

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Artur Vemado, Leonardo B. Martins

Radiação Síncroton e Onduladores

São Paulo
2017

Artur Vemado, Leonardo B. Martins

Radiação Síncroton e Onduladores

Monografia solicitada pelo Prof. Dr. Luís
Raul Weber Abramo do Instituto de Física
do Departamento de Física Matemática pela
Disciplina de Eletromagnetismo II.

São Paulo

2017

Sumário

1. <i>Introdução</i>	5
2. <i>Radiação - Uma breve introdução</i>	7
2.1 Partículas carregadas aceleradas	7
2.2 Partículas relativísticas	8
2.3 Distribuição angular da radiação	9
3. <i>Radiação Síncroton</i>	11
3.1 Propriedades	11
3.2 Potência total da radiação síncroton	12
3.3 Espectro	12
4. <i>Introdução aos Onduladores</i>	15
4.1 Dinâmica no Ondulador	15
4.2 Ângulo de emissão	16
4.3 Frequência emitida	17
4.4 Potência e energia	18
4.5 Espectro de radiação	18
4.6 FEL - Laser de elétrons livres	20
5. <i>Uma aplicação na medicina</i>	23
5.1 Imageamento - Angiografia coronária	23
6. <i>Conclusões</i>	25

Introdução

Já é conhecido que partículas carregadas aceleradas emitem radiação eletromagnética. Um caso especial é quando a carga move-se com velocidades relativísticas e é forçada à seguir trajetórias circulares pela ação de campos magnéticos. Neste caso, temos o que é conhecido como radiação síncroton, que é emitida, por exemplo, por fontes cósmicas tal como a Nebulosa do Caranguejo, que é o remanescente de uma explosão de supernova. A luz dessa fonte vem de elétrons de altas energias que circundam ao redor das linhas de campo magnético devido a presença de um pulsar.

Neste trabalho apresentaremos as propriedades e as características da radiação síncroton em geral. Além disso, sabe-se que a radiação síncroton é muito utilizada em aceleradores de partículas, então falaremos de um dos casos, que são os onduladores.

Onduladores são equipamentos que geram um campo magnético no seu interior que varia senoidalmente com a posição. O campo magnético possui N ciclos, com N variando de 20 a 100, em geral. Além disso, este campo pode ter uma direção vertical, nos onduladores planares, ou helicoidal, nos onduladores helicoidais.

Possuem um formato de paralelepípedo, sendo usados principalmente em aceleradores de partículas síncrotons. Quando uma partícula carregada (como, por exemplo, um elétron) incide dentro do ondulador, ela fica sujeita a uma força devido ao campo magnético, que varia a medida que a partícula se move. Como consequência, ela passa a executar um movimento oscilatório e emite radiação, numa direção ao longo do eixo do ondulador (figura 1.1). A vantagem dos onduladores é que a radiação emitida através deles esta muito mais concentrada em uma direção, com seu espectro de energia possuindo picos de intensidade.

Um ondulador é caracterizado pelo seu valor da constante K , que é definida como

$K = qB_0/km\beta c$, onde q e m são a carga e a massa da partícula no ondulator, B_0 é a amplitude do campo magnético, βc é a velocidade da partícula e $k = 2\pi/\lambda_u$ (veja a figura 1.1). Os chamados onduladores fracos possuem $K \ll 1$, enquanto os onduladores fortes têm $K > 1$. Também existe outro equipamento, denominado wiggler, cujo princípio de funcionamento é igual ao do ondulator, porém possui $K \gg 1$ e um N muito menor (ver Wiedemann (1999)).

Neste trabalho, por simplicidade, vamos tratar apenas dos onduladores fracos e planos.

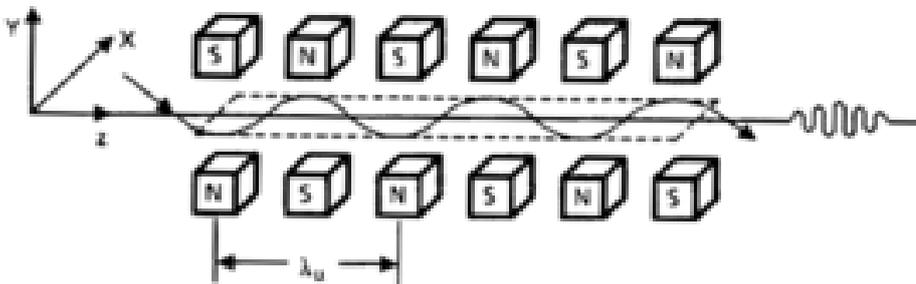


Figura 1.1: Desenho simplificado de um ondulator e sistema de coordenadas adotado. Figura retirada de: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Undulator_wih_axis.png

Radiação - Uma breve introdução

2.1 Partículas carregadas aceleradas

As ondas eletromagnéticas não viajam instantaneamente, ou seja, possuem velocidade finita igual à velocidade da luz, c . Isso implica que se a carga estiver localizada em um ponto $\mathbf{r}_o(t)$ em um tempo t , então em um ponto qualquer, $\mathbf{r}(t)$, os campos sentidos serão os emitidos em $\mathbf{r}_o(t')$ em um tempo $t' = t - |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_o(t')|/c$, que diz respeito à um tempo anterior ao tempo t , como mostra a figura 2.1.

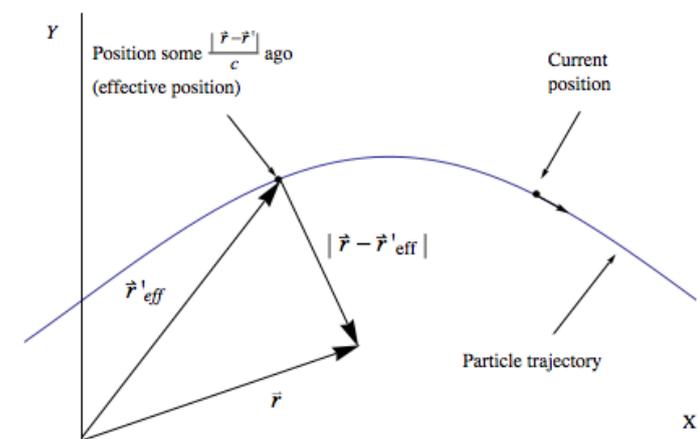


Figura 2.1: Esquema para exemplificar o tempo retardado. Figura retirada de <http://pages.vassar.edu/magnes/2012/04/02/time-dependent-potentials-and-fields-proposal/>

A partir desse cenário podemos calcular os potenciais retardados, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $V(\mathbf{r}, t)$ e conseqüentemente, através das equações $\mathbf{E} = -\nabla V - \partial \mathbf{A} / \partial t$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Os potenciais retardados para cargas pontuais são os chamados potenciais de Lienard-Wiechart dados por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}(t')}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t')/c)R} = \frac{\mathbf{v}(t')}{c^2} V(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{R}(t') = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_o(t')$, q é a carga da partícula e $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}_o(t)$. É importante notar o fator $(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t')/c)$ que implica em potenciais mais fortes a frente da fonte e alinhado com a trajetória da partícula, aumentando o efeito quanto maior sua velocidade. Outro fato, que é o principal ponto dessa seção, é que o atraso é o que possibilita a carga a irradiar. Note que há uma dependência implícita em r no tempo retardado t' , o que leva a uma dependência em $1/r$ nos campos eletromagnéticos, e não só uma em $1/r^2$ como nos campos estáticos. Lembrando que a potência é dada por $\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ (onde \mathbf{S} é o vetor de Poynting e \mathbf{A} , nesse caso, é a área da superfície) temos um fluxo de energia eletromagnética no infinito.

Após diferenciarmos os potenciais e pegarmos apenas a componente de radiação (ver Griffiths (1999) e Jackson (1998) para mais detalhes) obtemos, finalmente que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{R}}}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R} \times \frac{1}{c} [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right\} \\ \mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}(t')/c$.

2.2 Partículas relativísticas

Para o escopo deste trabalho estamos interessados em partículas movendo-se relativisticamente, ou seja, com velocidade da ordem de c . Mais importante, é calcular a potência emitida neste caso. Para tal, utilizamos a invariância da potência total emitida por Lorentz, ou seja, se considerarmos um referencial inercial instantâneo, K' , tal que a partícula tenha velocidade zero em um certo momento e move-se não relativisticamente para tempos vizinhos infinitesimais, teremos que a potência total emitida nesse referencial será igual comparado com o referencial, K , de um observador. Assim, temos que

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW'}{dt'} = P' \quad (2.3)$$

onde dW é a energia emitida em um intervalo de tempo dt . Na eq. 2.3 a potência P é dada pela fórmula de Larmor (ver Griffiths (1999)) dada por

$$P = \frac{\mu_0 q^2 |\mathbf{a}'|^2}{6\pi c} \quad (2.4)$$

onde \mathbf{a}' é a tri-aceleração em K' . Com isso, transformando para o referencial de um observador em K podemos reescrever a eq. 2.4 para uma partícula relativística, como

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \gamma^6 (a^2 - |\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a}|^2) \quad (2.5)$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

2.3 Distribuição angular da radiação

Embora a potência total emitida seja invariante por Lorentz, a distribuição angular não é. Então estamos interessados em saber como $dW'/d\Omega'$ se transforma para resultar $dW/d\Omega$, onde $d\Omega$ é o ângulo sólido. Com isso, utilizando o fato de que no referencial K' podemos aproximar a distribuição angular como a de um dipolo, podemos calcular $dP/d\Omega$ no referencial do observador. A derivação é longa mas simples de ser feita se utilizarmos a fórmula da aberração da luz e o fato que a aceleração é perpendicular a velocidade, já que estamos tratando de radiação síncroton. Isso resulta em

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^3 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (2.6)$$

Podemos expandir esse resultado para o limite ultra relativístico, onde $\gamma \gg 1$, ou $\beta \sim 1$. Neste caso, o fator $1 - \beta \cos \theta$ se torna muito pequeno, podendo ser expandido, resultando em uma distribuição dada por

$$\frac{dP}{d\Omega} \sim \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{8\gamma^6}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right]. \quad (2.7)$$

A partir das eqs.2.6 e 2.7 é possível mostrar que o pico dessa potência se dá em um cone de $\theta \sim 1/\gamma$, ou seja, a radiação possui alta colimação quanto maior a velocidade da partícula. Isso é uma das principais propriedades da radiação síncroton.

Radiação Síncroton

3.1 Propriedades

A derivação do capítulo anterior, onde uma partícula é acelerada perpendicularmente à velocidade e esta encontra-se em um regime relativístico, diz respeito à radiação síncroton. Esta radiação é encontrada não só em fontes cósmicas, mas também podem ser encontradas em instalações feitas pelo ser humano. Esses laboratórios consistem em canos circulares evacuados onde elétrons são forçados a seguir uma trajetória circular sob ação de ímãs colocados ao longo da circunferência. Os elétrons entram no *storage ring* só depois de serem acelerados por um acelerador linear e depois por um anel amplificador que deixam os elétrons com energia da ordem de giga elétron-volts (Gev).

As principais propriedades dessa radiação são:

- alta intensidade;
- espectro amplo e contínuo (do infravermelho até raio-X duro);
- alto grau de colimação natural e polarização;
- brilho alto devido a seção de choque do raio ser pequena.

Para darmos ordem de grandeza aos cálculos vamos lembrar que o ângulo de colimação da radiação é dado por γ^{-1} . Com isso, usando valores adequados temos que $\gamma = 1957\epsilon$ (Gev). Para um *storage ring* com $\epsilon = 1$ Gev segue que $\gamma^{-1} \sim 0.029^\circ$, o que confirma que os raios são altamente colimados.

3.2 Potência total da radiação síncroton

A aceleração dos elétrons nos *storage rings* é dada pela força de Lorentz (unidades de Gauss)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \quad (3.1)$$

onde \mathbf{p} é o momento do elétron e e a sua carga. A potência irradiada (eq. 2.5), já calculada no capítulo anterior, pode ser reescrita em função da energia ϵ do elétron (ver Mobilio et al. (2015)), como sendo

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{R^2} \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right)^4 \quad (3.2)$$

onde R é o raio da órbita circular. Devemos notar a dependência da potência com ϵ^4 , pois para manter a potência a valores razoáveis, a fim de aumentar a energia do *storage ring*, é preciso também aumentar seu raio. Outro fator importante é a dependência com m^{-4} , e é por isso que nos laboratórios são comumente usados elétrons e não prótons.

3.3 Espectro

A derivação do espectro da radiação síncroton é algo complexo e longo, mas pode ser qualitativamente entendido. Suponha que há apenas um elétron em órbita circular e que há um detector, apontando tangencialmente à órbita. Este receberá radiação ao longo de um arco $\sim 2/\gamma$, e isto originará um pulso que não será como uma função de Dirac, mas sim, um pulso mais largo. Apesar de um elétron, em princípio, ter um espectro discreto, na prática, a distribuição espectral de muitos elétrons é contínua devido à oscilações estatísticas dos elétrons ao redor da sua órbita principal, à flutuações em sua energia cinética e à natureza estatística da emissão por si só. Todos esses efeitos resultam em um alargamento do espectro e o tornam contínuo.

Após os argumentos físicos anteriores, podemos derivar o espectro da potência irradiada para um único elétron, sendo este dado por

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 m_e c} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx \quad (3.3)$$

onde $K_{5/3}$ é a função de Bessel modificada de ordem $5/3$, ω é a frequência e $\omega_c = \frac{3}{2} \frac{eB}{m_e} \gamma^2 \sin \alpha$ é a frequência crítica. A figura 3.1 demonstra a forma do espectro da radiação síncroton

por um elétron. Nela

$$F(x) = x \int_x^\infty K_{5/3}(y) dy \quad (3.4)$$

e embora tenha quatro imagens com a mesma função, elas parecem diferentes pois possuem escalas diferentes para mostrar informações que são suprimidas por outras. No painel inferior à esquerda temos, simplesmente o gráfico da função $F(x)$ por x em uma escala linear, o que apaga informação do espectro abaixo do pico, onde $x \approx 0.29$. O gráfico em escala logarítmica (painel superior à esquerda) mostra que o espectro de baixa frequência tem uma inclinação de $\sim 1/3$, o que omite o fato de que a maior parte da potência é emitida em uma frequência próxima de $x \sim 1$. A potência por unidade de $\log x$, que é plotada no painel superior à direita, tem uma inclinação de $\sim 4/3$, o que deixa claro que a maior parte da potência é emitida em $x \sim 1$. O painel inferior à direita grafica $F(\log x)$ em escala linear na ordenada, mas escala logarítmica na abscissa. Claramente, mostra que quase toda a emissão se dá próximo de 1, mas diz que à baixas frequências o espectro é um lei de potências.

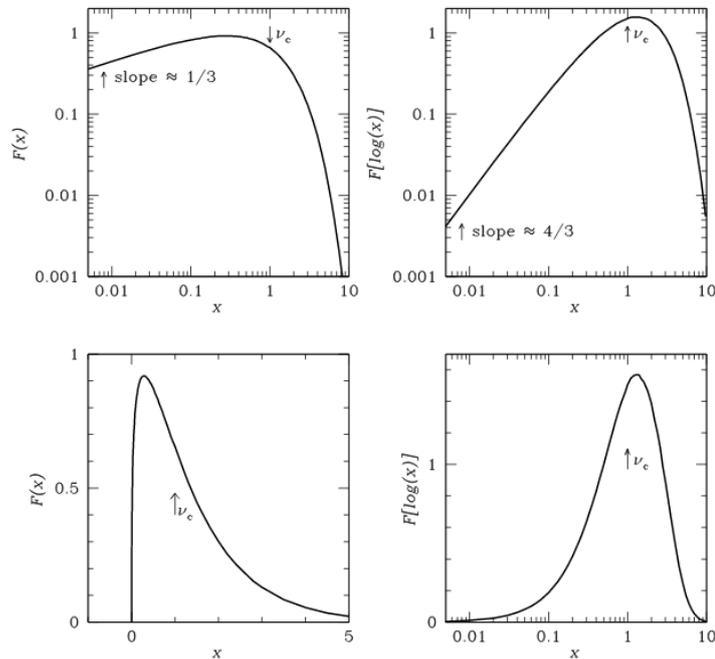


Figura 3.1: Espectro da radiação síncrotron emitida por um elétron. A figura foi plotada em quatro escalas diferentes para mostrar todos os aspectos do espectro. Em todas as figuras é demonstrado a frequência crítica. Figura retirada de: <http://www.cv.nrao.edu/course/ast534/SynchrotronSpectrum.html>

Introdução aos Onduladores

4.1 Dinâmica no Ondulador

Vamos estudar o movimento de uma partícula com carga q e massa m dentro do ondulator, supondo que sua velocidade inicial é $\mathbf{v} = \beta c \hat{\mathbf{z}}$. O campo magnético pode ser escrito matematicamente como $\mathbf{B} = B_0 \cos(kz) \hat{\mathbf{y}}$, onde $k = 2\pi/\lambda_u$. Quando a partícula entra em contato com o campo magnético, uma força é exercida sobre ela, fazendo com que sua velocidade tenha uma componente não nula na direção do eixo x . Assim, seu movimento ocorre no plano xz . Essa força é

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ (como a força magnética não realiza trabalho, a velocidade total v e o fator de Lorentz são constantes). Escrevendo a velocidade como $\mathbf{v} = \dot{x}(t) \hat{\mathbf{x}} + \dot{z}(t) \hat{\mathbf{z}}$, onde o ponto denota derivada temporal, e realizando o produto vetorial do lado direito, chegamos a

$$\ddot{x} = \frac{qB_0}{\gamma m} \cos(kz) \dot{z} \quad (4.2)$$

$$\ddot{z} = -\frac{qB_0}{\gamma m} \cos(kz) \dot{x} \quad (4.3)$$

que são equações diferenciais acopladas. É fácil ver que a primeira derivada de $x(t)$ é:

$$v_x = \dot{x} = \frac{K\beta c}{\gamma} \sin(kz) \quad (4.4)$$

considerando que considerando que, em $z = 0$, $\dot{x} = 0$. De fato, derivando eq. 4.2 e usando a regra da cadeia, obtemos a eq.4.4. Já a componente longitudinal da velocidade é

$$v_z = \dot{z} = \sqrt{v^2 - v_x^2} \quad (4.5)$$

$$v_z = \beta c \sqrt{1 - \frac{K^2}{\gamma^2} \sin^2(kz)} \quad (4.6)$$

Como estamos considerando apenas onduladores fracos, vemos que o segundo termo dentro da raiz da equação acima é muito pequeno, já que $\gamma \gg 1$ devido as velocidades relativísticas, Portanto podemos desprezá-lo e fazer

$$v_z \approx v = \beta c \quad (4.7)$$

integrando, obtemos $z(t) = \beta ct$, e substituindo isto na eq. 4.4, chegamos em

$$v_x = \frac{K\beta c}{\gamma} \sin(k\beta ct) \quad (4.8)$$

Com isso, velocidade total é

$$\mathbf{v} = \frac{K\beta c}{\gamma} \sin(\omega_u t) \hat{\mathbf{x}} + \beta c \hat{\mathbf{z}} \quad (4.9)$$

onde $\omega_u = k\beta c$. Também é conveniente definir

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{K\beta}{\gamma} \sin(\omega_u t) \hat{\mathbf{x}} + \beta \hat{\mathbf{z}} \quad (4.10)$$

Integrando a eq. 4.9, encontramos que o vetor posição da carga como função do tempo é

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{K}{\gamma k_u} \cos(\omega_u t) \hat{\mathbf{x}} + \beta ct \hat{\mathbf{z}} \quad (4.11)$$

Desse modo, a partícula descreve um movimento oscilatório enquanto se move ao longo do ondulador.

4.2 Ângulo de emissão

Como já foi dito, o feixe de radiação emitido por uma carga acelerada com velocidade relativística tem a forma de uma espécie de cone com abertura angular $\approx 2/\gamma$. No ondulador, como o movimento é oscilatório, a partícula em questão irá emitir radiação numa direção que faz um ângulo α com o eixo z . Vamos calcular este ângulo. Integrando a eq. 4.4, vemos que podemos escrever x em função de z aproximadamente como

$$x(z) = -\frac{K}{\gamma k} \cos(kz) \quad (4.12)$$

Pela figura 4.1, vemos que é possível escrever

$$\tan(\alpha) = \frac{dx}{dz} = \frac{K}{\gamma} \sin(kz) \approx \alpha \quad (4.13)$$

já que estamos considerando onduladores fracos. O valor máximo do ângulo de emissão é $\alpha_{max} = K/\gamma$. Assim, vemos que o ângulo de emissão de radiação é muito pequeno e que, portanto, o feixe está quase todo concentrado na direção z . Por isso, esses equipamentos são também muito usados na confecção de lasers, já que eles concentram a radiação emitida numa direção específica.

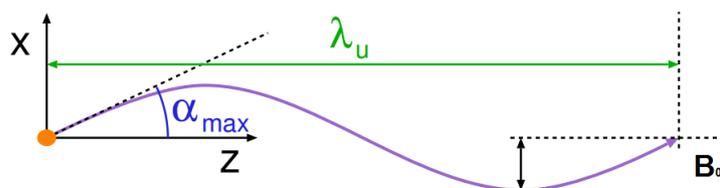


Figura 4.1: Trajetória da partícula no plano xz e ângulo máximo de emissão. Figura modificada e retirada de: http://phys.uit.edu/~segre/phys570/10F/lecture_06.pdf

4.3 Frequência emitida

Agora vamos considerar que a partícula no ondulador emite radiação que é detectada por um observador numa direção que forma um ângulo θ com o eixo z . As ondas emitidas em um mesmo ângulo irão interferir entre si (Tsallis (1983)). Suponha que o elétron emite radiação num instante de tempo $t = t_0$. Depois de um período $T = \lambda_u/v_z = \lambda_u/\beta c$, ele irá emitir novamente na mesma direção. Para que haja interferência construtiva, as ondas emitidas devem estar em fase, ou seja, o comprimento de onda da radiação emitida deve ser tal que,

$$\lambda = Tc - \lambda_u \cos \theta \quad (4.14)$$

onde $Tc = \lambda_u/\beta$ é o comprimento percorrido pela radiação no tempo T (veja a figura 4.2). Usando isto e fazendo a aproximação $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, já que θ é pequeno, temos

$$\lambda = \lambda_u \left(\frac{1 - \beta}{\beta} + \frac{\theta^2}{2} \right) \quad (4.15)$$

notando que $\gamma^2 = 1/(1 - \beta^2) = 1/[(1 - \beta)(1 + \beta)]$, vamos tomar $\beta \approx 1$ quando ele não aparece subtraído de 1. Assim, $1 - \beta \approx 1/2\gamma^2$ e

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} (1 + \gamma^2 \theta^2) \quad (4.16)$$

Também podemos escrever a frequência da radiação emitida

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{4\pi c\gamma^2}{\lambda_u} \frac{1}{1 + \gamma^2\theta^2} \quad (4.17)$$

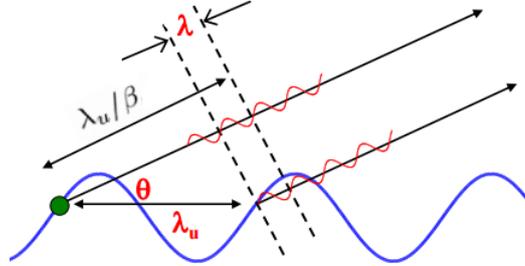


Figura 4.2: Interferência construtiva entre dois pontos de emissão de radiação. Figura modificada e retirada de: <https://www.cockcroft.ac.uk/wp-content/uploads/2014/12/CLarke-Lecture-3.pdf>

4.4 Potência e energia

Vamos calcular a potência da radiação emitida pela partícula. Usando a eq. 2.5, obtemos

$$P = \frac{\mu_0 q^2 c}{6\pi} (\gamma K \beta \omega_u)^2 \cos^2(\omega_u t) \quad (4.18)$$

e podemos definir a potência média como sendo

$$\bar{P} = \frac{\mu_0 q^2 c}{12\pi} (\gamma K \beta \omega_u)^2 \quad (4.19)$$

Se o ondulator tem um comprimento L , a energia total irradiada pela carga é

$$U = \frac{\mu_0 q^2}{12\pi} (\gamma K \beta \omega_u)^2 L \quad (4.20)$$

4.5 Espectro de radiação

De acordo com Hofmann (1998), a distribuição espectral de energia é dada por

$$\frac{d^2 U}{d\Omega d\omega} = \frac{2R^2 |\bar{E}|^2}{\mu_0 c} \quad (4.21)$$

onde \bar{E} é a transformada de Fourier do campo elétrico produzido pela carga, Ω é o ângulo sólido e $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, sendo \mathbf{r} é o vetor posição da carga e \mathbf{r}' o do ponto onde a radiação é

detectada. Vamos considerar que $r' \gg r$, e que o ângulo θ é muito pequeno, de modo que podemos fazer as aproximações $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$. Assim

$$\hat{\mathbf{R}} \approx \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \hat{\mathbf{z}} \quad (4.22)$$

e sendo

$$\dot{\beta} = \frac{\mathbf{a}}{c} = -\frac{\beta K \omega_u}{\gamma} \cos(\omega_u t) \hat{\mathbf{x}} \quad (4.23)$$

podemos calcular o campo elétrico através da eq. 2.2, obtendo

$$\mathbf{E}(t) = \frac{4r_0 c B_0 \gamma^3 \cos(\omega_u t')}{r'(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \{ [1 - \gamma^2 \theta^2 \cos(2\varphi)] \hat{\mathbf{x}} + \gamma^2 \theta^2 \sin(2\varphi) \hat{\mathbf{y}} \} \quad (4.24)$$

onde estamos desprezando a componente na direção z . O tempo retardado é dado por: $t' = t - R/c$, onde podemos escrever $R = \sqrt{r'^2 + (\beta c t')^2 - 2r'\beta c t' \cos \theta}$. Graças às aproximações e considerações feitas, podemos expandir esta raiz, chegando a

$$r \approx r' \left(1 - \frac{\beta c t'}{r'} + \frac{\beta c t' \theta^2}{2r'}\right) \quad (4.25)$$

fazendo a aproximação de que $1 - \beta \approx 1/2\gamma^2$. E, usando a equação acima, o tempo t pode ser escrito como função do tempo retardado do seguinte modo

$$t \approx \frac{r'}{c} + \left(\frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2\gamma^2}\right) t' \quad (4.26)$$

Assim, podemos escrever o campo elétrico como função de t através da equação acima, e calcular sua transformada de Fourier, onde a integral deve ser calculada entre os instantes de tempo de incidência da partícula no ondulator e de saída. Como o ondulator tem um comprimento $L = N\lambda_u$, esses instantes de tempo são $t_1 = -L/2\beta c$ e $t_2 = L/2\beta c$, respectivamente. Usando a eq. 4.21, pode-se mostrar que (ver Hofmann (1998))

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{d\Omega d\omega} &= 2r_0 q^2 c^2 B_0^2 \frac{N\lambda_u \gamma^4 [(1 + \gamma^2 \theta^2 \cos(2\varphi)) + (\gamma^2 \theta^2 \sin(2\varphi))^2]}{\pi m c^2 (1 + \gamma^2 \theta^2)^5} \\ &\times \frac{N}{\omega_i} \left(\frac{\sin((\omega - \omega_i)\pi N/\omega_i)}{(\omega - \omega_i)\pi N/\omega_i} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde definimos

$$\omega_i = \frac{2\gamma^2 \omega_u}{1 + \gamma^2 \theta^2} \quad (4.28)$$

Vemos, por este resultado que o espectro de uma partícula no ondulator fraco possui um pico. O máximo de emissão ocorre para $\omega = \omega_i$, que é exatamente o resultado encontrado anteriormente, se fizermos $\beta \approx 1$.

4.6 FEL - Laser de elétrons livres

Devido a sua capacidade de produzir um feixe de radiação intenso, onduladores possuem diversas aplicações práticas. Uma delas é o Laser de Elétrons Livres (FEL, na sigla em inglês). Os FELs produzem no seu interior feixes de elétrons que são desviados para um ondulador (alguns tipos de FELs usam wigglers), onde cada elétron é acelerado e passa a emitir radiação. O ondulador é colocado entre dois espelhos, que refletem a radiação gerada através dele, funcionando como uma cavidade ressonante e gerando uma onda estacionária, assim como mostra figura 4.3. Com isso, a radiação se torna suficientemente forte, tal que o campo elétrico transversal da radiação interagem com os elétrons transversos criados pelo movimento senoidal, fazendo com que alguns elétrons ganhem energia e outros percam para os campos óticos via força de Lorentz.

Essa modulação de energia evolui na densidade de modulação dos elétrons com um período de um comprimento de onda ótico. Com isso, os elétrons ficam amontoados em microgrupos, separados por um comprimento de onda ótico ao longo do eixo. Um ondulador sozinho faria com que os elétrons irradiassem independentemente (incoerentemente), mas um microgrupo de elétrons em fase, e os campos, adicionam à radiação uma coerência.

A radiação cresce intensamente, causando microgrupamentos cada vez mais concentrados de elétrons. Este processo continua até que os elétrons estejam completamente agrupados em fase e a radiação alcança a saturação, tendo uma potência muitas ordens de magnitude maior do que a radiação do ondulador sozinho (ver Feldhaus et al. (2005)).

Um dos espelhos não é completamente reflexivo, e permite a passagem de parte da radiação, criando assim o feixe do laser.

O comprimento de onda da radiação emitida é dado aproximadamente pela eq. 4.16. Como podemos perceber, esse comprimento de onda só depende das características do campo magnético e da velocidade dos elétrons, que pode ser facilmente alterada, permitindo assim obtermos diferentes comprimentos de onda emitidos pelo laser.

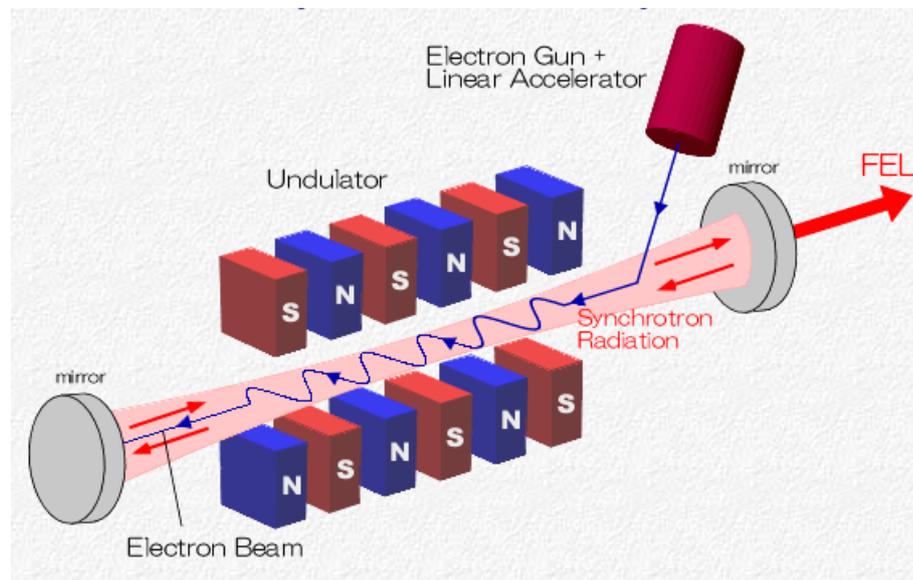


Figura 4.3: Esquema ilustrativo de um laser de elétrons livres. Figura retirada de: http://www.rs.noda.tus.ac.jp/fel-tus/English/E-About_.html

Uma aplicação na medicina

Há um grande número de técnicas que utilizam a radiação síncroton. Neste trabalho citaremos uma aplicação importante, que diz respeito a área de saúde.

5.1 Imageamento - Angiografia coronária

Doenças cardiovasculares são grande causadoras de morte no mundo. Há grande interesse em desenvolver sistemas de imageamento que podem identificar anormalidades tais como estenose (estreitamento) na artéria coronária antes de ocorrer o infarto miocárdial. O método preferido para imageamento das artérias coronárias é chamado de angiografia coronária seletiva. É um método invasivo que requer que um cateter seja introduzido pelo braço ou perna no óstio (entrada de um canal) da artéria coronária de interesse. Um agente contrastante (normalmente iodo) é injetado e uma série de imagens feitas com um gerador de raios-x convencional e um detector intensificador de imagens.

O problema é que, apesar das imagens serem de grande qualidade, ainda temos os movimentos do paciente e falta de possibilidade de uma nova execução dos movimentos do coração, esta técnica fica limitada.

Além disso, esta técnica só é utilizada quando há uma substancial chance do paciente ter uma doença no coração, porque há muito risco para o paciente com a cateterização. Há uma alta taxa de mortalidade devido à esse processo.

Uma nova técnica chamada de dicromografia utiliza uma variação descontínua de absorção de raio-x na superfície de absorção de um elemento, tal como o iodo. Antes da radiação síncroton ser descoberta, foi provado que era quase impossível criar feixes de raios-x que fossem monocromáticos e um fluxo suficiente para a técnica ser útil. A intensidade

das fontes de radiação síncrotron chegam à regiões de 30 keV, que tornou a dicromografia factível.

Com essa técnica, se duas imagens uma em cima da outra, logo abaixo da barreira K (energia de ligação da camada K de um átomo) são gravadas, então uma imagem criada pela subtração logarítmica de uma pra outra é basicamente composta do sinal do iodo. Para uma diferença de energia de 300 eV entre dois feixes monocromáticos de raio-x, a sensibilidade é 10^4 vezes maior para o iodo do que para um tecido mole. Isso é o suficiente para as imagens serem gravadas com muito menos agentes contrastantes, o que tornaria mais seguro a injeção intravenosa.

Este é só um do exemplos que são usados na medicina. Outros exemplos mais complexos do assunto de imageamento pode ser encontrado em Lewis (1997).

Conclusões

Após as discussões anteriores podemos fazer algumas afirmações a respeito da radiação síncroton. Como visto, esse tipo de radiação ocorre quando uma partícula carregada move-se com velocidades relativísticas e estão aceleradas de forma que a velocidade seja perpendicular à aceleração.

A sua grande vantagem é que os raios são extremamente colimados e de alta intensidade. Pode ser utilizada para diversos experimentos devido ao seu amplo espectro contínuo (desde o infravermelho até raio-x duro).

Há milhares de aplicações à radiação síncroton em uma ampla área da ciência. Podemos usá-la na medicina, na engenharia, na física de materiais, ciência ambiental, paleontologia e etc.

Uma maneira de se produzir radiação síncroton é através dos onduladores. Esses equipamentos emitem um feixe de radiação bastante colimado e de alta intensidade (característica intrínseca da radiação síncroton). Os onduladores são utilizados em lasers de elétrons livres, que foram discutidos no presente trabalho. Suas aplicações abrangem praticamente as mesmas áreas da radiação síncroton em geral.

Referências Bibliográficas

- Feldhaus J., Arthur J., Hasting J. B., X-ray free-electron lasers, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2005, vol. 38
- Griffiths D. J., *Introduction to Eletrodynamics*. 3rd Ed., 1999
- Hofmann A., *Characteristics of Synchrotron Radiation in CERN Accelerator School on Synchrotron Radiation and Free Electrons Lasers*. S. Turner, 1998
- Jackson J. D., *Classical Eletrodynamics*. 3rd Ed., 1998
- Lewis R., Medical applications of synchrotron radiation x-rays, *Phys. Med. Biol.*, 1997, vol. 42, p. 1213–1243
- Mobilio S., Boscherini M., Meneghini C., *Synchrotron Radiation - Basics, Methods and Applications*. Springer, 2015
- Tsalis C., *Onduladores e "Wigglers" - Aspectos Teóricos*. SBPF, Rio de Janeiro, 1983
- Wiedemann H., *Particle Accelerator Physics II*. 2nd ed. Berlin: Springer, 1999