

Espalhamento Mie e a teoria do momento angular complexo.

Kauê Rodrigues Alves
N8604425

22 de junho de 2017

Universidade de São Paulo
Eletromagnetismo II - Instituto de física
For: Raul W. Abramo

Sumário

1	Introdução	3
2	Espalhamento Mie	4
3	Espalhamento clássico	8
4	Teoria do Momento Angular Complexo	10
4.1	Espalhamento semiclássico	10
4.2	Representação de Poisson	12
4.3	O arco-íris e o efeito glória	15
5	Referências	18

1 Introdução

A teoria do espalhamento de uma onda plana eletromagnética por uma esfera foi primeiramente tratada a partir dos formalismos das equações de Maxwell pelo físico alemão Gustav Mie, em seu artigo "Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen", datado de 1908. Este espalhamento é semelhante ao que acontece, por exemplo, em nossa atmosfera, quando as frentes de onda provenientes do Sol (que podem ser aproximadas como planas) são espalhadas por gotículas de água suspensas no ar. O resultado disso são fenômenos bem conhecidos chamados *arco-íris*, em que arcos luminosos aparecem no céu, e *efeito glória*, onde halos a aparecem quando o observador está posicionado entre o Sol e as gotículas de água. As características desses fenômenos, como a polarização da luz espalhada, o ângulo onde os arcos aparecem, etc. deveriam, portanto poder ser interpretadas com base na teoria do espalhamento Mie. Porém, embora seja realmente consistente, a solução a estes fenômenos dada por essa teoria apresenta séries que convergem muito lentamente e de difícil determinação numérica. Uma forma de contornar este problema é dado pela *teoria do Momento Angular Complexo*, que será apresentada neste trabalho. Sua aplicação para o estudo do fenômeno do arco-íris e do efeito glória foi objeto de estudo do professor Herch Moysés Nussenzveig, e é discutida em seu livro intitulado "Diffraction Effects in Semiclassical Scattering".



Figura 1: À esquerda, uma imagem do arco-íris, e à direita, do efeito glória.

2 Espalhamento Mie

O problema de espalhamento que desejamos resolver pode ser formulado da seguinte maneira: uma onda eletromagnética plana, de campo elétrico \mathbf{E}_i e magnético \mathbf{H}_i , e de polarização fixa, viaja por um meio infinito sem perda de intensidade, e encontra-se com uma esfera de raio a , índice de refração N , que interage com a onda incidente e produz também um campo eletromagnético ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$), chamado de "campo espalhado", que é dado pela diferença entre o campo total (\mathbf{E}, \mathbf{H}) e o campo da onda incidente.

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_i$$

Na notação que se seguirá, Os campos (\mathbf{E}, \mathbf{H}) dentro da esfera serão denotados por ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$), e os campos fora da esfera por ($\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$). No problema tratado aqui, os campos da onda incidente são

$$\mathbf{E}_i = E_0 \exp(ikz - \omega t) \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{H}_i = H_0 \exp(ikz - \omega t) \mathbf{e}_y$$

onde k é o vetor de onda. (Obs: O termo $e^{i\omega t}$ será omitido, pois será assumido que todos os campos também tenham essa dependência temporal.)

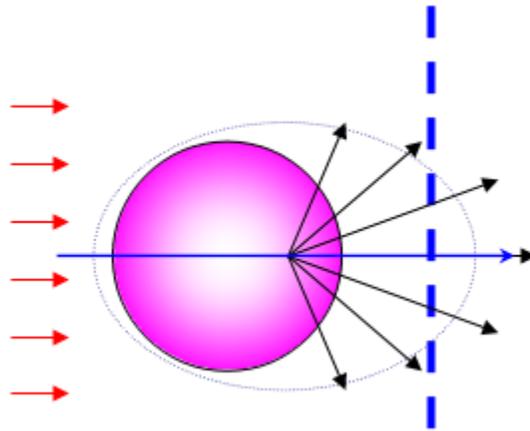


Figura 2: Ilustração do problema de espalhamento tratado. As setas em vermelho correspondem à direção de propagação da onda incidente e as em preto, às direções de propagação da onda espalhada.

O procedimento utilizado por Gustav Mie para resolver este problema de espalhamento é trabalhoso, porém direto. Basta encontrar os campos ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$) e ($\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$) que satisfazem as equações de Maxwell (e consequentemente a equação de onda):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (6)$$

E as condições de contorno na superfície:

$$[\mathbf{E}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_1(\mathbf{x})] \times \mathbf{n} = 0 \quad (7)$$

$$[\mathbf{H}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{H}_1(\mathbf{x})] \times \mathbf{n} = 0 \quad (8)$$

para todo \mathbf{x} pertencente à esfera, onde \mathbf{n} é a normal à esfera orientada para fora.

Antes de procurar soluções para (\mathbf{E}, \mathbf{H}) , é importante determinar primeiro como estes campos serão representados.

Como o problema tem uma certa simetria esférica (a partícula que está causando o espalhamento é esférica), vamos utilizar o sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , centrado na origem da partícula, para representar os campos. Além disso, os campos serão escritos como combinações dos *Harmônicos Esféricos Vetoriais*, que serão introduzidos a seguir.

Seja $\psi(r, \theta, \phi)$ uma função escalar. Vamos construir um vetor \mathbf{M} dado por:

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi) \quad (9)$$

Como o divergente de um rotacional é sempre zero, segue então que

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (10)$$

Além disso, utilizando as relações

$$\nabla^2 \mathbf{M} = \nabla^2 (\nabla \times (\mathbf{r}\psi)) = \nabla \times (\nabla^2 (\mathbf{r}\psi)) = \nabla \times (\mathbf{r}\nabla^2 \psi)$$

$$k^2 \mathbf{M} = k^2 \nabla \times (\mathbf{r}\psi) = \nabla \times (\mathbf{r}k^2\psi)$$

temos que

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \nabla \times [\mathbf{r}(\nabla^2 \psi + k^2 \psi)] \quad (11)$$

Ou seja, se ψ satisfaz a equação de onda escalar

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi \quad (12)$$

então \mathbf{M} satisfaz a equação de onda vetorial. Supondo que ψ seja da forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (13)$$

Podemos encontrar uma família de funções ψ que satisfazem a equação de onda, dadas por:

$$\psi_{emn} = \cos m\phi P_n^m(\cos \theta) z_n(kr) \quad (14)$$

$$\psi_{omn} = \sin m\phi P_n^m(\cos \theta) z_n(kr) \quad (15)$$

onde P_n^m são as *funções de Legendre do primeiro tipo de grau n e ordem m* , e z_n pode ser tanto uma das funções de Bessel esféricas (j_n, y_n) quanto uma das funções de Hankel esféricas ($h_n^{(1)}, h_n^{(2)}$).

Podemos agora definir os *Harmônicos Esféricos Vetoriais*:

$$\mathbf{M}_{emn} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{emn}) \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_{omn} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{omn}) \quad (17)$$

$$\mathbf{N}_{emn} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{emn}}{k} \quad (18)$$

$$\mathbf{N}_{omn} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{omn}}{k} \quad (19)$$

onde \mathbf{N} é outro vetor, definido a partir de \mathbf{M} , que também satisfaz a equação de onda.

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k} \quad (20)$$

O campos campos espalhados ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$) podem ser representados como uma soma dos esféricos harmônicos definidos acima. Após um exaustivo cálculo, encontramos que a série que os representa o campo elétrico é dada por:

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ia_n \mathbf{N}_{e1n}^{(3)} - b_n \mathbf{M}_{o1n}^{(3)}) \quad (21)$$

Onde o sobrescrito (3) indica que a função radial deles corresponde à $h_n^{(1)}(kr)$. Para $kr \gg 1$, podemos aproximar $h_n^{(1)}(kr)$ por seu comportamento assintótico

$$h_n^{(1)}(kr) \approx \frac{(-i)^n e^{ikr}}{ikr}$$

Fazendo essa substituição em (21), podemos escrever as amplitudes do campo elétrico como

$$E_\phi \approx \frac{e^{ikr}}{ikr} \sin\phi S_1(\beta, \theta) \quad (22)$$

$$E_\theta \approx \frac{-e^{ikr}}{ikr} \cos\phi S_2(\beta, \theta) \quad (23)$$

Onde $\beta = ka$ e os coeficientes S_j são dados por (H. M. Nussenzveig 1992)

$$S_j = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} [1 - S_l^{(j)}(\beta)] t_l(\cos\theta) + [1 - S_l^{(i)}(\beta)] p_l(\cos\theta) \quad (24)$$

onde

$$p_v(x) = \frac{P_{v-1}(x) - P_{v+1}(x)}{1 - x^2} \quad (25)$$

$$t_v(x) = -x p_v(x) + (2v + 1) P_v(x) \quad (26)$$

$$S_l^{(j)}(\beta) = -\frac{\zeta_l^{(2)}(\beta)}{\zeta_l^{(1)}(\beta)} \times \frac{\ln' \zeta_l^{(2)}(\beta) - N e_j \ln' \psi_l(\alpha)}{\ln' \zeta_l^{(1)}(\beta) - N e_j \ln' \psi_l(\alpha)} \quad (27)$$

Onde $\zeta_l^{(j)}$ são as funções de *Ricatti-Hankel*, e ψ_l as funções de *Ricatti-Bessel*, dadas por

$$\zeta_l^{(j)}(x) = x h_n^{(j)}(x)$$

$$\psi_l(x) = x j_l(x)$$

e $e_1 = 1$, $e_2 = N^{-2}$, $\alpha = N\beta$.

Portanto, para determinar a amplitude do campo elétrico espalhado \mathbf{E}_s , basta determinar o valor das somatórias de $S_{1,2}$. Porém, o que se observa é que conforme valor de $\beta = ka$ aumenta, as somatórias acima passam a convergir mais e mais lentamente, de forma que o cálculo das somatórias conseguem somente ser feitos por extensos programas de computador.

3 Espalhamento clássico

Para compreender melhor o motivo pelo qual as séries em (24) demoram a converger, vamos primeiro tomar algumas observações a respeito da teoria clássica de espalhamento. No espalhamento clássico, um feixe de partículas com momento linear \mathbf{p} é lançado em direção a um potencial (assumido aqui ser central) $V(r)$.

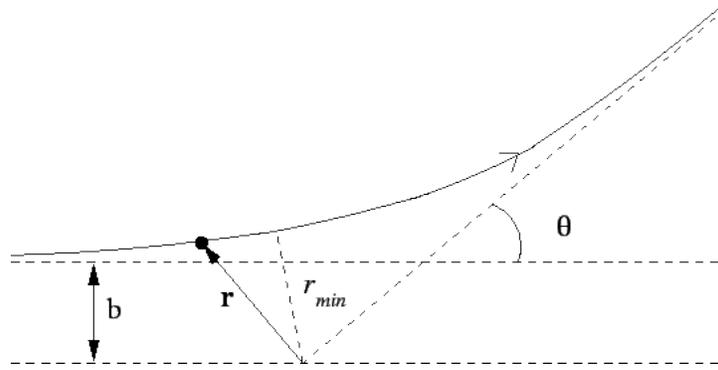


Figura 3: figura acima representa uma trajetória do problema de espalhamento clássico para um potencial repulsivo.

Neste caso o ângulo de deflexão Θ das partículas pode ser determinado a partir das quantidades conservadas:

$$L = mr^2 \dot{\phi} \quad (28)$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (29)$$

$$\theta(L) = \pi - 2L \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (30)$$

onde r_0 é a distância de mínima aproximação, $L = bp$ é o momento angular da partícula, e b é o parâmetro de impacto.

Além disso, definimos a seção de choque

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (31)$$

Dentro dos limites de validade da ótica geométrica, podemos ver o espalhamento de uma onda eletromagnética como o espalhamento dos raios de luz de parâmetro de impacto b , e o problema de espalhamento por uma esfera de raio a e índice de refração N pode ser formulado como mostra a figura 4.

Vamos supor, por simplicidade, que o raio de luz sofre somente uma reflexão interna, como na figura 4. O ângulo de refração pode ser determinado através da lei de Snell-Descartes, e o ângulo de deflexão é dado por:

$$\Theta(x) = \left(\pi - \left(4 \arcsin \left(\frac{1}{N} \right) x - 2 \arcsin(x) \right) \right) \times \frac{180}{\pi} \quad (32)$$

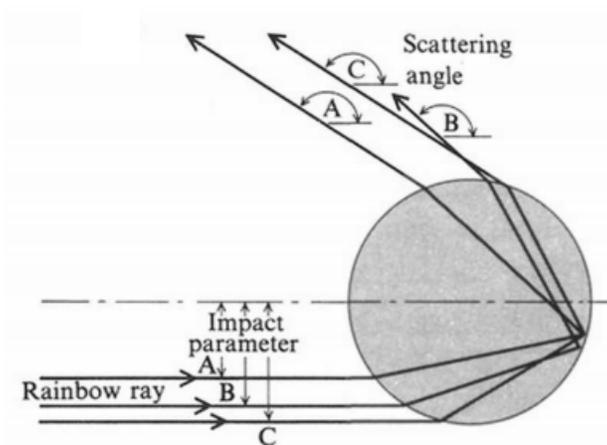


Figura 4: figura acima mostra o problema de espalhamento de luz por uma esfera de acordo com a ótica geométrica.

A figura 5 mostra o gráfico do ângulo de deflexão em função da variável $x = \frac{b}{a}$, para um índice de refração de $N = 1.343$.

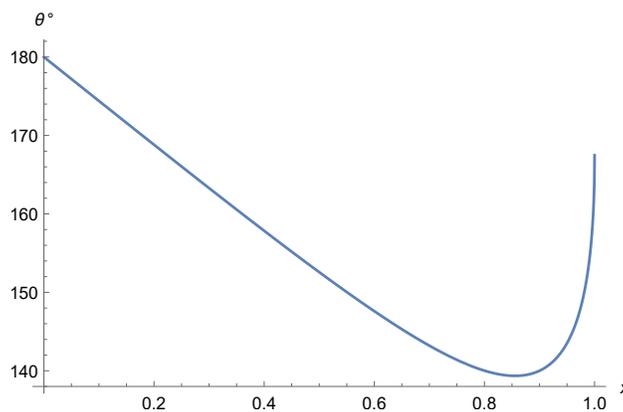


Figura 5: O gráfico acima mostra o ângulo de deflexão Θ de um espalhamento por uma esfera com índice de refração $N = 1.343$ no limite a ótica geométrica.

Pelo gráfico, podemos ver que perto de $x_0 \approx 0.86$, temos um *ponto crítico*. Isso significa que os raios de luz de parâmetro de impacto próximos de $b_0 = ax_0$ tendem a se focar na direção do ângulo de deflexão $\Theta(x_0)$. Essa interpretação é também sustentada pelo valor da seção de choque diferencial neste ponto, $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \infty$. Esse ângulo de deflexão $\Theta(x_0)$ é chamado de ângulo do arco-íris, pois como representa o ângulo onde raios de luz se acumulam, este deve ser o ângulo no qual vemos o arco do arco-íris. E de fato o é.

4 Teoria do Momento Angular Complexo

4.1 Espalhamento semiclássico

Agora, vamos considerar o espalhamento de ondas propriamente dito. Quando lidamos com partículas de dimensões muito pequenas, efeitos quânticos começam a aparecer, de forma que as partículas agora passam a ser representadas não mais por sua posição e momento, mas por suas funções de onda. Vamos agora considerar o espalhamento de ondas escalares. O objetivo é interpretar o resultado e avaliar se e como conceitos da teoria clássica de espalhamento, como trajetórias, parâmetro de impacto, desempenham algum papel na interpretação física dos resultados do espalhamento ondulatório. Vamos analisar o espalhamento quântico de partículas. Supondo que a onda incidente é uma onda plana, e admitindo que, a longas distâncias, a função de onda espalhada se comporta como

$$\psi_s \approx f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (33)$$

f , chamada de *amplitude de espalhamento*, pode ser determinada a partir da expansão em ondas parciais:

$$f(k, \theta) = (ik)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) [S_l(k) - 1] P_l(\cos\theta) \quad (34)$$

Onde S_l é chamada de função-S da l -ésima onda parcial, dada por

$$S_l(k) = e^{2i\eta_l(k)} \quad (35)$$

Na somatória de f , cada l representa uma onda parcial de momento angular $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \approx (l + \frac{1}{2})\hbar$. Nas nossas considerações semiclássicas, se assumirmos que podemos ainda escrever $L = pb = \hbar kb$. Então

$$b = \frac{l + \frac{1}{2}}{k} \quad (36)$$

Ou seja, seria equivalente a dizer que cada termo l na soma de f corresponde a um feixe vindo com um parâmetro de impacto b dado por (36). A partir dessa interpretação, fica claro que para obter um resultado preciso de f , é necessário considerar a somatória até pelo menos $l \approx ka = \beta$ que seria, em termos do espalhamento clássico, a contribuição de todos os feixes com parâmetro de impacto $b \leq a$, ou seja, todos os feixes que atingem a esfera. Estendendo esta analogia ao problema do espalhamento Mie tratado acima podemos agora compreender o porquê da demora na convergência da série em (24) conforme β aumenta. E o problema não para por aí. Além disso, a série encontrada para os campos não converge uniformemente; pelo contrário, ela sofre oscilações bruscas tanto em termos próximos de $l = \beta$ quanto para esferas com raios diferentes. Ou seja, embora o resultado obtido esteja correto, seu cálculo é exaustivo, e é possível fazê-lo somente com o auxílio de programas de computador. Além disso, para obter resultados quantitativos a respeito do fenômeno do arco-íris, ainda devemos considerar que o espalhamento ocorre em gotículas

de água com raios diferentes, o que complicaria mais ainda o cálculo. Nas palavras do próprio Moisés, a partir deste formalismo, "só os computadores entendem o arco-íris!"

Voltando à discussão do problema de espalhamento por uma onda escalar considerado, temos que procurar outra forma de determinar a amplitude de espalhamento f , que seja menos exaustiva do que ter que somar ao menos β termos para obter uma aproximação razoável.

4.2 Representação de Poisson

O primeiro passo para representar a função f de uma forma que facilite seu cálculo numérico corresponde a tomar sua representação de Poisson, dada pela seguinte relação:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \Phi(l + \frac{1}{2}, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \Phi(\lambda, x) e^{2im\pi\lambda} d\lambda \quad (37)$$

Aplicando isso para a f de (34), temos

$$f(k, \theta) = (ik)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \lambda [S(\lambda, k) - 1] P_{\lambda - \frac{1}{2}}(\cos\theta) e^{2im\pi\lambda} d\lambda \quad (38)$$

Note que há uma aparente arbitrariedade na escolha da *função de interpolação* $\Phi(\lambda, x)$; a única exigência imposta pela fórmula acima é que ela tenha o mesmo valor da função original nos "pontos físicos", onde $\lambda = l + \frac{1}{2}$. Nos outros valores de λ , o comportamento não é univocamente determinado. Porém, como será visto a seguir, vamos querer estender esta integral ao plano complexo, e portanto é importante que a função $\Phi(\lambda, x)$ seja estendida de forma analítica para o domínio complexo. Esta condição restringirá a arbitrariedade da função de interpolação a escolhas bem determinadas. Quando a extensão é feita, λ passa a ser chamado de momento angular complexo (em unidades de \hbar).

Continuando a análise da representação de Poisson para a função f , vamos antes fazer algumas considerações a respeito de sua representação em somatória, na forma de (34).

$$f(k, \theta) = (ik)^{-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) S_l(k) P_l(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) P_l(\cos\theta) \right)$$

Como

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) P_l(1) P_l(\cos\theta) = \delta(1 - \cos\theta)$$

podemos negligenciar este termo, desde que excluamos da análise ângulos próximos de $\theta = 0$. Além disso, vamos assumir a seguinte aproximação para $P_l(\cos\theta)$:

$$P_l(\cos\theta) \approx \left[\frac{2}{\pi(l + \frac{1}{2}) \sin\theta} \right]^{\frac{1}{2}} \cos \left[(l + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4} \right] \quad (39)$$

A partir dessas considerações, temos a seguinte representação de Poisson de f

$$f(k, \theta) = (ik)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m (2\pi \sin\theta)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} \left[e^{i\phi_{+,m} - i\frac{\pi}{4}} + e^{i\phi_{-,m} + i\frac{\pi}{4}} \right] d\lambda \quad (40)$$

onde

$$\Phi_{\pm,m}(\lambda, \theta) = 2\eta_\lambda + \lambda(2m\pi \pm \theta) \quad (41)$$

Primeiro, vamos analisar somente o termo para $m=0$. Ou seja, a representação de Poisson fica

$$f(k, \theta) = (ik)^{-1} (2\pi \sin\theta)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \sqrt{\lambda} \left[e^{i\phi_{+,0} - i\frac{\pi}{4}} + e^{i\phi_{-,0} + i\frac{\pi}{4}} \right] d\lambda \quad (42)$$

Devido aos termos $\Phi_{\pm,0}$, o integrando de (42) oscila rapidamente. Portanto, vamos assumir que as maiores contribuições para o valor da integral provém de pontos de fase estacionária, ou seja, pontos em que $\frac{d\Phi_{\pm,0}}{d\lambda} = 0$, já que perto desses pontos as fases $\Phi_{\pm,0}$ tendem a variar menos bruscamente. Derivando a expressão (41) para $m = 0$, encontramos que um $\bar{\lambda}$ é ponto de fase estacionária quando

$$2 \frac{d\eta_\lambda}{d\lambda}(\bar{\lambda}) = \pm\theta \quad (43)$$

Ou seja, Para um momento angular λ , os ângulos nos quais ele se torna um ponto de fase estacionária são tais que $\Theta_\lambda = 2 \frac{d\eta}{d\lambda}$. Esses ângulos, como ficará mais claro a seguir, representam o mesmo ângulo de espalhamento para partículas clássicas de momento angular λ . O sinal positivo para θ em (42) representa um potencial repulsivo e o negativo, um potencial atrativo. Supondo que nos pontos de fase estacionária possamos aproximar $\Phi_{\pm,0}$ por sua série de Taylor (Olver and Werner 1974)

$$\Phi_{\pm,0}(\lambda, \theta) \approx \Phi_{\pm,m}(\bar{\lambda}, \theta) + \frac{1}{2}(\lambda - \bar{\lambda})^2 \Phi''_{\pm,m}(\bar{\lambda}, \theta) \quad (44)$$

Temos que

$$f(k, \theta) = (ik)^{-1} \exp(i\phi) \left[\frac{\bar{\lambda}}{\sin\theta |\theta'(\bar{\lambda})|} \right]^{\frac{1}{2}} \exp[i[2\eta_\lambda(\bar{\lambda}) \pm \bar{\lambda}\theta]] \quad (45)$$

A sessão de choque diferencial, dada por $|f(k, \theta)|^2$, vale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\bar{\lambda}}{k^2 \sin\theta |\theta'(\bar{\lambda})|} \quad (46)$$

A expressão obtida é equivalente à obtida pela teoria clássica do espalhamento, com $b = \frac{\bar{\lambda}}{k}$. Ou seja, estamos a ponto de concluir que os pontos de fase estacionária $\bar{\lambda}$ da representação de Poisson da amplitude de espalhamento correspondem a trajetórias de partículas clássicas espalhadas com um parâmetro de impacto $b = \frac{\bar{\lambda}}{k}$. Porém, um ponto interessante é que, se há mais do que um ponto de fase estacionária, a seção de choque diferencial não é a simples soma das seções de choque de cada ponto de fase estacionária isolado. Isso quer dizer que surgem fenômenos de interferência, o que não é esperado pela teoria clássica de espalhamento.

A partir do que foi discutido acima, já temos um método para avaliar a amplitude de espalhamento: basta tomar sua representação de Poisson e considerar somente as contribuições dos pontos de fase estacionária. Porém, como vimos que esses pontos estão ligados a trajetórias clássicas das partículas (ou raios de luz), em pontos inacessíveis classicamente (pontos de sombra geométrica) não teremos fase estacionária. Ou seja, devemos encontrar alguma outra

forma de avaliar a integral que aparece em (38). Uma maneira de fazer isso é estendê-la para uma integral de caminho no plano complexo. Esse procedimento é a origem a teoria do momento angular complexo. Como a extensão é feita, em geral, depende do problema a ser resolvido. Será mostrado aqui, de modo superficial, a sua utilização para um caso mais simples: o espalhamento por uma esfera impenetrável de raio a . Neste problema, o potencial espalhador $V(r)$ é suposto ser ∞ em $r \leq a$ e 0 em $r > a$. Portanto, as funções de onda das partículas satisfazem, para $r > a$ a equação de onda

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi \quad (47)$$

juntamente com a condição de contorno

$$\psi(a, \theta, \phi) = 0 \quad (48)$$

Já que por hipótese a esfera é impenetrável. Este problema é análogo ao espalhamento (escalar) de ondas eletromagnéticas por uma esfera perfeitamente condutora. A função de onda espalhada é dada por:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) i^l [h_l^{(2)}(kr) + S_l(\beta) h_l^{(1)}(kr)] P_l(\cos\theta) \quad (49)$$

onde

$$S_l(\beta) = -\frac{h_l^{(2)}(\beta)}{h_l^{(1)}(\beta)} \quad (50)$$

Portanto, a solução consiste no cálculo da representação de Poisson de (49). Para isso, como foi mencionado acima, devemos estendê-la ao domínio complexo, que passará a ser chamado de plano λ . Esta extensão deve ser analítica e apresentar bom comportamento no infinito. Para isso, vamos lembrar que

$$h_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(j)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\lambda}^{(j)}(x) \quad (51)$$

Ou seja, podemos representar ψ como:

$$\psi(r, \theta) = (ik)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} e^{i\pi\frac{\lambda}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{g(\lambda, \beta, kr)}{H_{\lambda}^{(1)}(\beta)} P_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos\theta) e^{2im\pi\lambda} d\lambda \quad (52)$$

onde

$$g(\lambda, \beta, kr) = H_{\lambda}^{(1)}(\beta) H_{\lambda}^{(2)}(\beta) - H_{\lambda}^{(2)}(\beta) H_{\lambda}^{(1)}(\beta) \quad (53)$$

Porém, as funções de Legendre $P_{\nu}(x)$ apresentam uma singularidade logarítmica em $x = -1$. Ou seja, essa extensão analítica vale somente para ângulos θ que não são próximos de $\theta = \pi$. A partir da expressão (52) utilizando propriedades sobre a reflexão do integrando, pode-se estender a integral sobre a reta real inteira (H. M. Nussenzveig 1965). Essa integral pode ser vista como um caminho no plano complexo, que se fecha no infinito: e pelo *Teorema dos Resíduos*, o valor da integral corresponde ao valor dos resíduos dos polos do integrando no semi-plano $Im(\lambda) > 0$.

Os pólos do integrando em (52) são dados pela equação

$$H_{\lambda_n}^{(1)}(\beta) = 0 \quad (54)$$

e estão representados na figura abaixo:

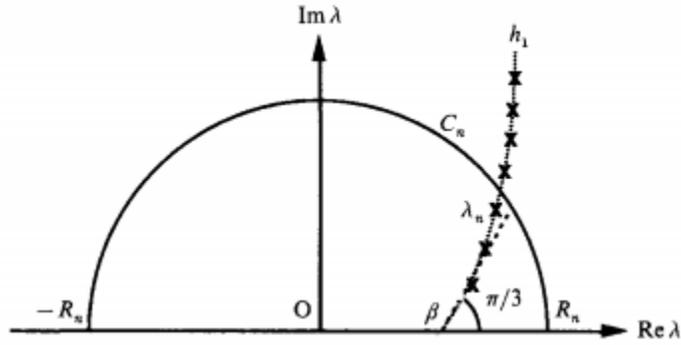


Figura 6: O gráfico mostra os pólos λ_n do integrando da expressão (52). Os caminhos C_n correspondem a tomar como aproximação para a integral em (52) a série de seus resíduos.

As raízes λ_n da equação (54) são infinitas, porém a série de seus resíduos é assintótica e rapidamente convergente, de modo que a seu cálculo é em geral muito mais rápido do que pela expressão em (49).

Este mesmo método foi utilizado pelo físico Herch Moysés Nussenzveig para tratar o problema do espalhamento Mie discutido acima, em seus artigos intitulados "High Frequency Scattering by a Transparent Sphere" I e II. Os resultados obtidos foram utilizados para interpretar o fenômeno do arco-íris e o efeito glória.

4.3 O arco-íris e o efeito glória

Podemos agora tentar entender os fenômenos do arco-íris e do efeito glória a partir da teoria do Momento Angular Complexo, que foi introduzida acima. Vamos retomar os resultados obtidos a partir da ótica geométrica para o espalhamento por uma esfera de raio a e índice de refração N :

$$\Theta(x) = \left(\pi - \left(4 \arcsin \left(\frac{1}{N} \right) x - 2 \arcsin(x) \right) \right) \times \frac{180}{\pi} \quad (55)$$

Olhando o gráfico, é possível notar que os ângulos de deflexão podem ser separados em 3 áreas:

$$(1) \pi \geq \Theta > \theta_L$$

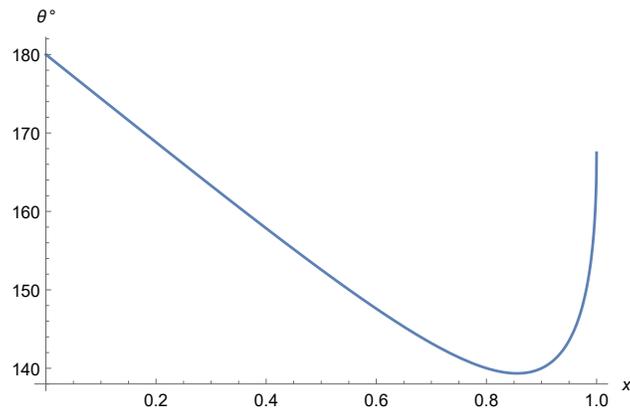


Figura 7: Gráfico do ângulo de deflexão Θ obtido a partir da fórmula acima, para $N = 1.343$.

Onde somente um raio de luz contribui para o espalhamento,

$$(2) \theta_1 \geq \Theta > \theta_R$$

Onde dois raio de luz contribui para o espalhamento, e

$$(0) \theta_R \geq \Theta$$

Onde nenhum raio de luz contribui, tratando-se de uma área de sombra geométrica. Para o gráfico da figura 7, $\theta_2 \approx 168$, $\theta_1 \approx 139.4$.

A figura abaixo ilustra os três casos

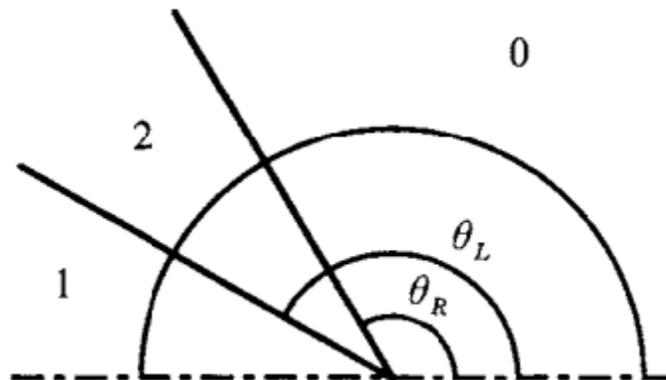


Figura 8: A figura ilustra as regiões (1), (2), e (0) de Θ .

Efeitos de difração devem ocorrer nas *bordas* destas regiões (inclusive em $\Theta = \pi$ (H. M. Nussenzveig (1992))).

Os fenômenos de difração na borda $\Theta = \pi$ dão origem ao efeito glória, e na borda de $\Theta = \theta_L$, ao arco-íris.

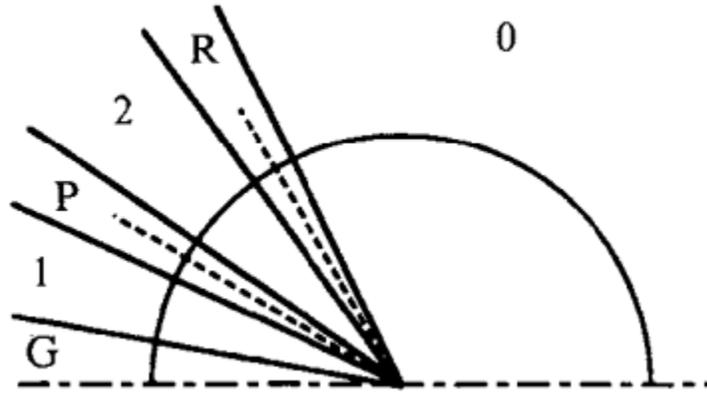


Figura 9: A figura mostra as regiões onde ocorrem o o efeito glória (G), o arco-íris (R), e outro efeito de borda, chamado de *penumbra* (P).

Como foi discutido acima, cada raio de luz corresponde a um ponto de fase estacionária $\bar{\lambda}$ na representação de Poisson da amplitude de espalhamento. Ou seja, para o efeito glória ($\Theta \approx \pi$, região (1)) há somente um ponto de fase estacionária (representado, na figura 10, pelo ponto preto). Conforme Θ diminui, este ponto começa a se mover para a direita da reta real (H. M. Nussenzveig (1992)). A partir de $\Theta = \theta_L$, um novo ponto de fase estacionária aparece (representado pelo ponto branco), já que agora, na região (2), temos dois raios contribuindo para o espalhamento. A medida que Θ vai diminuindo, os dois pontos de fase estacionária vão se convergindo, até se encontrarem em $\Theta = \theta_R$. Ou seja, no plano λ , o arco-íris corresponde a um colisão entre dois pontos de fase estacionária. Por fim, se $\Theta < \theta_R$ (região (0), de sombra geométrica), os $\bar{\lambda}$ passam a ser complexos.

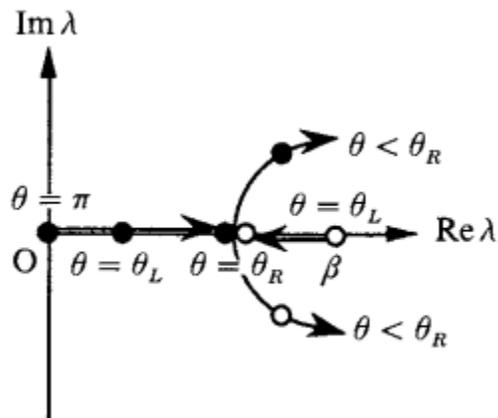


Figura 10: A figura ilustra o comportamento dos pontos de fase estacionária $\bar{\lambda}$ no plano λ a medida que Θ varia. Os pontos pretos correspondem ao $\bar{\lambda}$ que aparece na região (1). Os pontos brancos, ao novo $\bar{\lambda}$ que aparece na região (2).

5 Referências

H. M. Nussenzveig (1965) *Ann. Phys.* (NY) **34**, 23.

H. M. Nussenzveig (1992) *Diffraction effects in semiclassical scattering*, Cambridge university press.

Olver, F. W. J. (1974) *Asymptotics and Special Functions*. New York: Academic.