Mecânica Clássica 1 (Sem. 1/2017): Provinha 4 (23/05)

Nome:

Número USP:

Três objetos idênticos de massa m podem deslizar livremente sobre um trilho circular de raio R. Os corpos estão ligados por molas ideais de constante elástica k.

1. Determine o número de graus de liberdade do sistema.
2. Escreva a Lagrangeana do sistema.
3. Escreva as matrizes $\mathbf{T}$ e $\mathbf{V}$.
4. Determine as frequências naturais de oscilação.
5. Determine os modos normais de oscilação.

Gabarito

3 graus de liberdade.

Criamos nossas coordenadas para serem os ângulos das partículas das posições iniciais e de equilíbrio.

$$
\begin{aligned}
\beta 1 &= (\theta_1 + 0) \\
\beta 2 &= (\theta_2 + \theta_{2i}) \\
\beta 3 &= (\theta_3 + \theta_{3i}) \\
\theta_{2i} + \theta_{3i} \ &= 2\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&L = T - V \\
&T = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\beta_1}^2 + \dot{\beta_2}^2 + \dot{\beta_3}^2\right) \\
&V = \frac{1}{2}k\left[(\beta_2 - \beta_1)^2 + (\beta_3 - \beta_2)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2\right] \\
&L = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\beta_1}^2 + \dot{\beta_2}^2 + \dot{\beta_3}^2\right) - \frac{1}{2}k\left[(\beta_2 - \beta_1)^2 + (\beta_3 - \beta_2)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{T} = R^2 \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbb{V} = \begin{bmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & 2k & -k \\ -k & -k & 2k \end{bmatrix}
$$

$$\left|\mathbb{V}-\omega^2\mathbb{T}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2k-m\omega^2 & -k & -k \\ -k & 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & -k & 2k-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$m^3\omega^2\left[\omega^4 - 6\frac{k}{m}\omega^2 + 9\left(\frac{k}{9}\right)^2\right] = 0$$

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{6k}{m} \pm \sqrt{\frac{36k^2}{m^2} - 4\frac{9k^2}{m^2}}\right)$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{3k}{m}$$

para ω_0 temos:

$$\begin{bmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & 2k & -k \\ -k & -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$2ka_1 - ka_2 - ka_3 = 0$$

$$-ka_1 - 2ka_2 - ka_3 = 0$$

$$-ka_1 - ka_2 - 2ka_3 = 0$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para ω_2 temos:

$$\begin{bmatrix} -k & -k & -k \\ -k & -k & -k \\ -k & -k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$