3^a Lista 4 — Eletromagnetismo II

Ex. 1: Uma onda plana monocromática $\psi_I = \psi_0\, e^{ikz}$ incide de modo normal sobre um anteparo que ocupa o plano $z' = 0$. No anteparo há um orifício com um formato qualquer, de área A, como indicado na figura abaixo.

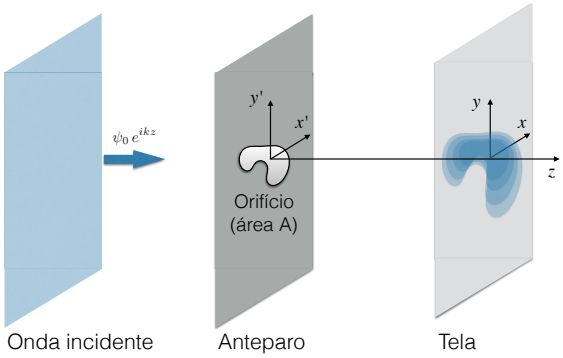


Figura 1: Uma onda plana incide sobre um anteparo, no qual foi cortado um orifício, e depois é projetada numa tela. A potência da onda que passa pelo orifício acaba projetada na tela.

A integral de difração de Kirchhoff-Helmholtz é dada por:

$$\psi(x,y) = -i\frac{k\,\psi_0}{2\pi}\,\frac{e^{i\phi}}{r}\int_{S_0} dx'\,dy'\,e^{i\frac{k}{2r}\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]}\,,$$

onde ϕ é uma fase irrelevante, que cancela quando tomamos $|\psi(x,y)|^2 = \psi(x,y)\times\psi^*(x,y)$.

A potência transmitida pela onda incidente através do orifício é dada por $P = |\psi_0|^2 \times A$. Demonstre que há conservação de energia nesse problema – ou seja, mostre que a potência total projetada na tela, $P_T = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\,|\psi(x,y)|^2$, é igual à potência transmitida através do orifício.

Ex. 2: Uma onda plana monocromática $\psi_0\, e^{ikz}$ incide normalmente em um anteparo que ocupa todo o plano $(x', y' < 0)$, como na figura abaixo[1]. A luz é projetada numa tela a uma distância L do anteparo. A intensidade da luz na tela obedece um padrão de difração $I(y)$, aproximadamente como está indicado no painel da esquerda da Fig. 2 (na próxima página).

De um modo totalmente geral, usando a integral de difração (dada também no enunciado da **Q1**), podemos expressar a função de onda em termos das funções Seno e Cosseno de Fresnel (painel da direita da Fig. 2):

$$\int_0^u dt\, e^{i\frac{\pi}{2}t^2} = F(u) = C_F(u) + iS_F(u)\,.$$

Usando $F(-u) = -F(u)$, para uma geometria retangular qualquer $\{x'_{min} \le x' \le x'_{max}\,,\; y'_{min} \le y' \le y'_{max}\}$ temos que:

$$\psi(x,y) = -i\frac{k\,\psi_0}{2\pi}\,\frac{e^{i\phi}}{r}\,\frac{\pi r}{k}\left[F(u_x^+) - F(u_x^-)\right]\left[F(u_y^+) - F(u_y^-)\right]\,,$$

[1] Este exercício fornece as bases de uma técnica astronômica conhecida como **ocultação**. Considere um corpo celeste (a fonte de luz — por exemplo, uma estrela) que está escondido atrás de um outro, que bloqueia a luz (o anteparo — por exemplo, a Lua). À medida que a Lua se desloca no céu e vai revelando a fonte que estava "oculta" por trás dela, os detectores apontados para a estrela medem uma curva de intensidade que corresponde ao padrão de difração de uma aresta, como indicado na Fig. 2. Essa técnica foi muito utilizada no passado para determinar com precisão a posição de fontes de rádio no céu. Variantes dessa técnica são atualmente utilizadas em coronógrafos (instrumentos que observam o Sol), e também para estudar planetas extra-solares, já que a técnica permite medir as velocidades de rotação dos planetas em torno das estrelas.

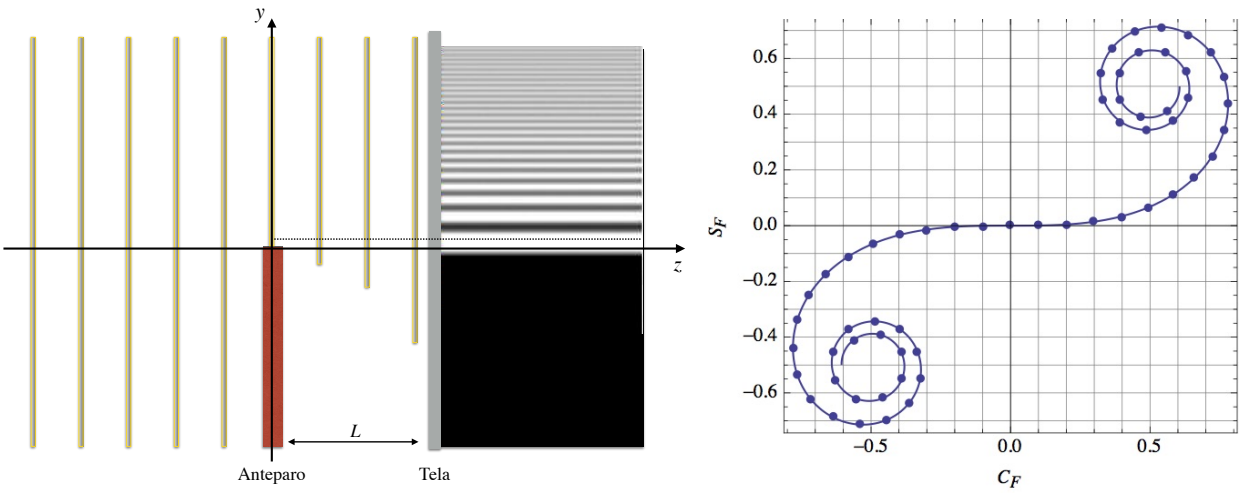


Figura 2: Esquerda: uma onda plana incide sobre um anteparo limitado ao semi-plano infinito $y < 0$, sendo depois projetada na tela. Direita: cosseno $C_F(u)$ e seno $S_F(u)$ de Fresnel. Os pontos marcam intervalos de $\Delta u = 0.1$, com $u = 0$ sendo a origem. A posição $\{C_F = -1/2, S_F = -1/2\}$ corresponde a $u \to -\infty$, e a posição $\{C_F = 1/2, S_F = 1/2\}$ corresponde a $u \to \infty$.

onde definimos $u_x^+ = \sqrt{\frac{k}{\pi r}}\,(x'_{max} - x)$, $u_x^- = \sqrt{\frac{k}{\pi r}}\,(x'_{min} - x)$, e analogamente para $u_y^\pm$.

Para responder as questões abaixo você vai precisar dos limites assintóticos do Seno e Cosseno de Fresnel:

$$\lim_{u\to 0} F(u) \approx u + i\frac{\pi}{6}u^3 + \mathcal{O}(u^5)\ ,$$

e também:

$$\lim_{u\to \infty} F(u) \approx \frac{1}{2}(1+i) - \frac{i}{\pi\, u}e^{i\frac{\pi}{2}u^2} + \mathcal{O}(u^{-3})\ .$$

(a) Obtenha a intensidade da onda projetada na tela como função de y, para qualquer valor de y. Expresse essa intensidade em termos da intensidade da onda incidente ($I_0 = |\psi_0|^2$).

(b) Qual o valor de $I(y = 0)$? Expresse sua resposta em termos de I_0.

(c) Qual a intensidade da luz projetada na tela quando $y \to \infty$? E quando $y \to -\infty$? Justifique suas respostas com cálculos, utilizando os limites assintóticos acima.

(d) O gráfico da direita da Fig. 2 mostra as funções seno e cosseno de Fresnel como funções do parâmetro u, em intervalos de $\Delta u = 0.1$. Encontre (graficamente) a posição y_1 que marca o primeiro máximo da intensidade da luz projetada na tela (linha pontilhada no diagrama da esquerda da Fig. 2). Qual o valor dessa intensidade máxima $I_1 = I(y_1)$? Expresse o resultado em termos de I_0.