

1) Esboce o gráfico da curva $\vec{r}(t) = \langle \sin(t), t, \cos(t) \rangle$.

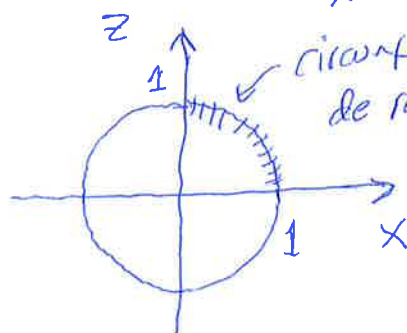
Solução:

$$C \begin{cases} x = \sin(t) \\ y = t \\ z = \cos(t) \end{cases}$$

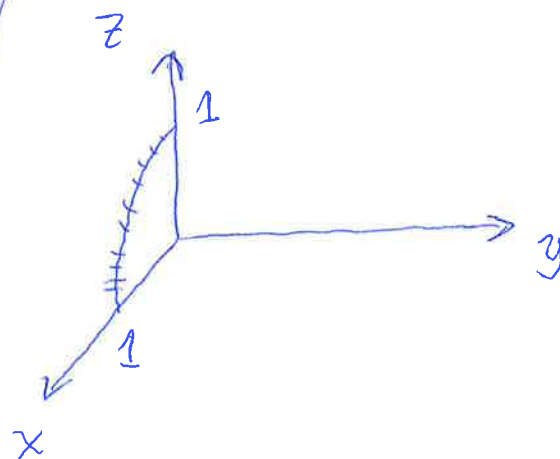
Usando a 1ª e 3ª linha

$$x^2 + z^2 = 1$$

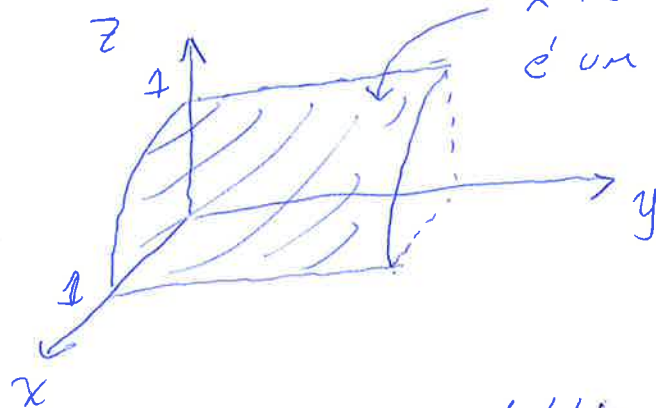
Ponto de vista 2D



$x^2 + z^2 = 1$ é uma circunferência de raio 1.



Ponto de vista 3D



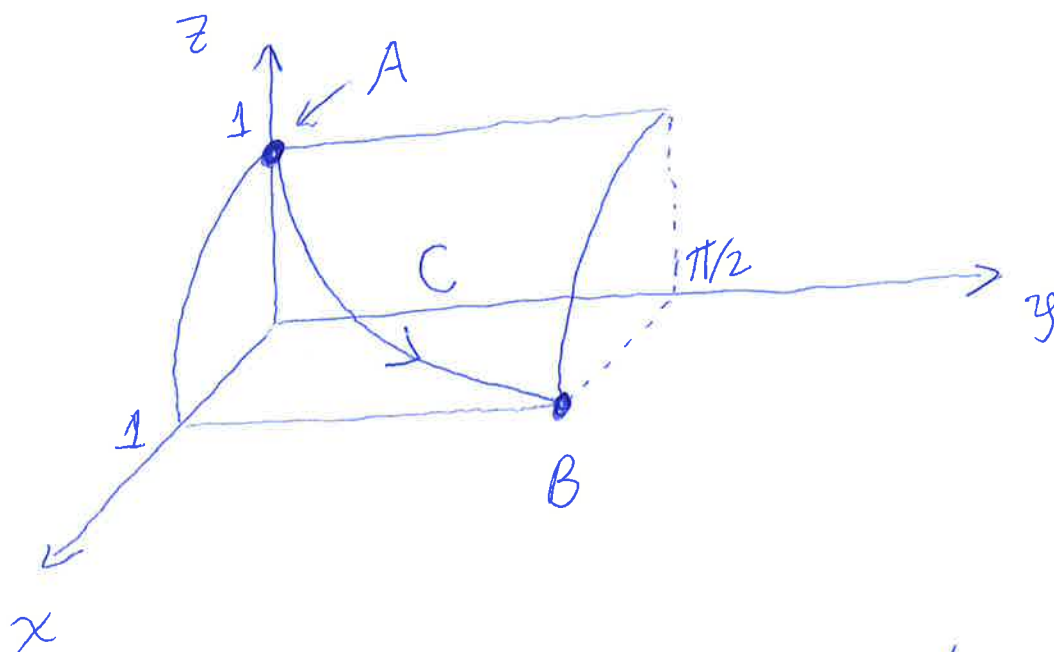
$x^2 + z^2 = 1$ é um cilindro

A curva C é uma hélice circular e "mora" na superfície de esse cilindro.

Para esboçar a curva construímos uma tabela com no mínimo dois pontos:

t	$x(t)$	$y(t)$	$z(t)$	Ponto
0	0	0	1	A
$\pi/2$	1	$\pi/2$	0	B

(2)



2) Determine os vetores tangente e normal unitários $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$ da curva $\vec{r}(t) = \langle 6t, 3\sqrt{2}t^2, 2t^3 \rangle$.

Solução: $\vec{T}(t) = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} \vec{r}'(t)$ e $\vec{N}(t) = \frac{1}{|\vec{T}'(t)|} \vec{T}'(t)$

$$\vec{r}(t) = \langle 6t, 3\sqrt{2}t^2, 2t^3 \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 6, 6\sqrt{2}t, 6t^2 \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = 6 \langle 1, \sqrt{2}t, t^2 \rangle$$

$$|\vec{r}'(t)| = 6 \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} = 6 \sqrt{(1+t^2)^2}$$

$$|\vec{r}'(t)| = 6(1+t^2)$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{6(1+t^2)} \langle 1, \sqrt{2}t, t^2 \rangle$$

(3)

$$\vec{T}(t) = \underbrace{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}_{f(t)} \underbrace{\langle 1, \sqrt{2}t, t^2 \rangle}_{\vec{v}(t)}$$

$$\frac{d}{dt} [f(t) \vec{v}(t)] = f'(t) \vec{v}(t) + f(t) \vec{v}'(t)$$

Derivada do produto de uma função escalar por uma função vetorial

$$\vec{T}'(t) = \frac{(-1)2t}{(1+t^2)^2} \langle 1, \sqrt{2}t, t^2 \rangle + \frac{1}{1+t^2} \langle 0, \sqrt{2}, 2t \rangle$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{1+t^2} \left[-\frac{2t}{1+t^2} \langle 1, \sqrt{2}t, t^2 \rangle + \langle 0, \sqrt{2}, 2t \rangle \right]$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{1+t^2} \left[\left\langle -\frac{2t}{1+t^2}, -\frac{2\sqrt{2}t^2}{1+t^2}, -\frac{2t^3}{1+t^2} \right\rangle + \langle 0, \sqrt{2}, 2t \rangle \right]$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{1+t^2} \left\langle -\frac{2t}{1+t^2}, -\frac{2\sqrt{2}t^2}{1+t^2} + \sqrt{2}, -\frac{2t^3}{1+t^2} + 2t \right\rangle$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{1+t^2} \left\langle -\frac{2t}{1+t^2}, \frac{-2\sqrt{2}t^2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}t^2}{1+t^2}, \frac{-2t^3 + 2t + 2t^3}{1+t^2} \right\rangle$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2} \langle -2t, \sqrt{2}(1-t^2), 2t \rangle$$

$$|\vec{T}'(t)| = \left| \frac{1}{(1+t^2)^2} \right| \sqrt{(-2t)^2 + 2(1-t^2)^2 + (2t)^2}$$

$$|\vec{T}'(t)| = \frac{1}{(1+t^2)^2} \sqrt{8t^2 + 2 + 2t^4 - 4t^2}$$

$$|\vec{T}'(t)| = \frac{1}{(1+t^2)^2} \sqrt{2t^4 + 4t^2 + 2}$$

$$|\vec{f}(t)| = \frac{1}{(1+t^2)^2} \sqrt{2(t^4+2t^2+1)}$$

$$|\vec{f}'(t)| = \frac{1}{(1+t^2)^2} \sqrt{2} \sqrt{(t^2+1)^2} = \frac{\sqrt{2}(t^2+1)}{(t^2+1)^2}$$

$$|\vec{f}'(t)| = \frac{\sqrt{2}}{t^2+1}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{t^2+1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} \langle \frac{-2t}{\cancel{1+t^2}}, \sqrt{2}(1-t^2), 2t \rangle$$

$$\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} \langle -2t, \sqrt{2}(1-t^2), 2t \rangle$$

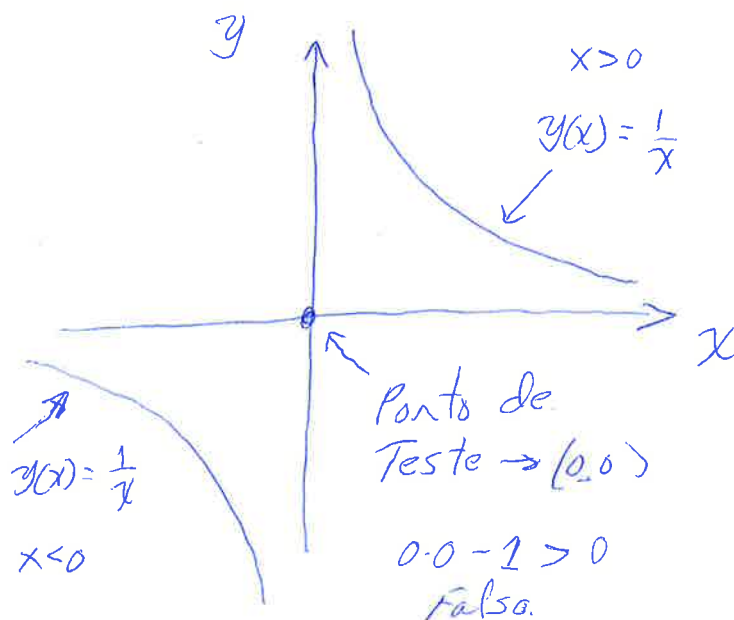
3) Determine e esboce o domínio da função $f(x,y) = \ln(xy-1)$.

Solução: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy-1 > 0\}$

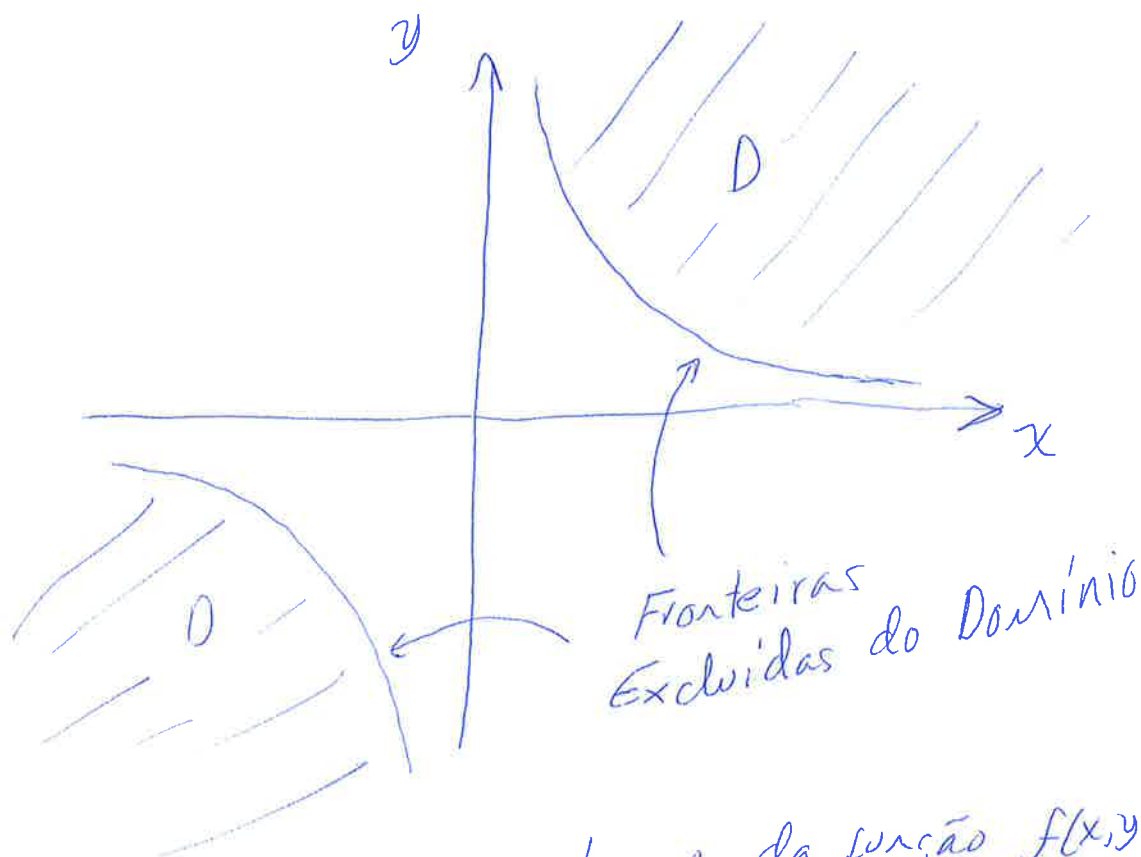
$$xy-1=0$$

$$xy=1$$

$$y(x) = \frac{1}{x}$$



... Continua



4) Faça o mapa de contorno da função $f(x,y) = \frac{x}{y}$ mostrando no mínimo três curvas de nível.

Resposta: Curvas de Nível $\rightarrow f(x,y) = c = c$

Como $f(x,y) = \frac{x}{y}$
 $y \neq 0$

$\frac{x}{y} = c$

$y(x) = \frac{1}{c} x$

São retas que passam por $(0,0)$.

Se $c=1$

$y_1(x) = x$, passa por $(1,1)$

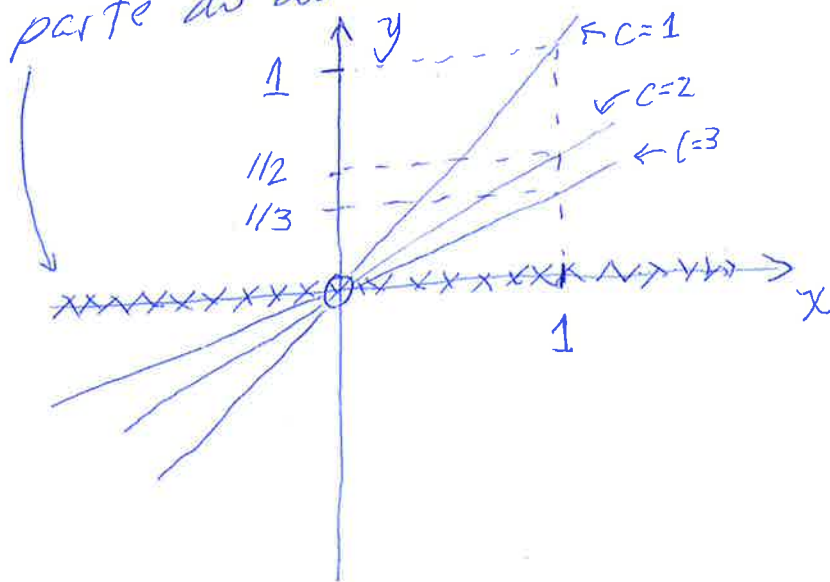
Se $c=2$

$y_2(x) = \frac{1}{2} x$, passa por $(1, 1/2)$

Se $c=3$

$y_3(x) = \frac{1}{3} x$, passa por $(1, 1/3)$

A reta $y=0$ não faz parte do domínio de $f(x,y)$

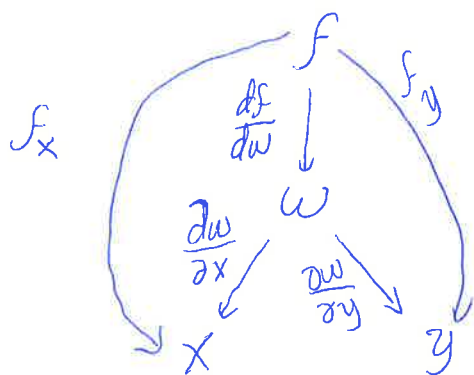


5) Determine a derivada parcial f_{xxy} se (6)

$$f(x, y) = e^{xy^2}$$

Resposta: $w(x, y) = xy^2$

$$f(w) = e^w$$



$$f_x = \left(\frac{df}{dw} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right) \quad \text{Regra da Cadeia}$$

$$f_y = \left(\frac{df}{dw} \right) \left(\frac{dw}{dy} \right)$$

A notação f_{xxy} significa: $\{[(f)_x]_x\}_y$

$$f_x(x, y) = \left(\frac{df}{dw} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right) = e^w y^2$$

$$f_x(x, y) = e^{xy^2} \cdot y^2$$

$$f_{xx} = (f_x)_x$$

$$f_{xx}(x, y) = y^2 [e^{xy^2} \cdot y^2]$$

$$f_{xx}(x, y) = y^4 e^{xy^2}$$

$$f_{xxy} = (f_{xx})_y$$

Usando a regra do produto para derivar

(7)

$$f_{xxy} = 4y^3 e^{xy^2} + y^4 e^{xy^2} \cdot 2xy$$

$$f_{xxy}(x,y) = 2y^3 e^{xy^2} [2 + xy^2]$$