Indutância / Circuitos RL

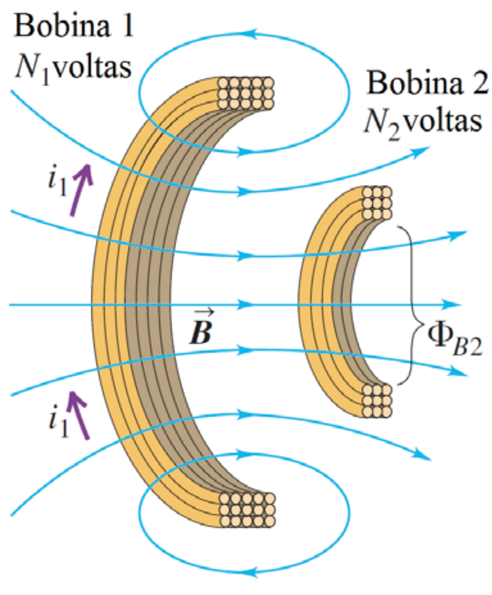
Prof. Cristiano Oliveira
Ed. Basilio Jafet – sala 202
crislpo@if.usp.br

Indutância Mútua

Anteriormente consideramos a interação magnética entre dois fios que conduziam correntes ***estacionárias***: a corrente de um fio produzia um campo magnético que exercia uma força sobre a corrente de outro fio.

No entanto, quando existe uma corrente ***variável*** em um dos circuitos, ocorre uma interação adicional entre os dois circuitos.
Sejam as duas bobinas indicadas abaixo. Uma corrente circulando na bobina 1 produz um campo magnético ***B*** e, portanto, um fluxo magnético através da bobina 2.

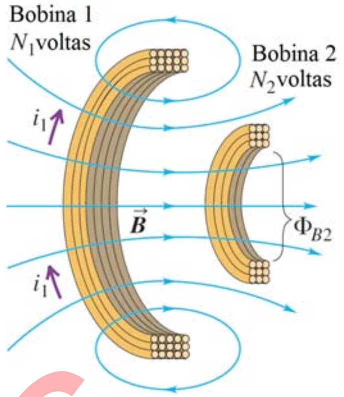
Quando a corrente na bobina 1 varia, o fluxo magnético através da bobina 2 também varia; de acordo com a lei de Faraday, isso produz uma ***fem*** na bobina 2. sendo assim, a variação da corrente em um dos circuitos produz uma corrente induzida no outro circuito.



Nesta figura uma corrente i_1 na bobina 1 induz um campo magnético e algumas das linhas de campo passam através da bobina 2.

Seja Φ_{B2} o fluxo magnético através de ***cada espira*** da bobina 2 produzido pela corrente i_1 na bobina 1

Indutância Mútua



O campo magnético é proporcional a i_1 de modo que Φ_{B2} também é proporcional à i_1.

Quando i_1 varia, Φ_{B2} também varia e assim induz uma ***fem*** ε_2 na bobina 2 dada por:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt}$$

Pode-se representar a proporcionalidade entre Φ_{B2} e i_1 na forma $N_2 \Phi_{B2}$ = (constante) i_1. Introduzindo uma constante de proporcionalidade M21, chamada de ***indutância mútua*** das duas bobinas, escrevemos:

$$N_2 \Phi_{B2} = M_{21} i_1$$

Onde Φ_{B2} é o fluxo magnético através de uma única espira da bobina 2. Portanto,

$$N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

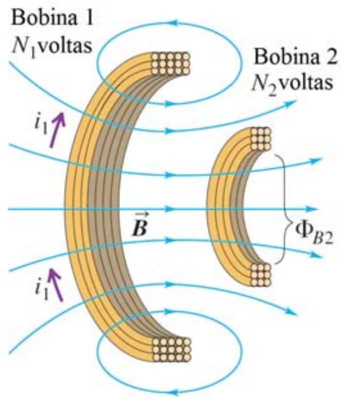
E podemos escrever a ***fem*** na bobina 2 como:

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

A indutância mútua definida acima pode ser escrita na forma:

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1}$$

Indutância Mútua



Podemos repetir o raciocínio para o caso em que uma corrente variável i_2 na bobina 2 produz um fluxo magnético variável Φ_{B1} e induz uma ***fem*** ε_1 na bobina 1.

Neste caso teríamos a constante M_{12} que, em principio, poderia ser imaginada como diferente de M_{21}. Contudo, verifica-se na prática que M_{12} é ***<u>sempre</u>*** igual a M_{21} e assim pode-se utilizar o símbolo M para designar essa indutância mútua.

Assim:

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

fem mutuamente induzida

Onde a indutância mútua é:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{B1}}{i_2}$$

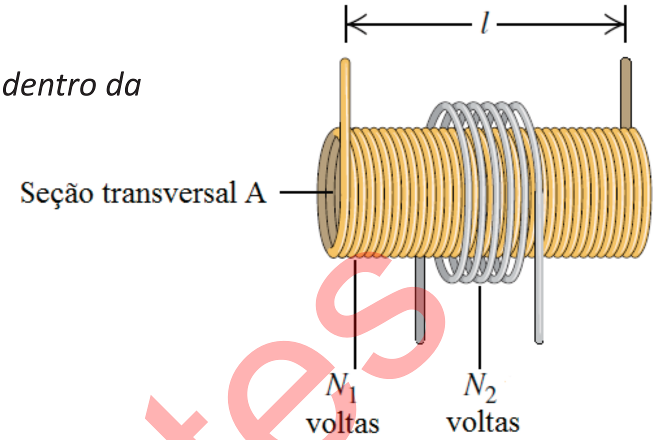
Indutância mútua

A unidade de indutância mútua, no SI, é o ***henry*** (1H), sendo que:

$$1\ \text{H} = 1\ \text{Wb/A} = 1\ \text{V} \cdot \text{s/A} = 1\ \Omega \cdot \text{s} = 1\ \text{J/A}^2$$

Similarmente ao caso de capacitância, 1 H é uma unidade muito grande de indutância. Em geral tem-se valores típicos na casa de milihenry ou microhenry.

Bobina de Tesla: Em uma das versões da bobina de Tesla, um solenóide longo de comprimento l e seção reta com área A possui N_1 espiras enroladas de modo compacto. Uma bobina com N_2 espiras é enrolada em seu centro (figura abaixo). Determine a indutância mútua.



O fluxo dentro da espira 2 é exatamente o fluxo dentro da espira 1

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 A}{i_1} = \frac{N_2}{i_1}\frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{l}$$

Exemplo de Aplicação:

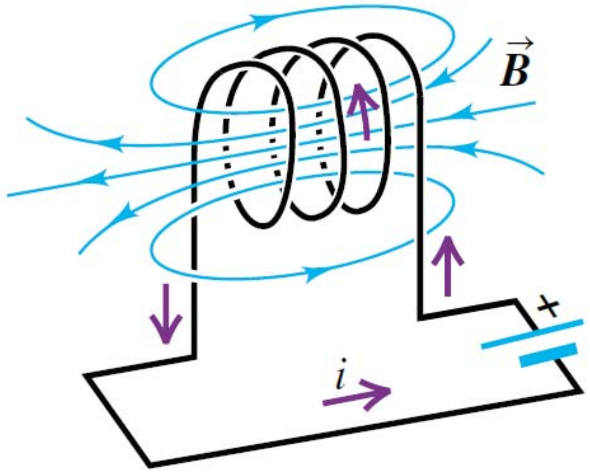
$l = 0.50\ \text{m},\ A = 10\ \text{cm}^2 = 1.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2,\ N_1 = 1000 \quad N_2 = 10$

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(1000)(10)}{0.50\ \text{m}}$$
$$= 25 \times 10^{-6}\ \text{Wb/A} = 25 \times 10^{-6}\ \text{H} = 25\ \mu\text{H}$$

Indutores e Auto-Indutância

No caso anterior consideramos dois circuitos separados: a corrente no circuito um gera um campo magnético que origina um fluxo no segundo circuito. Se a corrente muda no circuito um o fluxo se altera no circuito 2 e assim se tem uma ***fem*** induzida no circuito 2.

Um efeito importante ocorre se considerarmos apenas um circuito isolado. Quando uma corrente está presente, ele gera um campo magnético que gera um campo magnético através do ***mesmo*** circuito.



Sendo assim, qualquer circuito conduzindo corrente pode induzir uma ***fem*** pela variação de seu próprio campo magnético.

Pela Lei de Lenz sabemos que essa ***fem*** *induzida se opõe à variação da corrente inicial.*

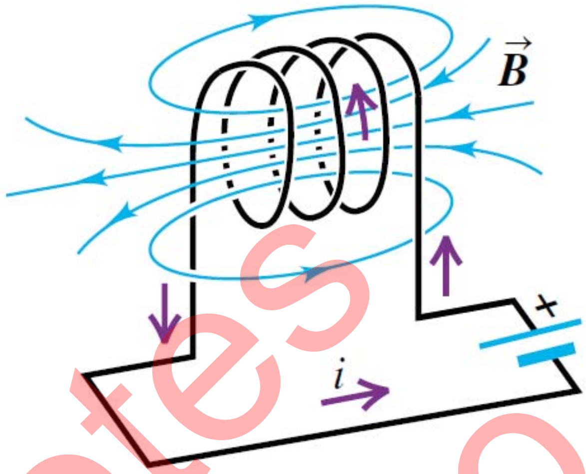
Sendo assim, ***fem*** auto-induzidas são de grande importância sempre que temos a corrente variando

fem auto-induzidas ocorre em qualquer circuito pois sempre teremos algum fluxo de campo magnético gerado em correntes de circuito fechado

Indutores e Auto-Indutância

Essa ***fem*** auto-induzida é amplificado se no circuito tivermos uma espira com N voltas de fio.

Como resultado de uma corrente *i* existe um fluxo magnético Φ_B através de cada volta da espira. Assim podemos definir a auto-indutância L do circuito como:



$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

Auto-indutância

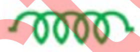
Usualmente, quando não existe outros elementos indutores no circuito, a auto-indutância é simplesmente chamada de ***indutância.*** No SI, a indutância possui como unidade o henry

Se a corrente varia, o fluxo varia e assim, da equação acima: $N\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt}$

Da Lei de Faraday para uma espira de N voltas obtemos finalmente $\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$

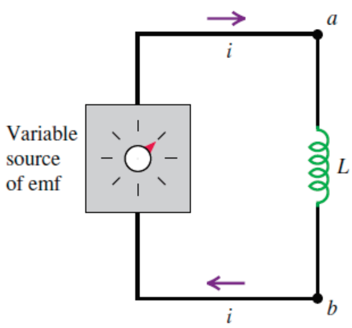
O sinal negativo é equivalente a Lei de Lenz: o indutor sempre se opõe à variação de correntes no circuito.

Indutor como elemento de Circuito

Um elemento de circuito que é projetado para ter uma indutância em particular é denominado ***indutor***. O símbolo de indutor é: 

Pelas Leis de Kirchhoff em um circuito fechado, mede-se as diferenças de potencial em cada elemento e a soma algébrica total deve ser zero. O campo elétrico produzido pelas cargas andando no circuito é conservativo e o chamamos de $\boldsymbol{E}_c$.

Dentro do indutor, o campo magnético produzido pelas espiras criam um campo elétrico não conservativo, $\boldsymbol{E}_n$. Se assumimos que a resistência interna do indutor é desprezável, é necessário um campo também desprezável para mover as cargas no sistema. Assim, o campo total, $\boldsymbol{E}_c + \boldsymbol{E}_n$ deve ser zero, mesmo que os campos individualmente não sejam nulos.



No circuito ao lado tem-se uma fonte de corrente. De acordo com a lei de Faraday, a integral de linha em torno do circuito é o negativo da taxa de variação do fluxo pelo circuito, assim,

$$\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L\frac{di}{dt}$$

Como o campo não conservativo somente é não nulo dentro do indutor,

$$\int_a^b \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L\frac{di}{dt}$$

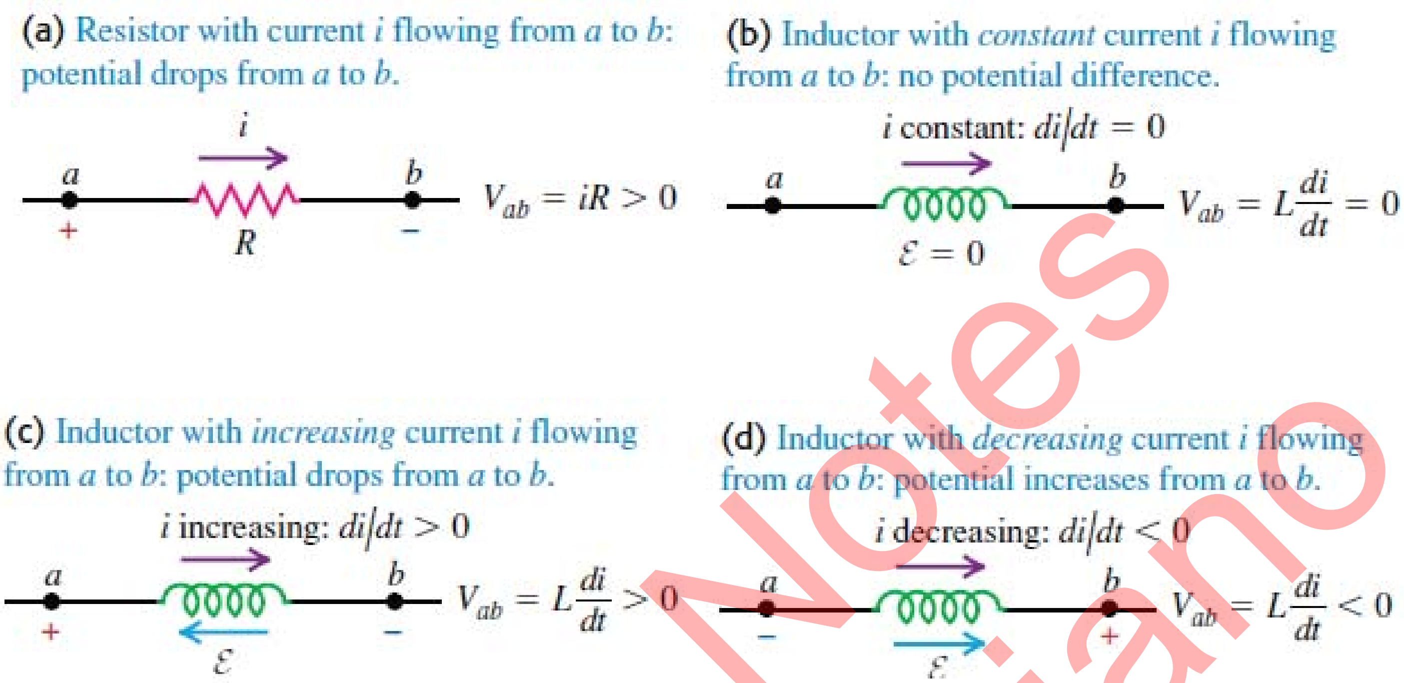
Agora, como vimos acima $\vec{E}_c + \vec{E}_n = 0$, e assim: $\int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = L\frac{di}{dt}$

Mas, esta integral nada mais é do que o potencial V_{ab} do ponto a com respeito ao ponto b. Assim, finalmente obtemos:

$$V_{ab} = V_a - V_b = L\frac{di}{dt}$$

Sendo assim existe uma queda de potencial nos terminais de um indutor associado a forças conservativas. Quando usamos as leis de Kirchhoff para analisar circuitos, a relação acima deve ser utilizada.

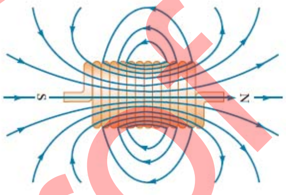
Comportamento de um indutor



Indutância de um solenóide / Toróide

Solenoide longo de área A.

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{d} I$$



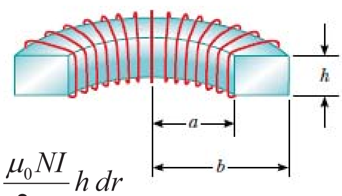
$$\Phi_B = BA = \mu_0 \frac{NA}{d} I$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{d}$$

$$L = \frac{\mu_0 (nd)^2 A}{d} = \mu_0 n^2 A d = \mu_0 n^2 V$$

Toroide circular de raio R.

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$



$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^b (B)(h\,dr) = \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} h\,dr$$

$$= \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln r\Big|_a^b = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi I} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

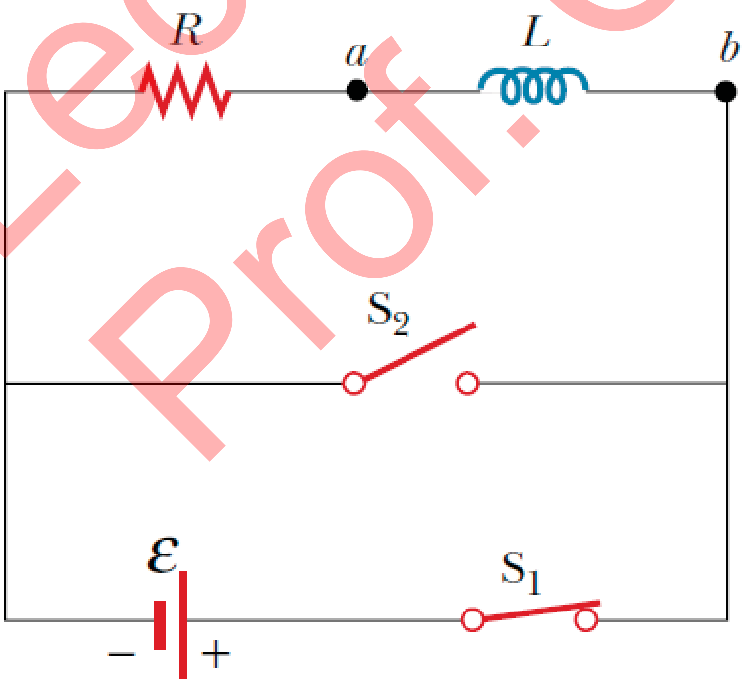
Destes dois exemplos vemos que a indutância pode ser escrita como a constante de permeabilidade μ_0 vezes uma grandeza com dimensão de comprimento:

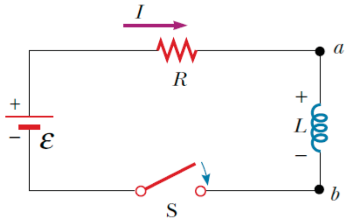
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\, T.m/A \quad \Rightarrow \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\, H/m$$

Medium	Permeability μ [H/m]	Relative Permeability μ/μ_0
Mu-metal	2.5×10^{-2}	20,000[5]
Mu-metal		50,000[6]
Permalloy	1.0×10^{-2}	8,000[5]
Electrical steel	5.0×10^{-3}	4,000[5]
Ferrite (nickel zinc)	$2.0 \times 10^{-5} - 8.0 \times 10^{-4}$	16–640
Ferrite (manganese zinc)	$>8.0 \times 10^{-4}$	>640
Steel	8.75×10^{-4}	100[5]
Nickel	1.25×10^{-4}	100[5] – 600
Platinum	$1.256\,9701 \times 10^{-6}$	1.000 265
Aluminum	$1.256\,6650 \times 10^{-6}$	1.000 022
Air		1.000 000 37 [8]
Vacuum	$1.256\,6371 \times 10^{-6}$ (μ_0)	1
Hydrogen	$1.256\,6371 \times 10^{-6}$	1.000 0000
Sapphire	$1.256\,6368 \times 10^{-6}$	0.999 999 76
Copper	$1.256\,6290 \times 10^{-6}$	0.999 994
Water	$1.256\,6270 \times 10^{-6}$	0.999 992
Bismuth		0.999 834
Superconductors	0	0

Circuito RL

Símbolo de indutor





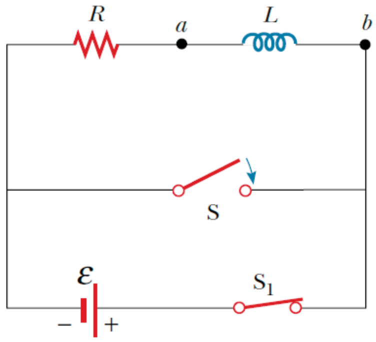
No inicio, o indutor se oporá à passagem de corrente em decorrência da variação do fluxo magnético. Isso gerará uma força eletromotriz induzida ε_{ind}, ou uma queda de potencial V_L:

$$\varepsilon - V_R - V_L = 0$$

$$V_L = L\frac{dI}{dt} \qquad V_R = IR$$

$$\boxed{L\frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon}$$

Equação Diferencial de primeira ordem com estímulo externo



Ligando-se a chave S com a chave S1 ainda ligada, a fonte será colocada em curto forçando a parada da corrente. Isto gerará uma alteração no fluxo magnético no indutor, gerando uma fem induzida:

$$V_R + V_L = 0$$

$$V_L = L\frac{dI}{dt} \qquad V_R = IR$$

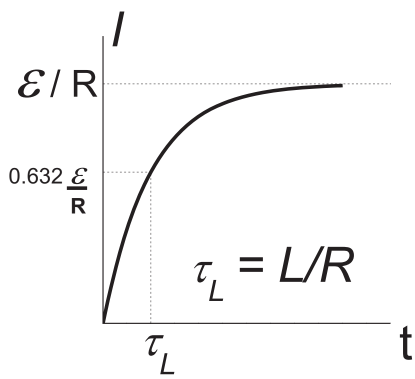
$$\boxed{L\frac{dI}{dt} + IR = 0}$$

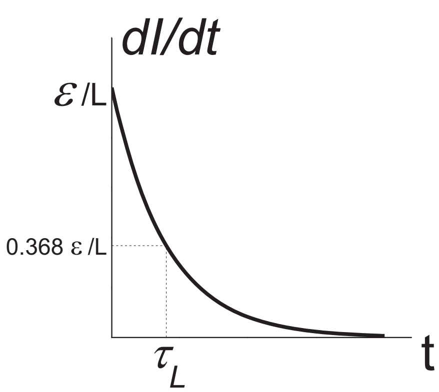
Equação Diferencial de primeira ordem homogênea

Solução obtida na Carga: Crescimento da Corrente

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

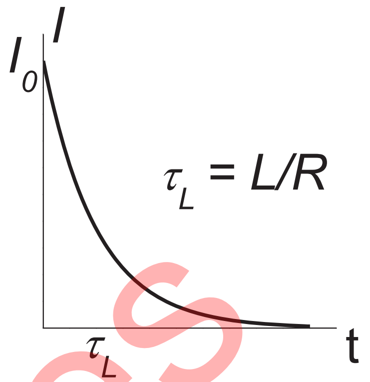


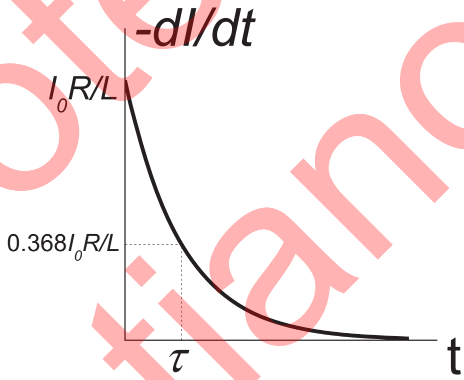


Solução obtida na descarga: Decaimento da Corrente

$$I = I_0\, e^{-\frac{R\,t}{L}}$$

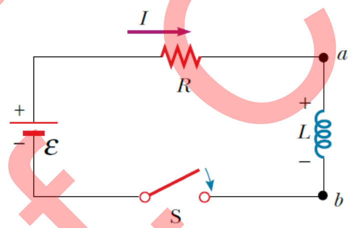
$$\frac{dI}{dt} = -I_o \frac{R}{L} e^{-\frac{R\,t}{L}}$$





Energia Armazenada no Campo Magnético

$$\varepsilon = IR + L\frac{dI}{dt}$$



Multiplicando por *I* em ambos os lados,

Taxa com que a energia aparece sob a forma de energia térmica no resistor, ie, potência dissipada no resistor

$$\varepsilon\, I = I^2R + LI\frac{dI}{dt}$$

A energia não aparece como energia térmica no indutor. Sendo assim, pela conservação de energia, deve ficar armazenada neste. Logo, esta equação indica a conservação da energia para circuitos RL.

Taxa com que o dispositivo de fem transmite energia para o circuito, isto é, é a potência fornecida pela fonte.

Este termo deve indicar a taxa dU_B/dt com que a energia é armazenada no campo magnético:

$$\frac{dU_B}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

Taxa de energia armazenada no campo magnético do indutor:

$$\frac{dU_B}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

Pode ser reescrito como,

$$dU_B = LIdI$$

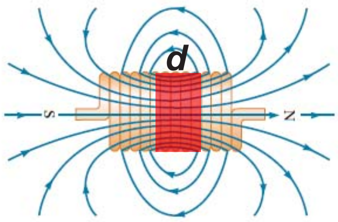
Fazendo a integração direta,

$$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^I LIdI$$

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2}LI^2}$$

Energia Magnética armazenada em um indutor *L* transportando uma corrente *I*

Solenoide longo com seção transversal A



Tomemos um comprimento próximo ao centro do solenóide.

A energia armazenada nesta extensão ***d*** deve estar **interiamente dentro deste volume** pois o campo magnetico fora é praticamente nulo

Também, a anergia armazenada deve estar uniformemente distribuida por todo o volume do solenóide, porque o campo magnetico é uniforme em qualquer ponto de seu interior. Assim,

$$u_B = \frac{U_B}{Ad} \quad \Rightarrow u_B = \frac{LI^2}{2Ad} = \frac{L}{d}\frac{i^2}{2A}$$

Como obtido anteriormente,

$$\frac{L}{d} = \mu_0 n^2 Ad \quad \Rightarrow u_B = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

Para um solenóide ideal, $B = \mu_0 In$

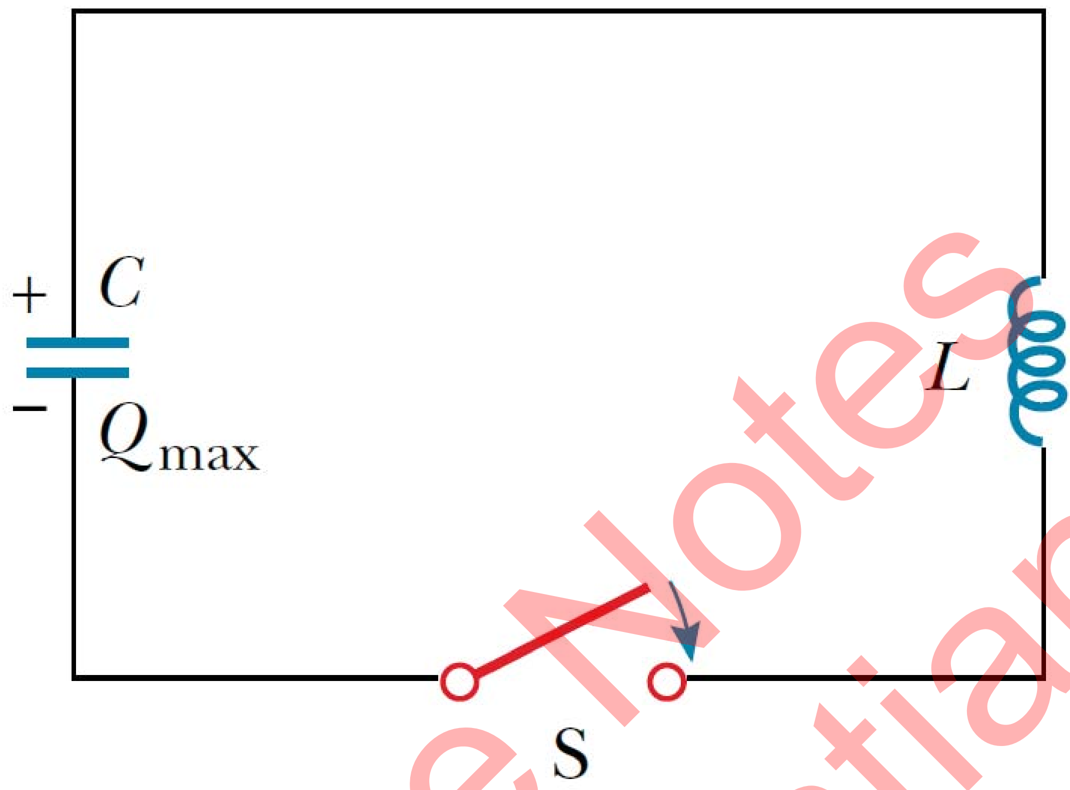
$$\boxed{u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Densidade de energia magnética

Similaridades entre capacitância e indutância

	Elétrica	*Magnética*
Definição	$C = q/V$	$L = N\Phi / i$
Dimensões	$C = \epsilon_0 \times$ um comprimento	$L = \mu_0 \times$ um comprimento
Constantes	$\epsilon_0 = 8.85$ pF/m	$\mu_0 = 1.26$ μH/m
Armazenamento de energia	$U_C = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{q^2}{2C}$	$U_L = \frac{1}{2}Li^2 = (\frac{(N\Phi)^2}{2L}$
Densidade de energia	$u_E = (\epsilon_0/2)E^2$	$u_B = (1/2\,\mu_0)\,B^2$
Constante de tempo	$\tau_C = CR$	$\tau_L = L/R$

Circuito LC

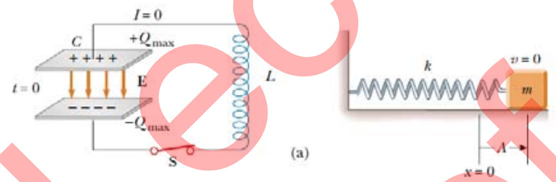


Analogia com oscilador Massa-Mola

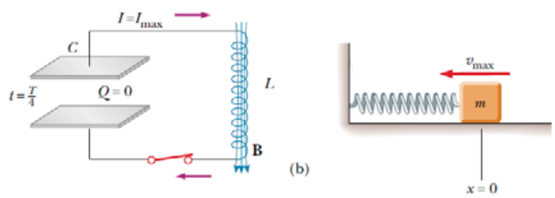
Energia potencial da mola ⇔ Energia eletrica no capacitor

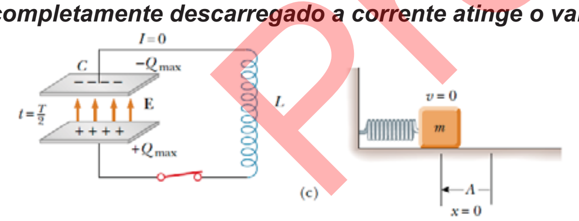
Energia cinética da massa ⇔ Energia magnética no indutor

Com o capacitor completamente carregado a energia total U do circuito está no campo elétrico do capacitor e vale $Q_m^2/2C$. Neste instante a corrente é nula e não há energia no indutor

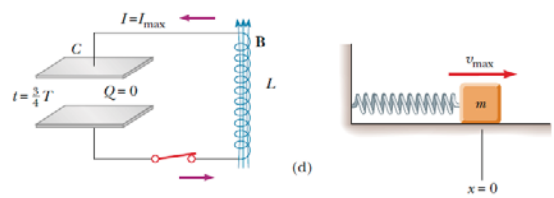


Com o inicio da descarga do capacitor, a energia acumulada no campo elétrico diminui. Ao mesmo tempo a corrente aumenta e começa a haver energia no indutor. Quando o capacitor estiver completamente descarregado a corrente atinge o valor máximo.

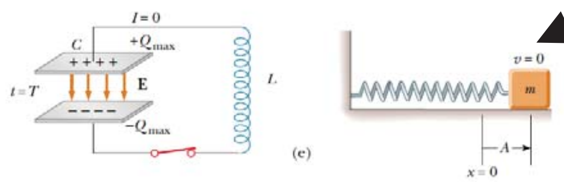




Agora ocorre o processo inverso. A energia que estava armazenada no indutor como energia magnética é agora transferida para o capacitor, porém com polaridade inversa à do inicio do processo.



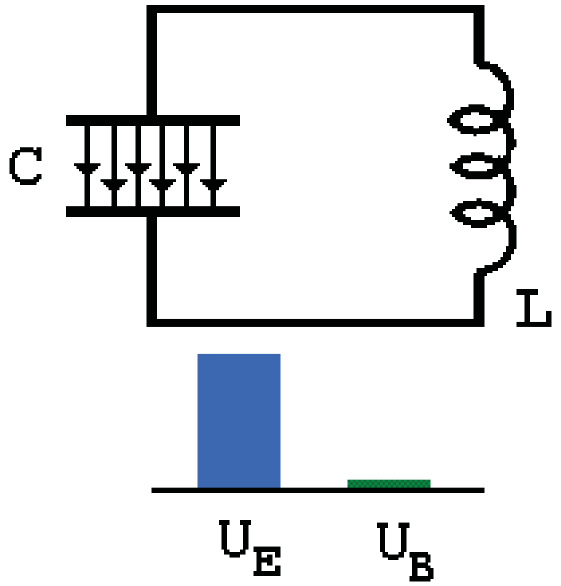
Agora a corrente possui sentido oposto ao mostrado no item b e a energia do capacitor é novamente transferida ao indutor.

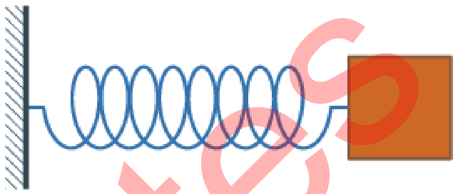


A energia do indutor é transferida ao capacitor que agora possui polaridade igual ao ítem (a). O processo se repete indefinidamente.

Energia potencial da mola ⇔ Energia eletrica no capacitor

Energia cinética da massa ⇔ Energia magnética no indutor





Balanço de energia

Em um termpo arbitrario *t*, depois da chave ter sido fechada, o capacitor está com uma carga *Q* e o circuito com uma corrente *I*. Ambos os componentes acumulam energia mas a soma deve ser igual a energia inicial *U* pois não há dissipação:

$$U = U_C + U_L \quad = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2$$

Já que admitimos não haver resistência no circuito, não há dissipação e entao a energia total permanece constante no tempo, ou seja dU/dt = 0:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2\right) = 0$$

$$\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + L I \frac{dI}{dt} = 0$$

Agora,

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dt}\right) = \frac{d^2Q}{dt^2}$$

Assim,

$$\frac{Q}{C}\cancel{\frac{dQ}{dt}} + L \cancel{\frac{dQ}{dt}} \frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0}$$

Equação Diferencial de segunda ordem homogênea e linear

Como Resolver?

Da resolucão da equacão diferecial,

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \delta)$$

Onde Qm é a carga máxima do capacitor e a frequencia angular ω é dada por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A corrente será dada por

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_m \sin(\omega t + \delta)$$

Como obter o ângulo de fase δ ?

→Condicões de contorno!!!

Inicio: Capacitor totalmente carregado. Sendo assim em t=0, I=0 e Q=Qm. Fazendo I=0 e t=0 em na equacão anterior, temos

$$0 = -\omega Q_m \sin(\delta)$$

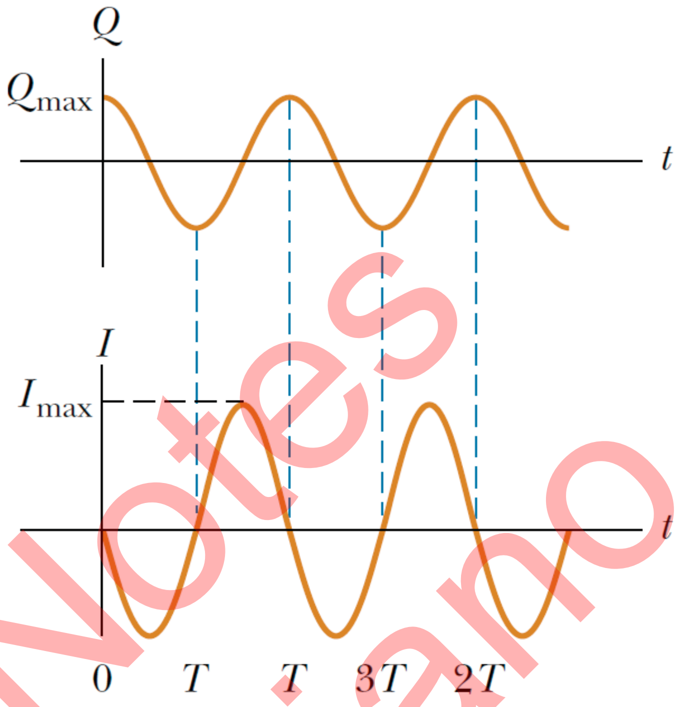
Ou seja, δ=0.

Isto também é coerente com a segunda condicão, Q=Qm em t=0.

Assim a variacão da carga e da corrente serão:

$$Q = Q_m \cos(\omega t)$$

$$I = -\omega Q_m \sin \omega t = -I_m \sin \omega t$$



Como fica a energia?

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} LI^2$$

$$U = U_C + U_L = \frac{Q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t$$

U é constante. Logo, para t=0

$$U = \frac{Q_m^2}{2C}$$

Similarmente, para ωt = π/2

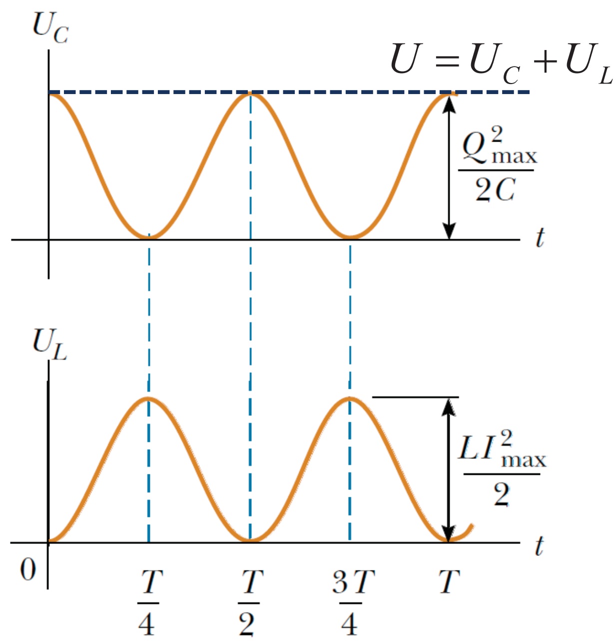
$$U = \frac{LI_m^2}{2}$$

Logo,

$$\frac{Q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$$

E podemos reescrever U como,

$$U = \frac{Q_m^2}{2C}\left(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t\right) = \frac{Q_m^2}{2C} = cte$$



Simulacão circuito LC