}$$ Solução do Problema de Condição Inicial