

**INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Guilherme Barbosa Barros

**O EFEITO UNRUH E A ELETRODINÂMICA
CLÁSSICA**

**São Paulo
Junho de 2017**

Introdução

O efeito Unruh é um resultado da teoria quântica de campos derivado originalmente por Unruh, Fulling e Davies, que prevê que observadores acelerados veem como um estado térmico o que observadores inerciais veem como o vácuo. Este resultado leva a consequência muito importantes, como o fato de que o próprio conceito de partícula é relativo ao referencial no qual uma determinada experiência está sendo realizada.

Apesar de proposto há mais de 40 anos, a medição direta do efeito Unruh é difícil e até hoje não foi realizada. A principal dificuldade está relacionada ao fato de que, para que fosse possível detectar uma temperatura de apenas $1K$, seria necessário atingir acelerações da ordem de $10^{20}m/s$. Isto levou pesquisadores a procurarem por sinais indiretos da existência do efeito Unruh.

Em particular, desde a década de 1990, é conhecida a relação entre o efeito Unruh e a eletrodinâmica clássica. Higuchi et al. [1] mostraram, por exemplo, que observadores acelerados juntamente a cargas elétricas interpretam a radiação emitida devido à aceleração como emissão e absorção de fótons do banho térmico de Unruh pela carga, já que no seu referencial esta não está acelerada. Em abril de 2017, Cozzella et al. [2] mostraram que a eletrodinâmica pode ser utilizada para virtualmente observar o efeito Unruh - isto é, a eletrodinâmica concorda com a existência de um banho térmico exatamente à temperatura de Unruh em referenciais acelerados e, de fato, isto é necessário para que a física seja a mesma para todos os observadores.

Este trabalho focará em apresentar a relação entre o efeito Unruh e a eletrodinâmica clássica apresentada no artigo [2]. Na primeira parte, focarei em apresentar as bases teóricas necessárias para compreender o paper (radiação no domínio de frequências e formulação covariante do eletromagnetismo). Esta parte foi em grande baseada no livro *Modern Electrodynamics*, de A. Zangwill [3] e *Classical Electrodynamics* de D. Jackson [4]. Na segunda, darei uma introdução sobre o efeito Unruh sem entrar em detalhes da derivação, focando em apresentar as ideias principais apresentadas em [2].

Capítulo 1

Revisão teórica

1.1 Radiação no domínio de frequências

1.1.1 Transformadas de Fourier

É útil, de um ponto de vista experimental e conceitual, ser capaz de transformar a potência irradiada como função do tempo t para uma função da frequência ω . Para isso, introduzimos a transformada de Fourier do campo elétrico [3]

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(t) e^{i\omega t} \quad (1.1)$$

que se transforma inversamente como

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (1.2)$$

Para as derivações seguintes, é importante notar que, se impusermos que o campo elétrico precisa ser real, isto é, $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}^*(t)$, então

$$\mathbf{E}^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\mathbf{E}}^*(\omega) e^{i\omega t} = \mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (1.3)$$

de onde obtemos que

$$\tilde{\mathbf{E}}^*(\omega) = \tilde{\mathbf{E}}(-\omega) \quad (1.4)$$

Por fim, introduzimos um resultado importante da teoria das transformações de Fourier, o teorema de Parseval [5]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(t)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2 \quad (1.5)$$

que implica que a transformação de Fourier é unitária.

1.1.2 Distribuição angular-espectral

Notamos agora que a energia ϵ por unidade de tempo através de uma casca esférica de raio r se relaciona com o vetor de Poynting através de

$$\frac{d\epsilon}{dt} = 4\pi^2 \mathbf{S}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.6)$$

e como

$$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(t) \times \mathbf{B}(t) = \epsilon_0 c^2 E^2(t) \hat{\mathbf{n}} \quad (1.7)$$

então a potência por unidade de ângulo sólido (onde $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, como usual) é

$$\frac{d^2\epsilon}{dt d\Omega}(t) = r^2 \epsilon_0 c^2 E^2(t) \quad (1.8)$$

Se definimos a distribuição angular-espectral da energia irradiada $I(\omega, \theta, \phi)$ como

$$I(\omega, \theta, \phi) = \frac{d^2\epsilon}{d\omega d\Omega} \quad (1.9)$$

segue que a energia total irradiada por unidade de ângulo sólido é

$$\frac{d\epsilon}{d\Omega} = \int_0^\infty d\omega I(\omega, \theta, \phi) \quad (1.10)$$

Agora, se integramos a eq. (1.8) no tempo, e igualarmos à (1.10), obteremos

$$\epsilon_0 c^2 r^2 \int_{-\infty}^\infty dt E^2(t) = \int_0^\infty d\omega I(\omega, \theta, \phi) \quad (1.11)$$

Utilizando o teorema de Parseval (eq. (1.5)) e que o campo $\mathbf{E}(t)$ é real

$$\frac{\epsilon_0 c^2 r^2}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2 = \int_0^\infty d\omega I(\omega, \theta, \phi) \quad (1.12)$$

Utilizando (1.4) e o fato de que $|\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2 = \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(-\omega)$ é claramente uma função par, o limite inferior da integral no lado esquerdo de (1.12) pode ser tomado como zero ao custo de um fator de 2

$$\frac{\epsilon_0 c^2 r^2}{\pi} \int_0^\infty d\omega |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2 = \int_0^\infty d\omega I(\omega, \theta, \phi) \quad (1.13)$$

que, por fim, resulta em

$$I(\omega, \theta, \phi) = \frac{\epsilon_0 c^2 r^2}{\pi} |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2 = \frac{\epsilon_0 c^2 r^2}{\pi} \left| \int_{-\infty}^\infty dt \mathbf{E}(t) e^{i\omega t} \right|^2 \quad (1.14)$$

1.1.3 Carga pontual

Até agora, trabalhamos com um caso geral para chegar à eq. (1.14). Agora vamos trabalhar com um caso específico, que se tornará importante no próximo capítulo: a carga pontual. Para isso, começamos notando que, definindo a transformada de Fourier do potencial vetor de radiação $\mathbf{A}_r(t, \mathbf{x})$ e da corrente $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ como [3]

$$\mathbf{A}_r(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{A}(\omega, \mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{J}(\omega, \mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad (1.16)$$

e como, para o potencial vetor de radiação [3]

$$\mathbf{A}_r(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{x}|} \int_V d^3x' \mathbf{J}(t - |\mathbf{x}|/c + \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'/c, \mathbf{x}) \quad (1.17)$$

(onde $\hat{\mathbf{x}}$ é a direção de observação), então

$$\mathbf{A}_r(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{8\pi^2|\mathbf{x}|} \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{J}(\omega, \mathbf{x}') e^{-i\omega(t - |\mathbf{x}|/c + \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}')} \quad (1.18)$$

e por fim

$$\mathbf{A}_r(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{i\omega r/c}}{8\pi^2|\mathbf{x}|} \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{J}(\omega, \mathbf{x}') e^{-i\omega t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'/c} \quad (1.19)$$

onde redefini $\mathbf{k} = \omega \hat{\mathbf{x}}/c$. Então, por comparação,

$$\mathbf{A}_r(\omega, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{i\omega|\mathbf{x}|/c}}{4\pi|\mathbf{x}|} \int_V d^3x' \mathbf{J}(\omega, \mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'/c} = \frac{\mu_0 e^{i\omega|\mathbf{x}|/c}}{4\pi|\mathbf{x}|} \mathbf{J}(\omega, \mathbf{k}) \quad (1.20)$$

onde no último passo defini a transformada de fourier espacial de $\mathbf{J}(\omega, \mathbf{x})$ como $\mathbf{J}(\omega, \mathbf{k})$. Além disso, para campos de radiação, é verdade que

$$\mathbf{E}_r(\omega, \mathbf{x}) = -i\omega \hat{\mathbf{x}} \times [\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}_r(\omega, \mathbf{x})] = -i\omega \hat{\mathbf{x}} \times \left[\hat{\mathbf{x}} \times \frac{\mu_0 e^{i\omega|\mathbf{x}|/c}}{4\pi|\mathbf{x}|} \mathbf{J}(\omega, \mathbf{k}) \right] \quad (1.21)$$

e, por este motivo, notando que $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}$ é perpendicular a $\hat{\mathbf{x}}$ para qualquer vetor \mathbf{v} , então

$$|\mathbf{E}_r(\omega, \mathbf{x})|^2 = \omega^2 \frac{\mu_0^2}{16\pi^2|\mathbf{x}|^2} |\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{J}(\omega, \mathbf{k})|^2 \quad (1.22)$$

e, substituindo na eq. (1.14), e identificando $r = |\mathbf{x}|$, obtemos

$$I(\omega, \theta, \phi) = \omega^2 \frac{\mu_0}{16\pi^3 c} |\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{J}(\omega, \mathbf{k})|^2 \quad (1.23)$$

Agora estamos prontos para derivar a distribuição espectral de energia emitida devido à aceleração de uma carga pontual. Notemos que a corrente devida ao movimento de uma carga pontual com carga q e velocidade $\mathbf{v}'(t)$ é $\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = q\mathbf{v}'(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t))$, onde δ representa a função delta de Dirac e \mathbf{x}' é a posição da partícula em função de t . Agora queremos descobrir $\mathbf{J}(\omega, \mathbf{k})$:

$$\mathbf{J}(\omega, \mathbf{k}) = \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt q\mathbf{v}'(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t))e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} dt q\mathbf{v}'(t)e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'(t)} \quad (1.24)$$

Finalmente, inserindo (1.24) em (1.23), obtemos

$$I(\omega, \theta, \phi) = \omega^2 \frac{\mu_0}{16\pi^3 c} \left| \hat{\mathbf{x}} \times \int_{-\infty}^{\infty} dt q\mathbf{v}'(t)e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'(t)} \right|^2 \quad (1.25)$$

o que completa nossa derivação. Esta integral pode ser resolvida se soubermos qual é o campo de velocidades $\mathbf{v}(t)$. Portanto, se soubermos qual a velocidade da carga devido, digamos, à arquitetura de um experimento, poderemos prever teoricamente qual a distribuição espectral da radiação emitida. Isto, de fato, foi feito por Cozzella et al. em [2], como será explicado em maiores detalhes no próximo capítulo.

1.1.4 Número de fótons

O principal motivo porque introduzimos a distribuição angular espectral como função da frequência ω se deve à facilidade de calcular o número de fótons com frequência ω através da relação de Plank para a energia de um fóton, $\epsilon = \hbar\omega$. Sabendo que a eq. (1.14) representa a energia por unidade de frequência por unidade de ângulo sólido, podemos escrever

$$d^3N(\omega, \theta, \phi) = \frac{I(\omega, \theta, \phi)}{\hbar\omega} d\omega d\Omega \quad (1.26)$$

Agora digamos que queremos saber a distribuição do número de fótons com momento em uma determinada direção. Façamos a transformação $\omega = |\mathbf{k}|c$. Essa transformação é muito similar à transformação entre coordenadas cartesianas e cilíndricas, com \mathbf{k} fazendo o papel de \mathbf{x} e ω/c fazendo o papel de r (de fato, do ponto de vista puramente matemático, não existe diferença, e as integrais e os jacobianos permanecem análogos). Façamos $\omega \sin\theta = ck_{\perp}$ e $\omega \cos\theta = ck_{\parallel}$. Isto faz com que, utilizando coordenadas cilíndricas, $\omega d\omega d\theta = c^2 dk_{\perp} dk_{\parallel}$ e, por isso, $\sin\theta d\omega d\theta d\phi = c^2 \omega^{-1} \sin\theta dk_{\perp} dk_{\parallel} d\phi = c^2 \omega^{-2} \omega \sin\theta dk_{\perp} dk_{\parallel} d\phi = c(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2)^{-1} k_{\perp} dk_{\perp} dk_{\parallel} d\phi$. Substituindo na eq. (1.26), obtemos

$$d^3N(k_{\perp}, k_{\parallel}, \phi) = \frac{I(\omega, \theta, \phi)}{\hbar(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2)^{3/2}} k_{\perp} dk_{\perp} dk_{\parallel} d\phi \quad (1.27)$$

e agora, dividindo ambos os lados por dk_{\perp} e integrando sobre k_{\parallel} e ϕ , temos

$$\frac{dN}{dk_{\perp}}(k_{\perp}) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\parallel} d\phi \frac{I(\omega, \theta, \phi)}{\hbar(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2)^{3/2}} k_{\perp} \quad (1.28)$$

1.2 Formulação covariante do Eletromagnetismo e Relatividade Restrita

Para os efeitos das aplicações que serão discutidas no próximo capítulo, não existe necessidade de considerar o eletromagnetismo em espaço-tempos curvos (isto é, aqueles em que o escalar de curvatura não é identicamente nulo), apesar de ser necessário considerar movimentos acelerados em um espaço-tempo de Minkowski. Neste trabalho, índices tensoriais repetidos devem ser entendidos como representando soma sobre aqueles índices.

1.2.1 Revisão de relatividade especial

Nesta seção, definirei as notações utilizadas no decorrer do texto, assim como revisitarei alguns conceitos gerais de relatividade especial.

O elemento de linha do espaço tempo de Minkowski é $d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski e $x^\mu = (ct, x, y, z)$. Também é importante definir o vetor dual $x_\nu = \eta_{\nu\mu} x^\mu = (-ct, x, y, z)$. O elemento de linha é um escalar invariante sob transformações de coordenadas, uma vez que é composto através da contração de dois tensores ($\eta_{\mu\nu}$ e $x^\mu x^\nu$).

Definimos a quadrivelocidade de um objeto como $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, dado que $d\tau = dt/\gamma$, onde $d\tau$ é o intervalo de tempo próprio de uma partícula, $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$, e dt é o tempo medido pelo referencial no qual a partícula tem velocidade \mathbf{v} . Então segue que, para a métrica de Minkowski, $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$. Também defino o 4-potencial $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$, onde ϕ é o potencial elétrico e \mathbf{A} é o potencial vetor, além da quadricorrente $j^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$, onde ρ é a densidade de cargas e \mathbf{J} é a corrente elétrica.

Ainda fixando notações, adoto a convenção de que $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$.

Podemos construir tensores como combinação de outros tensores. O chamado *tensor eletromagnético* $F_{\mu\nu}$ é definido como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.29)$$

de onde segue que $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ e que sua diagonal é nula. Isso faz com que o tensor, originalmente com 16 entradas, tenha apenas 6 graus de liberdade, o que é compatível com os seis graus de liberdade dos campos elétrico e magnético.

Dadas as equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.32)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.33)$$

e fixando o Gauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, obtemos as equações na sua forma covariante [4]:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (1.34)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\zeta} \partial_\mu F^{\sigma\zeta} = 0 \quad (1.35)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu\sigma\zeta}$ é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita. A eq. (1.34) engloba ambas as equações de Maxwell com a presença de fontes, enquanto a eq. (1.35) engloba as duas equações sem fonte.

1.2.2 Observadores de Rindler

Vamos introduzir a transformação de coordenadas $(ct, x, y, z) \rightarrow (\lambda, x, y, \xi)$ [11]:

$$ct = \alpha^{-1} e^{\alpha\xi} \sinh(\alpha\lambda) \quad (1.36)$$

$$z = \alpha^{-1} e^{\alpha\xi} \cosh(\alpha\lambda) \quad (1.37)$$

Destas transformações, diferenciando de ambos os lados de (1.36), temos $c dt = e^{\alpha\xi} (\sinh(\alpha\lambda) d\xi + \cosh(\alpha\lambda) d\lambda)$. Fazendo o mesmo para (1.37), obtemos $dz = e^{\alpha\xi} (\cosh(\alpha\lambda) d\xi + \sinh(\alpha\lambda) d\lambda)$. Destas transformações, o elemento de linha do espaço de Minkowski, que sabemos ser invariante sob transformações de coordenadas, pode ser escrito como $d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^{2\alpha\xi} (-d\lambda^2 + d\xi^2) + dx^2 + dy^2$. É importante notar que, devido às transformações (1.36) e (1.37), as novas coordenadas λ e ξ não permeiam todo a região (t, z) do espaço-tempo, gerando apenas um quadrante ($|t| < z$) (como é possível ver na figura 1.1).

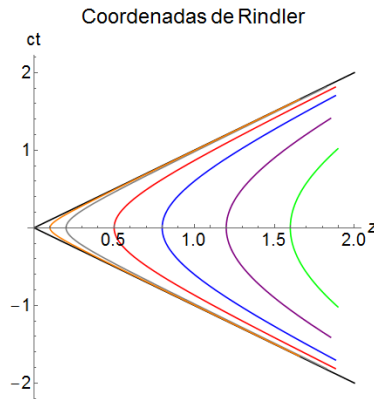


Figura 1.1: Representação de observadores de Rindler. As hipérboles coloridas representam observadores com diferentes acelerações constantes. (As unidades são arbitrárias).

Observadores acelerados com aceleração própria a no espaço de Minkowski seguem trajetórias hiperbólicas ([11], [6]), especificamente

$$z^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{a^2} \quad (1.38)$$

Se elevarmos (1.36) e (1.37) ao quadrado e subtrairmos, obteremos que

$$z^2 - c^2 t^2 = \alpha^{-2} e^{2\alpha\xi} \quad (1.39)$$

de onde obtemos que observadores com ξ constante realizam trajetórias hiperbólicas no espaço-tempo de Minkowski, e portanto têm aceleração própria constante. Comparando a eq. (1.38) com (1.39), obtemos que a aceleração própria do observador com ξ constante, chamado de agora em diante de *observador de Rindler*, é $a = c^2 \alpha e^{-2\alpha\xi}$. Com isso, fomos capazes de obter a interpretação física e uma motivação para a introdução deste novo sistema de coordenadas: representar movimentos acelerados se torna, desta forma, muito mais simples.

Capítulo 2

O efeito Unruh e a eletrodinâmica clássica

2.1 O efeito Unruh

Dentro do contexto da relatividade geral, devido ao princípio de equivalência, as descrições da física de observadores acelerados de Rindler (dentro do quadrante em que estas coordenadas podem ser utilizadas) [10] devem ser tão válidas quanto a descrição feita por observadores inerciais, digamos, um que tenha (x, y, z) constantes em um determinado sistema inercial de coordenadas.

Durante a década de 1970, grandes nomes da teoria quântica de campos em espaço-tempos curvos como Fulling, Davies e Unruh publicaram trabalhos ([7], [8], [9]) que mostram como observadores acelerados percebem como um estado térmico aquilo que observadores inerciais veem como vácuo. Nos próximos parágrafos, fornecerei uma visão geral do que isto significa, pontuando os principais resultados, sem dar os detalhes da derivação do efeito, já que este não é o objetivo principal deste trabalho.

Seja um campo escalar livre e sem massa ϕ governado pela equação de Klein Gordon

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = 0 \quad (2.1)$$

Em particular, para a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, no sistema de coordenadas (t, x, y, z) , obtemos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.2)$$

cuja solução é decomposta em modos $\phi_j(x, y, z)$ (que são autofunções do operador laplaciano de frequência ω_j) [10]

$$\phi(t, x, y, z) = \sum_j \left[a_j \phi_j(x, y, z) e^{-i\omega_j t} + a_j^\dagger \phi_j^*(x, y, z) e^{i\omega_j t} \right] \quad (2.3)$$

onde ϕ^* é o complexo conjugado do campo ϕ .

Neste caso, a_j é um operador de aniquilação e a_j^\dagger é um operador de criação. Isto significa que, dado o vácuo no espaço de Minkowski $|0_M\rangle$, aplicar o operador de aniquilação sobre este estado o aniquila completamente $a_j|0_M\rangle = 0$ (para qualquer j), enquanto aplicar a_j^\dagger cria uma partícula no estado j .

Resolvendo a eq. (2.1) agora nas coordenadas de Rindler ((1.36) e (1.37)), e lembrando que $\partial/\partial x'^{\nu} = (\partial/\partial x^\mu)\partial x^\mu/\partial x'^{\nu}$, teremos [10]

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + e^{2\alpha\lambda} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \phi \quad (2.4)$$

que dá origem à solução

$$\phi(\lambda, x, y, \xi) = \sum_k \left[b_k \Phi_k(x, y, \xi) e^{-i\omega'_k \lambda} + b_k^\dagger \Phi_k^*(x, y, \xi) e^{i\omega'_k \lambda} \right] \quad (2.5)$$

onde ω'_k são as novas frequências de cada modo k , e Φ_k são as autofunções do lado direito da equação 2.4. Notemos agora que os operadores de criação e aniquilação b_k^\dagger e b_k não tem porque serem os mesmos dos a_j^\dagger e a_j da equação 2.3 e, de fato, não são. O vácuo de Rindler é agora chamado de $|0_R\rangle$, de modo que $b_k|0_R\rangle = 0$ para todo k . Mas é necessário notar que os vácuos de Rindler e de Minkowski não são correspondentes [11]. Isto se deve ao fato de que as transformações de Rindler apenas de aplicam a um dos quadrantes $|t| < z$, e, ao estender as transformações para $-|t| > z$, o campo ϕ deixa de ser analítico na origem [10].

O resultado mais importante e central para o efeito Unruh é a demonstração (não feita aqui, mas disponível nos papers originais [7], [8], [9]) de que o valor esperado do operador densidade de partículas $b_k^\dagger b_k$ aplicado sobre o vácuo de Minkowski não é zero [10], [11]:

$$\langle 0_M | b_k^\dagger b_k | 0_M \rangle = \frac{1}{e^{2\pi\omega'_k/a} - 1} \quad (2.6)$$

(Note que a é a aceleração própria do observador, como definido em (1.38)). Este resultado é familiar. O termo da direita é claramente um fator de Planck, desde que $\hbar\omega'_k/(ck_B T) = 2\pi\Omega_k/a$ ou, em outros termos,

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B} \quad (2.7)$$

Este resultado é impressionante: observadores acelerados veem um banho térmico de fótons onde observadores inerciais apenas observam o vácuo.

2.2 O efeito Unruh e a eletrodinâmica

Apesar de proposto há mais de 40 anos, o efeito Unruh nunca foi diretamente observado. Uma observação direta da temperatura de Unruh (eq. (2.7)) é inviável com a tecnologia atual, uma vez que seria necessário uma aceleração

própria da ordem de $10^{20}m/s^2$ para observar um aumento de apenas 1 K. Este fato levou vários pesquisadores a buscarem por formas de observar o efeito Unruh indiretamente. Várias propostas, que não necessariamente se relacionam com o escopo deste trabalho (por não utilizarem a eletrodinâmica clássica explicitamente), podem ser encontrados em [12].

Higuchi e Matsas [1] mostraram que, dado um elétron acelerado linear e uniformemente, o que é percebido pelo observador inercial como radiação devido à aceleração do elétron, é visto pelo observador acelerado juntamente ao elétron (onde este está, portanto, em repouso e não deve emitir radiação) como a absorção de fótons de energia zero a partir do banho térmico de Unruh e a emissão destes para o banho. Isto é uma boa notícia: não existe contradição quanto à existência de fenômenos físicos em diferentes referenciais, apenas uma *interpretação* distinta dos acontecimentos. É impressionante que um efeito quântico em sua natureza como o efeito Unruh possa ser relacionado com a eletrodinâmica clássica, mas é necessário lembrar que \hbar no fator térmico relacionado à distribuição de probabilidades $e^{\hbar\omega/k_B T}$ é cancelado devido à dependência de T com \hbar em (2.7) [2]

Uma das propostas de observação do efeito Unruh através da eletrodinâmica envolve o uso de lasers ultraintensos, propostos inicialmente por Chen e Tajima [13]. Sabemos que cargas aceleradas reagem à radiação emitida, no fenômeno conhecido como reação de radiação. Isto é visto por referenciais acelerados como consequência da interação entre a carga e o banho térmico (a carga reage à emissão ou absorção dos fótons). Chen e Tajima propuseram o uso de lasers ultraintensos para conseguir acelerar cargas a campos suficientemente grandes, de modo a conseguirem verificar o efeito desejado. Até hoje, no entanto, a realização deste experimento não se mostrou viável, devido à falta de tecnologia necessária.

2.3 Observação indireta do efeito Unruh através da eletrodinâmica clássica

Em abril de 2017, Cozella, Landulfo, Matsas e Vanzella publicaram um artigo [2] na *Physical Review Letters* intitulado *Proposal for Observing the Unruh Effect using Classical Electrodynamics*. A partir deste ponto, o enfoque deste trabalho será expor os principais resultados e o raciocínio geral utilizado no referido artigo.

Consideremos uma carga pontual acelerada na direção z . Imaginemos também que, além de acelerada linearmente, a carga está se movendo circularmente (isto é, faz espirais no referencial inercial), com velocidade angular ω_R (não confundir com a frequência da radiação eletromagnética, ω), como visto na figura 2.1. Para um observador de Rindler acelerando junto com a carga, a carga está apenas realizando o movimento orbital (figura 2.2). É útil introduzir, além das transformações (1.36) e (1.37), também introduzir coordenadas polares para as duas componentes que permaneceram inalteradas $(x, y) \rightarrow (r, \phi)$. Estas trans-

formações são feitas como usualmente, levando à métrica nas novas coordenadas (λ, r, ϕ, ξ) : $d\tau^2 = e^{2\alpha\xi}(-d\lambda^2 + d\xi^2) + dr^2 + r^2 d\phi^2$. Nestas coordenadas, a carga descrita segue linhas de $\xi = 0$ e $r = R$ constantes, além de que $\phi = \omega_R \lambda$.

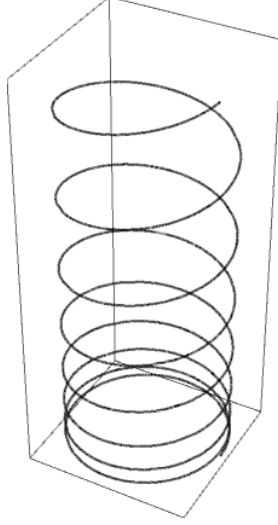


Figura 2.1: Como observadores de Minkowski veem a carga acelerada. O background branco representa o vácuo, como visto pelos observadores inerciais.

Nós já calculamos a distribuição angular-espectral para uma carga pontual, cujo resultado é condensado na eq. (1.25). A diferença, no entanto, é que agora o nosso parâmetro não é mais t como calculado pelo observador inercial, e sim λ . A troca de variáveis é feita sem maiores complicações, uma vez que temos dt presente no denominador e no numerador da eq. (1.25). Por isso teremos, transformando t e z através de (1.36) e (1.37)

$$I(\omega, \theta, \phi) = \omega^2 \frac{\mu_0}{16\pi^3 c} \left| \hat{\mathbf{x}} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda q \frac{d\mathbf{x}'}{d\lambda}(\lambda) e^{i\omega(\alpha^{-1} \sinh(\alpha\lambda) - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}')} \right|^2 \quad (2.8)$$

onde, como anteriormente, $\hat{\mathbf{x}}$ é o versor na direção de observação e \mathbf{x}' é o vetor de coordenadas da carga pontual. Como sabemos que, no nosso caso específico, $\mathbf{x} = R \cos(\omega_R \lambda) \hat{\mathbf{x}} + R \sin(\omega_R \lambda) \hat{\mathbf{y}} + \alpha^{-1} \cosh(\alpha\lambda) \hat{\mathbf{z}}$. Tendo esta informação, é possível calcular a integral em (2.8) através de valores tabelados, cálculo que está explicitado em [2]. Toda a parte física interessante, entretanto, está contida em (2.8), e não resolvi a integral explicitamente.

Os autores também calcularam, utilizando cálculos padrão da teoria quântica de campos, o número de fótons emitidos e absorvidos (a soma dos dois casos) pela carga para o banho térmico de Unruh ou a partir deste. A partir desta quantidade, observadores uniformemente acelerados devem ser capazes de prever o número de fótons que os observadores inerciais medirão, em função da temperatura. Ao invés de fixar a temperatura do banho térmico como a temperatura

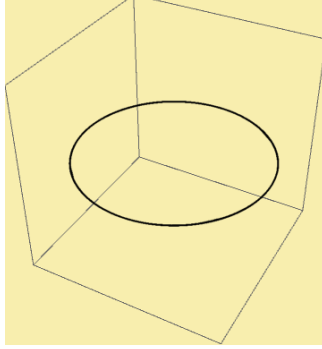


Figura 2.2: Como observadores de Rindler veem a trajetória carga. Estes veem um banho térmico de fótons, representado pelo fundo alaranjado.

de Unruh (2.7), os autores escolheram deixá-la em aberto, com a intenção de mostrar que o espectro clássico (2.8) apenas pode ser compatível com a temperatura de Unruh (2.7). Estes cálculos mostraram que a distribuição do número de fótons com momento perpendicular ao movimento k_{\perp} detectados pelo observador inercial deve ser proporcional a (notando que $K_n(x)$ é a função de Bessel modificada do segundo tipo, de argumento imaginário, $J_m(x)$ é a função de Bessel de primeiro tipo usual, $\Theta(m)$ é a função Θ de Heaviside, a a aceleração própria do observador acelerado linearmente com a carga, e o sinal ' indica derivação com respeito ao argumento da função) (equação 12 do paper [2])

$$\frac{dN}{dk_{\perp}} \propto k_{\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Theta(m) \sinh\left(\frac{\pi mc\omega_R}{a}\right) \operatorname{cotgh}\left(\frac{\hbar m\omega_R}{2Tk_B}\right) \times \left[\left| K'_{imc\omega_R/a}\left(\frac{k_{\perp}c^2}{a}\right) \right|^2 \left| J_m(k_{\perp}R) \right|^2 + \left(\frac{R\omega_R}{c}\right)^2 \left| K_{icm\omega_R/a}\left(\frac{k_{\perp}c^2}{a}\right) \right|^2 \left| J'_m(k_{\perp}R) \right|^2 \right] \quad (2.9)$$

(o sinal de proporcionalidade não é devido a nenhuma indeterminação da teoria; na verdade, ele surge pois a quantidade de fótons detectados dependerá do tempo total de medição). A cotangente hiperbólica na eq. (2.9) é o único termo que depende explicitamente de T . Se o efeito Unruh é de fato válido, a eletrodinâmica clássica deve prever uma distribuição de fótons igual à da eq. (2.9), mas com $T = T_U = a\hbar/(2\pi ck_B)$. De fato - e aqui está o resultado central do trabalho - resolvendo a integral na distribuição angular espectral (2.8) e a aplicando em (1.28), obtém-se que

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dk_{\perp}} &= \frac{4q^2 k_{\perp}}{\pi \hbar a^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(k_{\parallel}/k_{\perp})}{\sqrt{1 + (k_{\parallel}/k_{\perp})^2}} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Theta(m) \cosh\left(\frac{\pi m c \omega_R}{a}\right) \\
&\times \left[\left| K'_{icm\omega_R/a}\left(\frac{k_{\perp} c^2}{a}\right) \right|^2 \left| J_m(k_{\perp} R) \right|^2 + \left(\frac{R\omega_R}{c}\right)^2 \left| K_{icm\omega_R/a}\left(\frac{k_{\perp} c^2}{a}\right) \right|^2 \left| J'_m(k_{\perp} R) \right|^2 \right]
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

que é compatível com (2.9) se $T = T_U = a\hbar/(2\pi ck_B)$. Este resultado é impressionante. Não fixamos a temperatura do banho térmico a priori. Pelo contrário, todos os cálculos para chegar à eq. (2.10) foram feitos utilizando a eletrodinâmica *clássica*. Se o banho térmico de Unruh não existisse, seria impossível conciliar a física no referencial inercial, onde a carga é vista emitindo radiação devido à sua aceleração, com a física como vista pelo referencial acelerado - observadores de Rindler não seriam capazes de prever a radiação que é medida por um observador inercial de Minkowski, já que (2.9) (obtida com teoria quântica de campos) não levaria a (2.10) (obtida com eletromagnetismo clássico). Isto levou os autores a concluir que o achado pode ser interpretado como uma observação indireta do efeito Unruh, já que o eletromagnetismo clássico é uma das teorias física mais sólidas e bem aceitas que existem.

Capítulo 3

Conclusão

Neste trabalho, apresentei uma aplicação da eletrodinâmica na física moderna: a observação virtual do efeito Unruh através da teoria clássica do eletromagnetismo. Para isso, introduzi conceitos de radiação no campo de frequências e detalhei a derivação de algumas expressões importantes relacionadas ao eletromagnetismo clássico presentes no paper [2], além de apresentar noções acerca do efeito Unruh.

O resultado final apresentado em [2] e mencionado neste trabalho é impressionante: a existência do efeito Unruh é necessário para a consistência do eletromagnetismo clássico. Desde que Maxwell publicou seus trabalhos, as evidências da validade dessa teoria têm se mantido fortíssimas, e não temos motivos para duvidá-la. Por isso, o resultado pode ser visto como uma observação virtual do efeito Unruh.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Higuchi, G. Matsas, Bremsstrahlung and zero-energy Rindler photons, *Phys. Rev. D* 45, R3308 (1993)
- [2] G. Cozzella, A. Landulfo, G. Matsas e D. Vanzella, Proposal for Observing the Unruh Effect using Classical Electrodynamics, *Phys. Rev. Lett.* 118, 161102 (2017)
- [3] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2012.
- [4] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, Inc., 1963.
- [5] D. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, 4a. Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2014.
- [6] B. Knorr, Uniform Relativistic Acceleration, 2010. Disponível em <http://www.physik.uni-leipzig.de/~schiller/ed10/Uniform%20relativistic%20acceleration.pdf>
- [7] S. A. Fulling, Nonuniqueness canonical field quantization in Riemannian Space-Time, *Phys. Rev. D* 7, 2850 (1973)
- [8] P. C. W. Davies, Scalar particle production in Schwarzschild and Rindler metrics, *J. Phys. A* 8, 609 (1975)
- [9] W. G. Unruh, Notes on black hole evaporation, *Phys. Rev. D* 14, 870 (1976)
- [10] S. A. Fulling e G. Matsas, Unruh Effect, Scholarpedia, 2014. Disponível em http://www.scholarpedia.org/article/Unruh_effect
- [11] J. L. Thiffeault, M. Purcell e R. Correll, What a Rindler Observer Sees in a Minkowski Vacuum, 1993. Disponível em <https://www.math.wisc.edu/~jeanluc/talks/rindler.pdf>
- [12] L. C. B. Crispino, A. Higuchi, G. Matsas, The Unruh effect and its applications, 2008. arXiv:0710.5373
- [13] P. Chen e T. Tajima, Testing Unruh Radiation with Ultraintense Lasers, *Phys. Rev Lett.* 83, 256 (1999)

- [14] R. Schutzhold, G. Schaller e D. Habs, Signature of the Unruh Effect from electrons Accelerated by Ultrasong Laser Fields, Phys. Rev. Lett. 97, 121302 (2006)