

1) Esboce o gráfico da curva $\vec{r}(t) = \langle t, \sin(t), \cos(t) \rangle$.

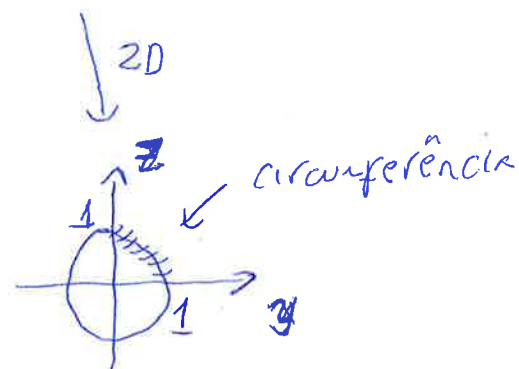
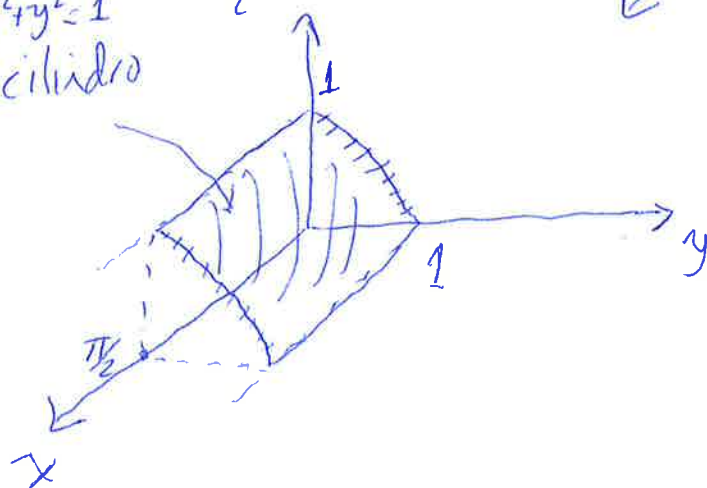
Sol.:

$$C = \begin{cases} x = t \\ y = \sin(t) \\ z = \cos(t) \end{cases} \rightarrow$$

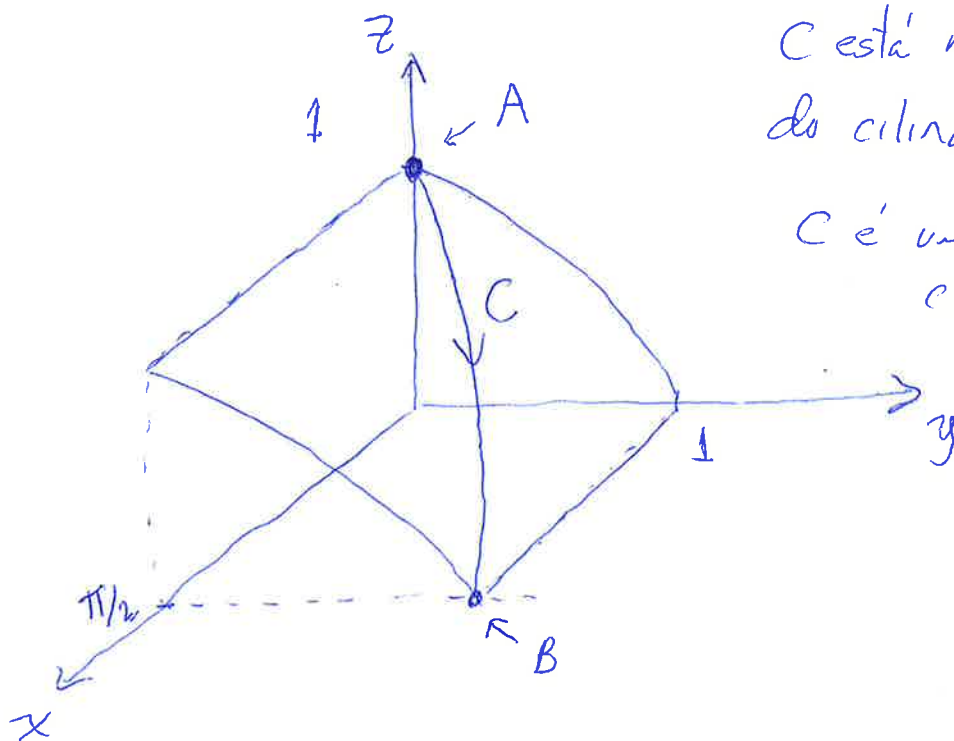
$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

$$z^2 + y^2 = 1$$

superfície
 $z^2 + y^2 = 1$
cilindro



t	x	y	z	Ponto
0	0	0	1	A
$\pi/2$	$\pi/2$	1	0	B



C está na superfície
do cilindro $z^2 + y^2 = 1$.

C é uma hélice
circular.

2) Determine os vetores tangente e normal unitários $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$ da curva

$$\vec{r}(t) = \langle 2t^3, 3\sqrt{2}t^2, 6t \rangle.$$

Sol.: $\vec{T}(t) = \left(\frac{1}{|\vec{r}'(t)|} \right) \cdot \vec{r}'(t)$ e $\vec{N}(t) = \left(\frac{1}{|\vec{T}'(t)|} \right) \cdot \vec{T}'(t)$

$$\vec{r}(t) = \langle 2t^3, 3\sqrt{2}t^2, 6t \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 6t^2, 6\sqrt{2}t, 6 \rangle = 6 \langle t^2, \sqrt{2}t, 1 \rangle = \vec{r}'(t)$$

$$|\vec{r}'(t)| = |6| |\langle t^2, \sqrt{2}t, 1 \rangle|$$

$$|\vec{r}'(t)| = 6 \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}$$

$$= 6 \sqrt{(t^2 + 1)^2}$$

como $t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$|\vec{r}'(t)| = 6(t^2 + 1)$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{6(t^2 + 1)} \langle t^2, \sqrt{2}t, 1 \rangle$$

$$\vec{T}(t) = \left(\frac{1}{t^2 + 1} \right) \langle t^2, \sqrt{2}t, 1 \rangle$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{-1 \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} \langle t^2, \sqrt{2}t, 1 \rangle + \frac{1}{(t^2 + 1)^2} \langle 2t, \sqrt{2}, 0 \rangle$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \left[\frac{-2t}{t^2 + 1} \langle t^2, \sqrt{2}t, 1 \rangle + \langle 2t, \sqrt{2}, 0 \rangle \right]$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{t^2+1} \left[\left\langle \frac{-2t^3}{t^2+1}, \frac{-2\sqrt{2}t^2}{t^2+1}, \frac{-2t}{t^2+1} \right\rangle + \langle 2t, \sqrt{2}, 0 \rangle \right] \quad (3)$$

$$= \frac{1}{t^2+1} \left\langle \frac{-2t^3}{t^2+1} + 2t, \frac{-2\sqrt{2}t^2}{t^2+1} + \sqrt{2}, \frac{-2t}{t^2+1} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{(t^2+1)^2} \langle -2t^3 + 2t(t^2+1), -2\sqrt{2}t^2 + \sqrt{2}(t^2+1), -2t \rangle$$

$$\boxed{\vec{T}'(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2} \langle 2t, \sqrt{2}(1-t^2), -2t \rangle}$$

$$|\vec{T}'(t)| = \frac{1}{(t^2+1)^2} \sqrt{4t^2 + 2(1-t^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(t^2+1)^2} \sqrt{4t^2 + 2 - 4t^2 + 2t^4 + 4t^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(t^2+1)^2} \sqrt{t^4 + 1 + t^2} = \frac{\sqrt{2}}{(t^2+1)^2} \sqrt{(t^2+1)^2}, \text{ mas } t^2+1 > 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(t^2+1)^2} (t^2+1)^2$$

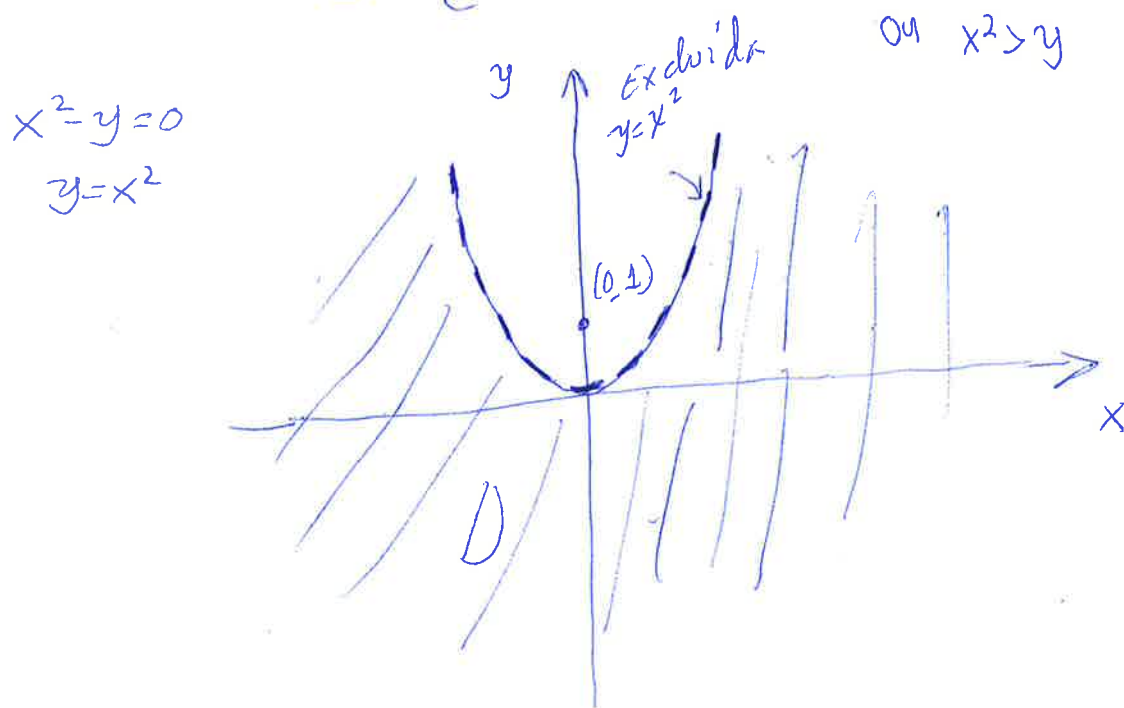
$$\boxed{|\vec{T}'(t)| = \frac{\sqrt{2}}{t^2+1}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{t^2+1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(t^2+1)^2} \langle 2t, \sqrt{2}(1-t^2), -2t \rangle$$

$$\boxed{\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}(t^2+1)} \langle 2t, \sqrt{2}(1-t^2), -2t \rangle}$$

3) Determine e esboce o domínio da função $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$. (4)

Sol.: $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y > 0 \}$



Ponto de Teste : $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

$$x_0^2 - y_0 \stackrel{?}{>} 0$$

$$0^2 - 1 = -1 > 0 \quad \text{ABSURDO}$$

Logo, o domínio são os pontos abaixo da parábola.
A fronteira (a parábola) não faz parte do domínio

4) Determine a derivada parcial (5)
 f_{xyxy} se $f(x,y) = e^{yx^2}$.

Sol.: A leitura usando a notação f_{xyxy} deve ser de esquerda para direita ($\rightarrow$)

$$f_x(x,y) = e^{yx^2} \cdot 2xy = 2xy e^{yx^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x \left[e^{yx^2} + y e^{yx^2} \cdot x^2 \right] \\ = 2x e^{yx^2} [1 + x^2 y]$$

$$f_{xyx} = 2 \frac{\partial}{\partial x} [x e^{yx^2}] [1 + x^2 y] + 2x e^{yx^2} \cdot 2xy$$

$$= 2 \left[e^{yx^2} + \underbrace{x e^{yx^2} \cdot 2xy}_{2x^2 y e^{yx^2}} \right] [1 + x^2 y] + 4x^2 y e^{yx^2}$$

$$= 2e^{yx^2} [1 + 2x^2 y] [1 + x^2 y] + 4x^2 y e^{yx^2}$$

$$= 2e^{yx^2} \left[1 + \underbrace{x^2 y + 2x^2 y}_{3x^2 y} + 2x^4 y^2 \right] + 4x^2 y e^{yx^2}$$

$$= 2e^{yx^2} [1 + 5x^2 y + 2x^4 y^2]$$

$$f_{xyxy} = 2e^{yx^2} \cdot x^2 [1 + 5x^2 y + 2x^4 y^2] + 2e^{yx^2} [5x^2 + 4x^4 y]$$

$$= 2e^{yx^2} [6x^2 + 9x^4 y + 2x^6 y^2]$$

$$= 2x^2 e^{yx^2} [6 + 9x^2 y + 2x^4 y^2]$$

5) Determine uma equação do plano tangente à superfície $z = x^2 - y^2$ no ponto $(3, -2, 5)$. ⑥

Sol.: A equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0, z_0) é

$$(z - z_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Como $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $(x_0, y_0, z_0) = (3, -2, 5)$

$$f'_x(x, y) = 2x \rightarrow f'_x(3, -2) = 6$$

$$f'_y(x, y) = -2y \rightarrow f'_y(3, -2) = 4$$

Logo

$$(z - 5) = 6(x - 3) + 4(y + 2)$$

Eq. do Plano Tangente

$$z = 6x + 4y - 5$$