O Papel dos Pólos e Zeros

Newton Maruyama

Departamento de Engenharia Mecatrônica - EPUSP

27 de setembro de 2007

1. Expansão em frações parciais
2. Resposta a estado-zero
3. Pólos e suas características no domínio do tempo
4. O efeito dos zeros

Suponha a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{\prod_{l=1}^{m}(s+z_l)}{\prod_{i=1}^{q}(s+z_i)(s+p_m)^r},$$

one $i = 1, \ldots, q$ e $n = q + r$. A expansão em frações parciais de $G(s)$ pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{K_i}{(s+p_i)} + \frac{A_1}{(s+p_m)} + \frac{A_2}{(s+p_m)^2} + + \ldots + \frac{A_r}{(s+p_m)^r},$$

onde:

$$
\begin{aligned}
K_i &= (s + p_i)G(s)\Big|_{s=-p_i}, \\
A_r &= [(s + p_m)^r G(s)]\Big|_{s=-p_m}, \\
A_{r-1} &= \frac{d}{ds}[(s + p_m)^r G(s)]\Bigg|_{s=-p_m}, \\
A_{r-2} &= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[(s + p_m)^r G(s)]\Bigg|_{s=-p_m}, \\
&\vdots \\
A_1 &= \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}[(s + p_m)^r G(s)]\Bigg|_{s=-pm}.
\end{aligned}
$$

A função no domínio do tempo pode ser escrita como:

$$g(t) = \sum_{i=1}^{q} K_i \exp^{-p_i t} + A_1 \exp^{-p_m t} + A_2 t \exp^{-p_m t} + \ldots + A_r t^{r-1} \exp^{-p_m t} . \quad (1)$$

Pólos e zeros

A seguir, uma definição formal para pólos e zeros é estabelecida.

Pólo

número real ou complexo finito λ tal que $|G(\lambda)| = \infty$.

Zero

número real ou complexo finito λ tal que $|G(\lambda)| = 0$.

Um primeiro questionamento de ordem teórica que pode ser feito é se todas as raízes do polinômio $D(s)$ são polos de $G(s)$.

Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2(s^3 + 3s^2 - s - 3)}{(s-1)(s+2)(s+1)^3}.$$

Para $\lambda = -2$ temos:

$$G(-2) = \frac{6}{0} = \infty.$$

Portanto, $\lambda = -2$ é um pólo e também $\lambda = -2$ é uma raiz de $D(s)$. Agora vamos fazer $\lambda = 1$, dessa forma:

$$G(1) = \frac{N(1)}{D(1)} = \frac{0}{0},$$

o que torna o resultado indefinido.

Entretanto, utilizando a regra de L'Hôpital [1] obtemos:

$$\begin{aligned} G(1) &= \left.\frac{N(s)}{D(s)}\right|_{s=1} = \left.\frac{N'(s)}{D'(s)}\right|_{s=1}, \\ &= \left.\frac{2(3s^2+6s-1)}{5s^4+16s^3+12s^2-4s-5}\right|_{s=1}, \\ &= \frac{16}{24} \neq \infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\lambda = 1$ não é um pólo de $G(s)$.

[1] A regra de L'Hôpital pode ser utilizada quando existe uma indeterminação do tipo $\lim_{x\to p} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{0}{0}$. Dado $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis e $g'(p) \neq 0$ então:

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{2}$$

Portanto, nem toda raiz de $D(s)$ é um pólo de $G(s)$. No exemplo acima, o fato se deve ao fato que $N(s)$ e $D(s)$ possuem um fator comum. Na verdade, a função de transferência pode ser escrita como:

$$\frac{2(s+3)(s-1)(s+1)}{(s-1)(s+2)(s+1)^3} = \frac{2(s+3)}{(s+2)(s+1)^2}.$$

$G(s)$ tem um zero em $s = -3$ e três pólos: $s = -2, -1, -1$.

Através deste exemplo, concluímos que se os polinômios $N(s)$ e $D(s)$ não possuem fatores comuns, então todas as raízes de $N(s)$ e $D(s)$ são respectivamente zeros e pólos de $G(s)$.
Se $N(s)$ e $D(s)$ não possuem um fator comum eles são denominados co-primos e $G(s)$ é denominado irredutível.

Resposta a estado-zero

A resposta a estado-zero é estabelecida pela seguinte equação:

$$Y(s) = G(s)U(s). \tag{3}$$

Computa-se inicialmente a transformada de Laplace de $u(t)$, $U(s)$, e posteriomente podemos obter $Y(s)$. Uma expansão em frações parciais de $Y(s)$ pode facilmente levar a transformada de Laplace inversa para obtenção da resposta do sistema no domínio do tempo $y(t)$.
A seguir são apresentados alguns exemplos.

Exemplo 1

Dado o sistema

$$G(s) = \frac{3s - 1}{(s+1)(s+2)},$$

calcular a resposta para um entrada a degrau unitário $u(t) = 1$ para $t \geq 0$.

Podemos escrever $Y(s)$ como:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s}.$$

A expansão em frações parciais pode ser representada como:

$$Y(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)s} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)} + \frac{K_3}{s},$$

onde os coeficientes podem ser calculados como:

$$K_1 = Y(s)(s+1)|_{s=-1} = \left.\frac{3s-1}{(s+2)s}\right|_{s=-1} = \frac{(-4)}{(1)\times(-1)} = 4,$$

$$K_2 = Y(s)(s+1)|_{s=-2} = \left.\frac{3s-1}{(s+1)s}\right|_{s=-2} =$$

$$\frac{(-7)}{(-1)\times(-2)} = -3.5,$$

$$K_3 = Y(s)s|_{s=0} = \left.\frac{3s-1}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{(-1)}{(2)} = -0.5.$$

$Y(s)$ pode então ser representada como:

$$Y(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)s} = \frac{4}{(s+1)} + \frac{-3.5}{(s+2)} + \frac{-0.5}{s},$$

A resposta no tempo pode então ser calculada como:

$$y(t) = \underbrace{4\exp^{-t} - 3.5\exp^{-2t}}_{\text{Devido aos pólos de } G(s)} - \underbrace{0.5}_{\text{Devido ao pólo de } U(s)}$$

Podemos observar através do Exemplo Anterior que os termos relativos aos pólos do sistema podem ser divididos em duas partes, uma relativa aos pólos do sistema $G(s)$ e um relativo ao pólo de $U(s)$.
A resposta deste sistema poderia ser escrita genericamente como:

$$y(t) = K_1 \exp^{-t} + K_2 \exp^{-2t} + \text{termos devidos aos pólos de } U(s). \tag{4}$$

Importante !!!!!!!

Uma questão importante é que dependendo de $u(t)$, os pólos de $G(s)$ podem não ser excitados. O exemplo a seguir ilustra esta questão.

Exemplo 2

Considere por exemplo $U(s) = s + 1$. Neste caso,

$$\begin{aligned} Y(s) = G(s)U(s) &= \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)}(s+1), \\ &= \frac{3s-1}{(s+2)} = \frac{3(s+2)-7}{(s+2)} = 3 - \frac{7}{(s+2)}. \end{aligned}$$

O que implica em:

$$y(t) = 3\delta(t) - 7\exp^{-2t}.$$

Exemplo 3

Vamos supor agora que:

$$u(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\exp -3t,$$

A transformada de Laplace é dada por:

$$U(s) = \frac{(s+1)}{s(s+3)},$$

dessa forma,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3s-1}{(s+2)(s+1)}\frac{s+1}{s(s+3)} = \frac{3s-1}{(s+2)(s+3)s} \\ &= \frac{7}{2(s+2)} - \frac{10}{3(s+3)} - \frac{1}{6s}. \end{aligned}$$

A resposta do sistema no domínio do tempo $y(t)$ é dada por:

$$y(t) = \frac{7}{2}\exp^{-2t} - \frac{10}{3}\exp^{-3t} - \frac{1}{6}.$$

Neste exemplo, é possível observar que a excitação ou não do pólo depende se $U(s)$ possui um zero para cancelá-lo.

Pólo real negativo $s = -\sigma$

:

- Função de transferência:

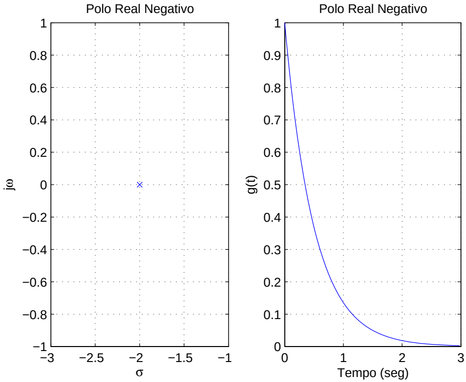
$$\frac{K}{(s+\sigma)}.$$

- Resposta no tempo:

$$K \exp^{-\sigma t}.$$

A figura 1 ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)}.$$



Pólo real positivo $s = +\sigma$

:

- Função de transferência:

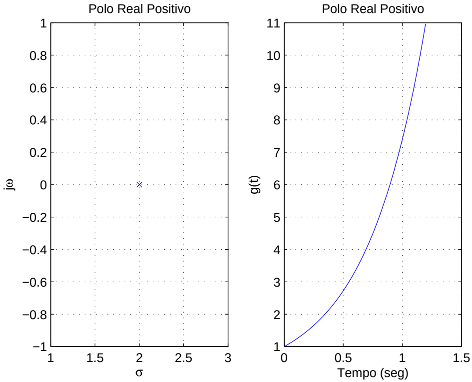
$$\frac{K}{(s-\sigma)}.$$

- Resposta no tempo:

$$K \exp^{\sigma t}.$$

A figura ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)}.$$



Pólos complexos conjugados com parte real negativa $s = -\sigma \pm j\omega$

:

- Função de transferência:

$$\frac{K_i}{(s+\sigma-j\omega)} + \frac{K_{i+1}}{(s+\sigma+j\omega)}.$$

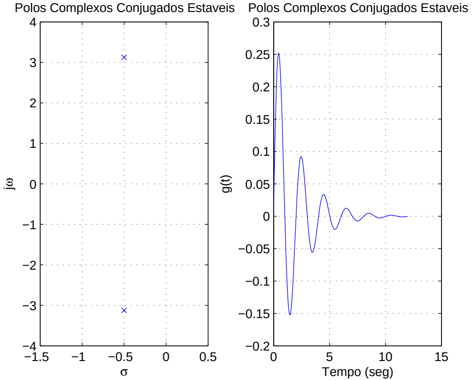
  Onde $K_i = K_{i+1}^*$.

- Resposta no tempo:

$$K_i \exp^{-(\sigma-j\omega)t} + K_{i+1} \exp^{-(\sigma+j\omega)t},$$
$$A \exp^{-\sigma t} \sin(\omega t + \Phi).$$

A figura ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s - 0.5 - j3.1225)(s - 0.5 + j3.1225)}.$$



Pólos complexos conjugados com parte real positiva $s = +\sigma \pm j\omega$

:

- Função de transferência:

$$\frac{K_i}{(s-\sigma-j\omega)} + \frac{K_{i+1}}{(s-\sigma+j\omega)}.$$

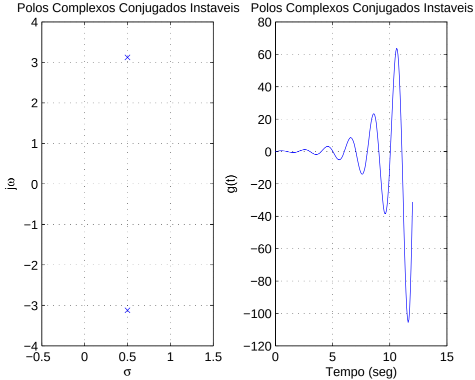
  Onde $K_i = K_{i+1}^*$.

- Resposta no tempo:

$$K_i \exp^{-(-\sigma-j\omega)t} + K_{i+1} \exp^{-(-\sigma+j\omega)t},$$
$$A \exp^{\sigma t} \sin(\omega t + \Phi).$$

A figura ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s - 0.5 - j3.1225)(s - 0.5 + j3.1225)}.$$



Pólos reais negativos com multiplicidade 2 $s = -\sigma$

:

- Função de transferência:

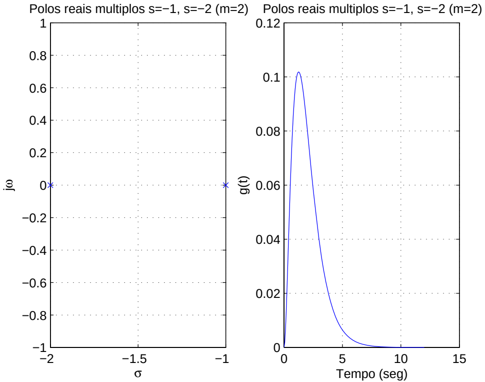
$$\frac{Ki}{(s+\sigma)} + \frac{K_{i+1}}{(s+\sigma)^2}.$$

- Resposta no tempo:

$$K_i \exp^{-\sigma t} + K_{i+1}\, t \exp^{-\sigma t}.$$

A figura ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}.$$



Pólos imaginários $s = \pm j\omega$

:

- Função de transferência:

$$\frac{k_i}{s - j\omega} + \frac{K_{i+1}}{s + j\omega}.$$

Onde $K_i = K_{i+1}^*$.

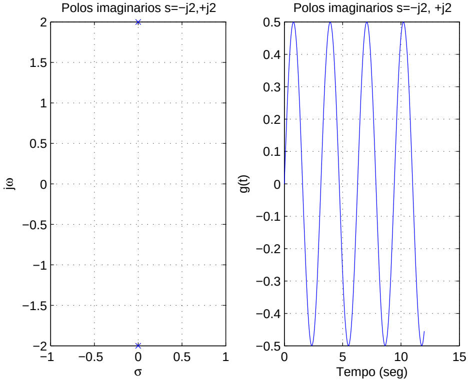
- Resposta no tempo:

$$K_i \exp^{j\omega t} + K_{i+1} \exp^{-j\omega t}, \tag{5}$$

$$A \sin(\omega t + \Phi).$$

A figura ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s - j2)(s + j2)}.$$



Pólos imaginários duplos $s = \pm j\omega$

:

- Função de transferência:

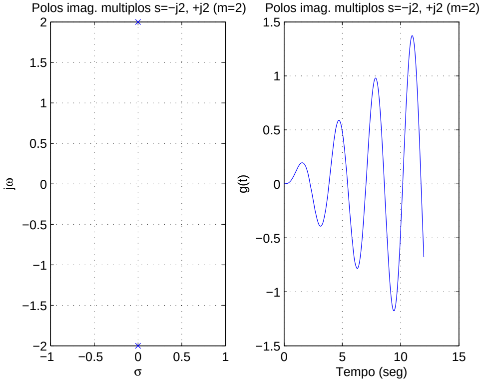
$$\frac{K}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{K}{(s+j\omega)^2(s-j\omega)^2} = \frac{K_1}{(s+j\omega)} + \frac{K_2}{(s+j\omega)^2} + \frac{K_3}{(s-j\omega)} + \frac{K_4}{(s-j\omega)^2}.$$

- Resposta no tempo:

$$g(t) = A_1 \sin(\omega t + \Phi_1) + A_2 t \sin(\omega t + \Phi_2).$$

A figura ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s-j2)^2(s+j2)^2}.$$



O efeito dos zeros

O efeito dos zeros sobre a resposta do sistema é mais difícil de ser inferido.
Apesar da localização dos pólos determinar a natureza dos modos do sistema, é a localização dos zeros que determina a proporção que os modos são combinados.
Estas combinações podem fazer com que os resultados sejam bastante diferentes quando comparados com os modos individuais relativos a cada pólo.

Da mesma forma como nos pólos, também podemos definir zeros rápidos e zeros lentos. Zeros rápidos são aqueles que estão bastante afastados em relação ao eixo imaginário quando comparado com os pólos dominantes.
Por outro lado, zeros lentos são aqueles que estão bem mais próximos do eixo imaginário do que os pólos dominantes.

Para ilustrar a influência dos zeros na resposta do sistema a resposta a degrau de vários sistemas com pólos iguais mas com zeros diferentes são comparados.
Os sistemas definidos pelas funções de transferência $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$ e suas respectivas expansões em frações parciais podem ser observados na Tabela. A expansão em frações parciais de qualquer um desses sistemas pode ser representada por:

$$Y(s) = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+1+j)} + \frac{K_3}{(s+1-j)} + \frac{K_4}{s}.$$

	K_1	K_2	K_3	K_4
$G_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	-2	$0.5 + j0.5$	$0.5 - j0.5$	1
$G_2(s) = \frac{0.2(s+10)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	2	$-1.5 - j0.5$	$-1.5 - j0.5$	1
$G_3(s) = \frac{-0.2(s+10)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	-6	$2.5 + j0.5$	$2.5 - j0.5$	1
$G_4(s) = \frac{10(s^2+0.1s+0.2)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	1	$5 + j4.5$	$5 - j4.5$	1

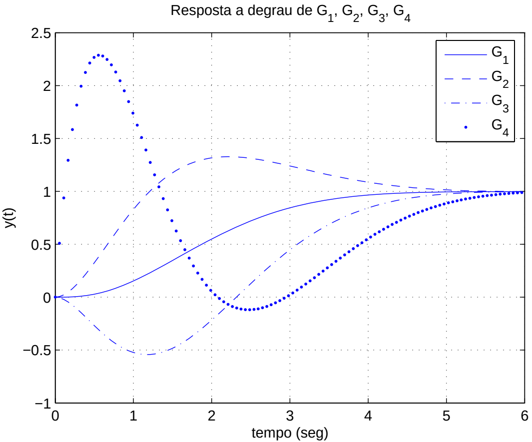


Figura: Respostas a degrau.

Considere, por exemplo, a seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{-s + c}{c(s+1)(0.5s+1)},$$

Nesse sistema é possível verificar a variação da resposta $y(t)$ através da variação do parâmetro c sem a mudança dos valores dos pólos e do ganho do sistema.

Os dois modos naturais do sistema são representados por, $\exp^{-1t}$ e $\exp^{-2t}$, que são relacionados aos pólos -1 e -2 respectivamente.

O efeito do primeiro modo natural $\exp^{-1t}$ pode gradativamente ser anulado a medida que $c \to -1$. O mesmo acontece para $\exp^{-2t}$ quando $c \to -2$. Uma situação mais geral, pode ser observada na Figura onde é apresentado a resposta a degrau do sistema $H(s)$ considerando $c = -0.1, 0.1, -0.25, 0.25, -10, 10$.

Pode ser observado que, para um zero rápido, por exemplo $|c| \gg 1$, não existe um impacto significativo na resposta transitória. Quando o zero é lento e estável o sistema possui sobresinal significativo.
Quando o zero é lento e instável então o sistema exibe um *undershoot* significativo.

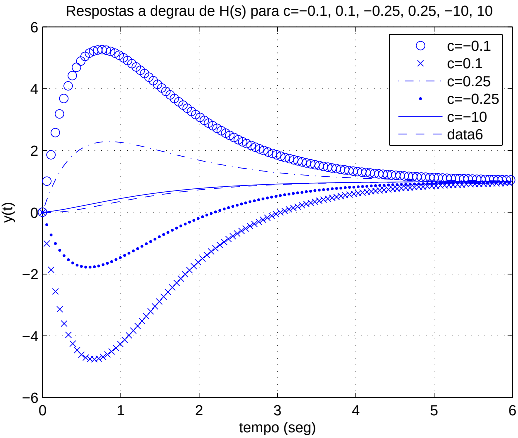


Figura: Respostas a degrau do sistema $H(s)$ para diferentes valores de c.