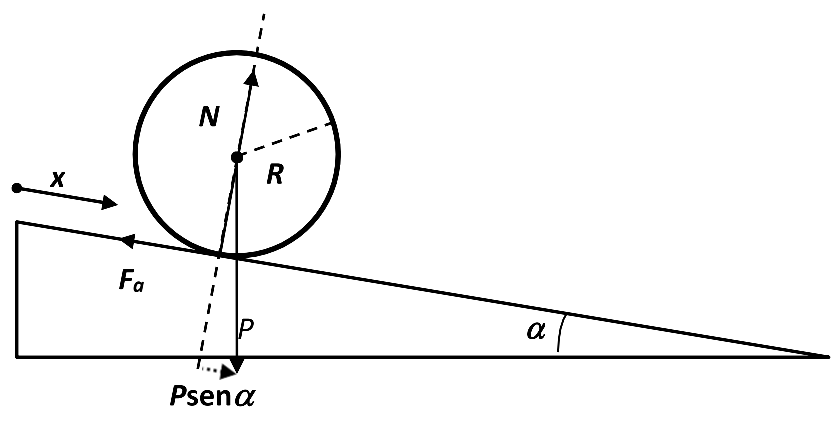
Experimento 3 – Rolamento

Determinar os tempos de queda de objetos cilíndricos rolando sem escorregamento em um plano inclinado e relacioná-los com a distribuição de massa dos objetos.

Introdução

Considere um objeto cilíndrico, cuja massa está distribuída simetricamente em torno do eixo, de modo que seu centro de massa está no eixo do cilindro. Neste experimento, esse objeto é colocado no plano inclinado para se deslocar numa direção perpendicular ao eixo. O torque da força-peso em relação ao centro de massa é nulo, bem como o da força normal à superfície. Assim, na ausência de atrito entre o cilindro e o plano, o corpo deslizaria sem que nenhum torque externo atuasse sobre ele e sua velocidade angular de rotação em torno do Centro de Massa (CM) seria constante; se o cilindro fosse abandonado parado no topo do plano, ele deslizaria escorregando pelo plano! Normalmente, como no nosso experimento, há atrito, que produz um torque em relação ao CM e o cilindro *rola* plano abaixo. Assim, a dinâmica do movimento do cilindro inclui sua rotação e, consequentemente, a aceleração do objeto não depende apenas da massa do cilindro, mas também da maneira com que ela se distribui no cilindro.

Em certas condições, o corpo rola pelo plano *sem deslizar*. Nesse caso, a linha de contato entre o cilindro e o plano forma o **eixo instantâneo de rotação**, isto é, são os pontos do cilindro encostados ao plano que têm velocidade nula. Esse conjunto de pontos do corpo que está parado em relação ao plano, porém, *muda* de posição continuamente em relação ao plano, por isso esse nome "instantâneo". É preciso lembrar o que significa "eixo de rotação" para entender que ele não precisa ser fixo no espaço, somente tem que ser capaz de simplificar a descrição da rotação, de modo que a velocidade v de cada ponto do corpo a uma distância r do eixo, siga a lei simples $v = \omega r$ com uma mesma velocidade angular ω no **instante** considerado, independente da variação de ω com o tempo. Além disso, "parado" não significa sem aceleração e os pontos que constituem o eixo instantâneo de rotação têm aceleração na direção perpendicular ao plano, de modo que aos poucos o antigo eixo se afasta do plano e outra linha do cilindro encosta no plano, para formar o novo eixo instantâneo de rotação.



No entanto, ao invés de montar a equação de movimento usando o eixo instantâneo de rotação, vamos seguir o procedimento mais geral, de separar o movimento de translação do CM da rotação em torno do CM. Assim, começamos com o cálculo do torque $\Im_2$ devido à força de atrito em relação ao CM e sua relação com a aceleração angular $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$ do cilindro:

$$\Im = F_a R = I\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{1}$$

onde F_a é a força de atrito e R e I são o raio e o momento de inércia do cilindro, respectivamente. A equação de movimento de translação do CM é:

$$M\,\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - F_a \tag{2}$$

onde M é a massa total do cilindro, α é o ângulo do plano em relação à horizontal, g a aceleração da gravidade no local e x a posição do CM no plano.

Com as definições acima, a condição de rolamento sem deslizamento pode ser expressa como:

$$\frac{dx}{dt} = R\,\frac{d\varphi}{dt} \tag{3}$$

Note que, em experimentos reais, esta condição pode não ser obedecida, o que constitui uma possível fonte de erro sistemático das medidas em questão. Quando ocorre deslizamento, entra em ação o atrito cinético e a força tem um valor máximo, determinado pelo coeficiente de atrito dinâmico.

O momento de inércia deve ser calculado para um cilindro oco de massa M com raio externo R, raio interno r e densidade constante, dá:

$$I = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2) \tag{4}$$

Quando aplicada a um cilindro maciço, r = 0, dá o resultado que conhecemos para um disco e, para uma casca cilíndrica, $r = R$, o do anel fino.

Das fórmulas (1) a (4), obtém-se a seguinte equação diferencial para o movimento de translação de um cilindro oco:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{K} \tag{5}$$

onde K é um parâmetro adimensional dependente da distribuição da massa M no volume do objeto. Para um cilindro maciço homogêneo K = 3/2, enquanto que para uma massa concentrada numa “casca” de raio R (isto é, para $r \approx R$), K=2 (verifique estes resultados).

A solução da equação (5) é:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2K}t^2 \tag{6}$$

Usando $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$ para as condições iniciais, o tempo t para percorrer a distância x é dado por:

$$t = \sqrt{\frac{2Kx}{g \operatorname{sen} \alpha}} \qquad (7)$$

Procedimento Experimental

---

1) Disponha uma tábua sobre a mesa com um calço de um lado, formando um plano inclinado de um ângulo de aproximadamente 15 mrad ou 1^{o} com relação ao plano horizontal.

2) Solte simultaneamente dois cilindros metálicos, um de Alumínio e outro de Latão de mesma forma exterior e com aproximadamente a *mesma* massa. Os cilindros chegam ao fim do percurso juntos ou significativamente afastados? O que pode ser concluído qualitativamente desse resultado?

3) Meça a altura do plano inclinado para determinar o ângulo de inclinação pela sua tangente; repita a medição da altura 5 vezes, em pontos diferentes da borda do plano, a fim de estimar a incerteza do ângulo. Meça cerca de 10 vezes o tempo de queda no plano inclinado para cada um dos dois cilindros.

4) Repita o procedimento do item 3, mas com o calço do lado oposto da tábua. Como a mesa pode não ser perfeitamente horizontal (com um pequeno ângulo de desnível β), deve ser feita uma "média" com os resultados do item 3, de forma a reduzir o erro sistemático. Use a fórmula: $t = \sqrt{\frac{2t_1^2 t_2^2}{t_1^2 + t_2^2}}$, onde t_1 e t_2 são os

1 2

tempos de queda com inclinação $\alpha+\beta$ e $\alpha-\beta$, correspondentes aos itens 3 e 4. (Deduza esta fórmula).

5) Meça o tempo para diferentes percursos na tábua, usando o cilindro maciço. Para isso, marque 3 linhas adicionais, a 70; 280 e 630 mm da linha de lançamento e cronometre o tempo de cada um dos 4 percursos, seguindo o mesmo procedimento de repetir 10 vezes a cronometragem para cada percurso.

6) Faça um gráfico de t^2 em função de x e verifique se seus pontos estão alinhados; neste momento, não se preocupe se a reta passa pelo zero ou não, nem se ela se ajusta muito bem aos dados; isso ficará para a análise quantitativa.

Síntese

- Descreva com suas palavras e de forma breve o experimento realizado e apresente os materiais usados.
- Apresente os dados experimentais, usando gráficos e tabelas, devidamente numerados e legendados. Anexe o gráfico de t^2 em função de x. Discuta o gráfico.
- Discuta: quando os dois cilindros metálicos, um de Alumínio e outro de Latão, foram soltos simultaneamente, os cilindros chegaram ao fim do percurso juntos ou significativamente afastados? O que pode ser concluído qualitativamente desse resultado?
- Deduza a fórmula do item 7.
- Discuta se é possível concluir algo de quantitativo com relação à distribuição de massa do cilindro de latão.
- Apresente uma discussão e conclusões gerais do trabalho realizado.

Relatório

Neste relatório, a ênfase está na descrição do experimento realizado e na apresentação dos dados obtidos. Vamos também aplicar o método dos mínimos quadrados aos dados de deslocamento em função do tempo.

1) Especifique os objetivos do trabalho prático.
2) Faça uma breve introdução teórica, que inclua a dedução da equação (5) e indique quais são as condições experimentais sob as quais ela é válida.
3) Demonstre que $K = 3/2$ se o corpo for um cilindro maciço homogêneo e $K = 2$ se for uma casca cilíndrica de raio R.
4) Deduza a fórmula do item 4 do procedimento experimental.
5) Apresente os materiais usados e descreva *com suas palavras* o experimento realizado.
6) Apresente os dados experimentais, usando gráficos e tabelas, devidamente numerados e legendados.
7) Determine K para os dois cilindros a partir dos tempos médios de percurso medidos no item 4 do procedimento experimental. Use a fórmula (7) e não deixe de calcular o desvio-padrão de K, propagando as incertezas do tempo e do ângulo de inclinação do plano; explique porque não é necessário incluir a incerteza no tamanho da pista que o cilindro rola.

8) Determine K e x_0 usando a expressão (6).

9) Confronte os resultados obtidos pelos dois métodos experimentais, entre si e com as expectativas teóricas.

10) Discuta se é possível concluir algo de quantitativo com relação à distribuição de massa do cilindro de latão.

11) Apresente sugestões de como melhorar o experimento.

12) Apresente uma discussão e conclusões gerais do trabalho realizado.