Capítulo 1

Cálculo da resposta no domínio do tempo: o papel dos pólos e zeros

1.1 Introdução

O cálculo da resposta no domínio do tempo $y(t)$ de um sistema $g(t)$ pode ser calculado através da integral de convolução:

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau,$$

onde $u(t)$ é o sinal de excitação do sistema.

Usualmente, utiliza-se a transformada de Laplace para a conversão do sistema para o domínio da freqüência:

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

Posteriormente, para o cálculo de $y(t)$, pode-se realizar a anti-transformada de Laplace. Para isto, é mais fácil transformar $Y(s)$ utilizando a técnica de expansão em frações parciais, já que cada fração parcial tem anti-transformada facilmente conhecida. Neste caso, é possível evidenciar o efeito de cada pólo do sistema e do sinal de entrada $u(t)$. Os zeros de $Y(s)$ desaparecem na expansão em frações parciais. O efeito dos zeros afeta apenas os coeficentes das frações parciais. A conclusão que devemos chegar é que os zeros do sistema atuam como filtros evidenciando ou anulando o efeito dos pólos do sistema.

1.2 Algumas questões básicas

Seja um sistema linear e invariante no tempo representado por:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = \\ b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t),$$

onde,

$$y^{(i)}(t) \triangleq \frac{d^{(i)}y(t)}{dt^{(i)}}, \qquad u^{(i)}(t) \triangleq \frac{d^{(i)}u(t)}{dt^{(i)}},$$

Podemos definir:

$$D(p) \triangleq a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0,$$

e

$$N(p) \triangleq b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0,$$

onde,

$$p^{(i)} \triangleq \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}}.$$

Utilizando esta notação podemos escrever:

$$D(p)y(t) = N(p)u(t). \tag{1.7}$$

A solução para $y(t)$ envolve dois termos. O primeiro, corresponde a resposta do sistema $D(p)y(t) = N(p)u(t)$ considerando uma entrada nula, i.e., $u(t) = 0$. Neste caso, a Equação 1.7 se reduz a equação denominada *Homogênea*,

$$D(p)y(t) = 0.$$

A sua transformada de Laplace pode ser expressa como:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{D(s)},$$

onde $I(s)$ é um polinômio cujos coeficientes dependem das condições iniciais. $D(s)$ é denominado polinômio característico de 1.7 porque caracteriza a resposta denominada livre, não forçada ou resposta natural. As raízes de $D(s)$ são denominadas modos do sistema.

Por exemplo, se:

$$D(s) = (s-2)(s+1)^2(s+2-j3)(s+2+j3).$$

Os modos do sistema nesse caso são: $2, -1, -2+j3, 2-j3$.

Os pólos tem multiplicidade unitária, com exceção de -1 que possui multiplicidade igual a dois.

Desta forma, para quaisquer condições iniciais, $Y(s)$ pode ser expandido em frações parciais como:

$$Y(s) = \frac{K_1}{(s-2)} + \frac{K_2}{(s+2-j3)} + \frac{K_3}{(s+2+j3)} + \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_2}{(s+1)^2}. \tag{1.11}$$

A resposta no tempo pode ser escrita como:

$$y(t) = K_1 \exp^{2t} + K_2 \exp^{-(2-j3)t} + K_3 \exp^{-(2+j3)t} + C_1 \exp^{-t} + C_2 t \exp^{-t},$$

onde K_1, K_2, K_3, C_1 e C_2 dependem das condições iniciais.

Se todas as condições iniciais forem nulas a resposta de 1.7 pode ser escrita como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = G(s),$$

onde $G(s)$ é a transformada de Laplace quando as condições iniciais são nulas (c.i.n.):

$$G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\text{c.i.n.}} = \left.\frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]}\right|_{\text{c.i.n.}}.$$

Logo a solução geral da Equação 1.7 pode ser escrita como:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{I(s)}{D(s)}}_{\text{Resposta a Entrada-Zero}} + \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}U(s)}_{\text{Resposta a Estado-Zero}}.$$

Considere por exemplo a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3\frac{du(t)}{dt} - u(t). \tag{1.16}$$

A utilização da transformada de Laplace considerando condições iniciais não nulas, resulta em:

$$s^2Y(s) - sy(0_-) - \dot{y}(0_-) + 3[sY(s) - y(0_-)] + 2Y(s) = 3[sU(s) - u(0_-)] - U(s),$$

onde $\dot{y} = dy/dt$ e as letras maiúsculas denotam as transformadas de Laplace das variáveis representadas pelas letras minúsculas correspondentes.

Fazendo um reagrupamento dos termos podemos escrever a equação acima da seguinte forma:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s+3)y(0_-) + \dot{y}(0_-) - 3u(0_-)}{(s^2+3s+2)}}_{\text{Resposta a Entrada-Zero}} + \underbrace{\frac{3s-1}{(s^2+3s+2)}U(s)}_{\text{Resposta a Estado-Zero}}.$$

Esta equação revela que a solução da Equação 1.16 é parcialmente excitada por $u(t), t > 0$, o que resulta numa parcela denominada de Resposta a Estado-Zero, e parcialmente excitada pelas condições iniciais $y(0_-)$, $\dot{y}(0_-)$, e $u(0_-)$, o que resulta na parcela denominada *Resposta a Entrada-Zero*. Tais condições iniciais serão denominadas aqui de *estado inicial*. O estado inicial pode ser entendido como o resultado da entrada $u(t)$ para $t \leq 0$.

1.3 Classificação das funções de transferência

Considere a seguinte função racional:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

onde $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios com coeficientes reais.

Tais funções de transferência são classificadas de acordo com o grau do polinômio do numerador $\deg N(s)$ e do grau do polinômio do denominador $\deg D(s)$. A Tabela 1.1 a seguir resume a classificação.

Tabela 1.1. *Classificação das funções de transferência.*

$\deg N(s) > \deg D(s)$	imprópria
$\deg N(s) \leq \deg D(s)$	própria
$\deg N(s) < \deg D(s)$	estritamente própria
$\deg N(s) = \deg D(s)$	bi-própria

Se $G(s)$ é bi-própria então $G^{-1}(s)$ também é bi-própria. Em geral, trabalhamos com funções próprias ou estritamente próprias, já que, funções de transferência impróprias descrevem **sistemas não causais**.

1.4 Expansão em frações parciais

Nesta seção, detalha-se a técnica de expansão em frações parciais.

Suponha a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{\prod_{l=1}^{m}(s+z_l)}{\prod_{i=1}^{q}(s+z_i)(s+p_m)^r},$$

whre $i = 1, \ldots, q$ and $n = q + r$. A expansão em frações parciais de $G(s)$ pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{K_i}{(s+p_i)} + \frac{A_1}{(s+p_m)} + \frac{A_2}{(s+p_m)^2} + + \ldots + \frac{A_r}{(s+p_m)^r},$$

onde:

$$
\begin{aligned}
K_i &= (s+p_i)G(s)\,\big|_{s=-p_i}\,,\\
A_r &= [(s+p_m)^r G(s)]\,\big|_{s=-p_m}\,,\\
A_{r-1} &= \frac{d}{ds}[(s+p_m)^r G(s)]\,\Big|_{s=-p_m}\\
A_{r-2} &= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[(s+p_m)^r G(s)]\,\Big|_{s=-p_m}\\
&\vdots\\
A_1 &= \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}[(s+p_m)^r G(s)]\,\Big|_{s=-pm}\,.
\end{aligned}
$$

A função no domínio do tempo pode ser escrita como:

$$g(t) = \sum_{i=1}^{q} K_i \exp^{-p_i t} + A_1 \exp^{-p_m t} + A_2 t \exp^{-p_m t} + \ldots + A_r t^{r-1} \exp^{-p_m t}\,.$$

1.5 Pólos e zeros

A seguir, uma definição formal para pólos e zeros é estabelecida.

Definição 1 (Pólo) *número real ou complexo finito* λ *tal que* $|G(\lambda)| = \infty$. ◆

Definição 2 (Zero) *número real ou complexo finito* λ *tal que* $|G(\lambda)| = 0$. ◆

Um primeiro questionamento de ordem teórica que pode ser feito é se todas as raízes do polinômio $D(s)$ são polos de $G(s)$.

Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2(s^3+3s^2-s-3)}{(s-1)(s+2)(s+1)^3}.$$

Para $\lambda = -2$ temos:

$$G(-2) = \frac{6}{0} = \infty.$$

Portanto, $\lambda = -2$ é um pólo e também $\lambda = -2$ é uma raiz de $G(s)$. Agora vamos fazer $\lambda = 1$, dessa forma:

$$G(1) = \frac{N(1)}{D(1)} = \frac{0}{0},$$

o que torna o resultado indefinido. Entretanto, utilizando a regra de L'Hôpital [1] obtemos:

$$\begin{aligned} G(1) = \left.\frac{N(s)}{D(s)}\right|_{s=1} &= \left.\frac{N'(s)}{D'(s)}\right|_{s=1}, \\ &= \left.\frac{2(3s^2+6s-1)}{5s^4+16s^3+12s^2-4s-5}\right|_{s=1}, \\ &= \frac{16}{24} \neq \infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\lambda = 1$ não é um pólo de $G(s)$.

Portanto, nem toda raiz de $D(s)$ é um pólo de $G(s)$. No exemplo acima, o fato se deve ao fato que $N(s)$ e $D(s)$ possuem um fator comum. Na verdade, a função de transferência pode ser escrita como:

$$\frac{2(s+3)(s-1)(s+1)}{(s-1)(s+2)(s+1)^3} = \frac{2(s+3)}{(s+2)(s+1)^2}.$$

$G(s)$ tem um zero em $s = -3$ e três pólos: $s = -2, -1, -1$.

Através deste exemplo, concluímos que se os polinômios $N(s)$ e $D(s)$ não possuem fatores comums, então todas as raízes de $N(s)$ e $D(s)$ são respectivamente zeros e pólos de $G(s)$.

Se $N(s)$ e $D(s)$ não possuem um fator comum eles são denominados co-primos e $G(s)$ é denominado irredutível.

Resposta a estado-zero A resposta a estado-zero é estabelecida pela seguinte equação:

$$Y(s) = G(s)U(s). \tag{1.28}$$

Computa-se inicialmente a transformada de Laplace de $u(t)$, $U(s)$, e posteriomente podemos obter $Y(s)$. Uma expansão em frações parciais de $Y(s)$ pode facilmente levar a transformada de Laplace inversa para obtenção da resposta do sistema no domínio do tempo $y(t)$. A seguir são apresentados alguns exemplos.

Exemplo 1 Dado o sistema

$$G(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)},$$

[1] A regra de L'Hôpital pode ser utilizada quando existe uma indeterminação do tipo $\lim_{x\to p} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{0}{0}$. Dado $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis e $g'(p) \neq 0$ então:

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1.26}$$

calcular a resposta para um entrada a degrau unitário $u(t) = 1$ para $t \geq 0$. Podemos escrever $Y(s)$ como:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s}.$$

A expansão em frações parciais pode ser representada como:

$$Y(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)s} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)} + \frac{K_3}{s},$$

onde os coeficientes podem ser calculados como:

$$K_1 = Y(s)(s+1)|_{s=-1} = \left.\frac{3s-1}{(s+2)s}\right|_{s=-1} = \frac{(-4)}{(1)\times(-1)} = 4,$$
$$K_2 = Y(s)(s+1)|_{s=-2} = \left.\frac{3s-1}{(s+1)s}\right|_{s=-2} = \frac{(-7)}{(-1)\times(-2)} = -3.5,$$
$$K_3 = Y(s)s|_{s=0} = \left.\frac{3s-1}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{(-1)}{(2)} = -0.5.$$

$Y(s)$ pode então ser representada como:

$$Y(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)s} = \frac{4}{(s+1)} + \frac{-3.5}{(s+2)} + \frac{-0.5}{s},$$

A resposta no tempo pode então ser calculada como:

$$y(t) = \underbrace{4\exp^{-t} - 3.5\exp^{-2t}}_{\text{Devido aos pólos de } G(s)} - \underbrace{0.5}_{\text{Devido ao pólo de } U(s)}.$$

Podemos observar através do Exemplo 1 que os termos relativos aos pólos do sistema podem ser divididos em duas partes, uma relativa aos pólos do sistema $G(s)$ e um relativo ao pólo de $U(s)$.

A resposta deste sistema poderia ser escrita genericamente como:

$$y(t) = K_1\exp^{-t} + K_2\exp^{-2t} + \text{termos devidos aos pólos de } U(s).$$

Uma questão importante é que dependendo de $u(t)$, os pólos de $G(s)$ podem não ser excitados. O exemplo a seguir ilustra esta questão.

Exemplo 2 Considere por exemplo $U(s) = s+1$. Neste caso,

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)}(s+1),$$
$$= \frac{3s-1}{(s+2)} = \frac{3(s+2)-7}{(s+2)} = 3 - \frac{7}{(s+2)}.$$

O que implica em:

$$y(t) = 3\delta(t) - 7\exp^{-2t}.$$

Exemplo 3 Vamos supor agora que:

$$u(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\exp -3t,$$

A transformada de Laplace é dada por:

$$U(s) = \frac{(s+1)}{s(s+3)},$$

dessa forma,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3s-1}{(s+2)(s+1)}\frac{s+1}{s(s+3)} = \frac{3s-1}{(s+2)(s+3)s} \\ &= \frac{7}{2(s+2)} - \frac{10}{3(s+3)} - \frac{1}{6s}. \end{aligned}$$

A resposta do sistema no domínio do tempo $y(t)$ é dada por:

$$y(t) = \frac{7}{2}\exp^{-2t} - \frac{10}{3}\exp^{-3t} - \frac{1}{6}.$$

Neste exemplo, é possível observar que a excitação ou não do pólo depende se $U(s)$ possui um zero para cancelá-lo.

1.6 Pólos e suas características no domínio do tempo

A seguir apresenta-se os casos principais dos tipos de termos que comumente aparecem numa expansão em frações parciais em conjunto com sua descrição analítica e gráfica.

1. **Pólo real negativo** $s = -\sigma$:

   · Função de transferência:

   $$\frac{K}{(s+\sigma)}.$$

   · Resposta no tempo:

   $$K\exp^{-\sigma t}.$$

A figura 1.1 ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)}.$$

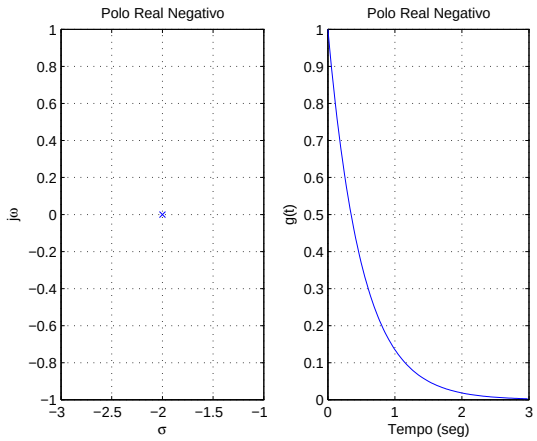

Figura 1.1. *Localização dos pólos e resposta impulsiva do sistema* $G(s) = 1/(s+2)$.

2. **Pólo real positivo** $s = +\sigma$:

   · Função de transferência:

   $$\frac{K}{(s-\sigma)}.$$

   · Resposta no tempo:

   $$K \exp^{\sigma t}.$$

A figura 1.2 ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)}.$$

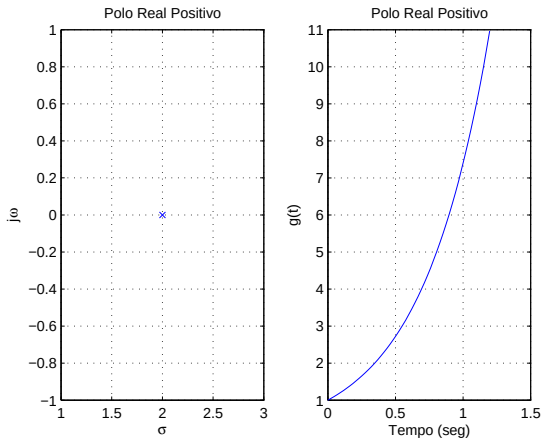

Figura 1.2. *Localização dos pólos e resposta impulsiva do sistema* $G(s) = 1/(s-2)$.

3. **Pólos complexos conjugados com parte real negativa** $s = -\sigma \pm j\omega$:

   · Função de transferência:

   $$\frac{K_i}{(s+\sigma-j\omega)} + \frac{K_{i+1}}{(s+\sigma+j\omega)}.$$

   Onde $K_i = K_{i+1}^*$.

   · Resposta no tempo:

   $$K_i \exp^{-(\sigma-j\omega)t} + K_{i+1} \exp^{-(\sigma+j\omega)t},$$
   $$A \exp^{-\sigma t} \sin(\omega t + \Phi).$$

A figura 1.3 ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s-0.5-j3.1225)(s-0.5+j3.1225)}.$$

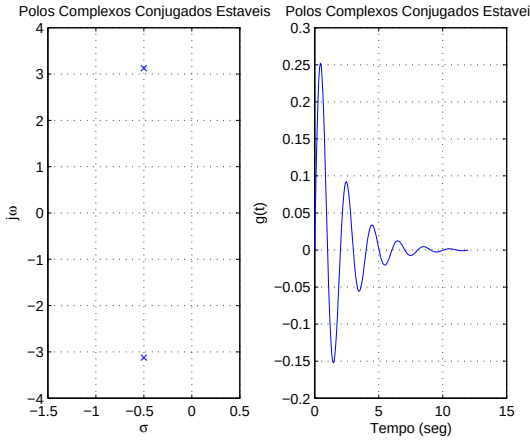

Figura 1.3. *Localização dos pólos e resposta impulsiva do sistema* $G(s)$.

4. **Pólos complexos conjugados com parte real positiva** $s = +\sigma \pm j\omega$:

   · Função de transferência:

   $$\frac{K_i}{(s-\sigma-j\omega)} + \frac{K_{i+1}}{(s-\sigma+j\omega)}.$$

   Onde $K_i = K_{i+1}^*$.

   · Resposta no tempo:

   $$K_i \exp^{-(-\sigma-j\omega)t} + K_{i+1} \exp^{-(-\sigma+j\omega)t},$$
   $$A \exp^{\sigma t} \sin(\omega t + \Phi).$$

A figura 1.4 ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s-0.5-j3.1225)(s-0.5+j3.1225)}.$$

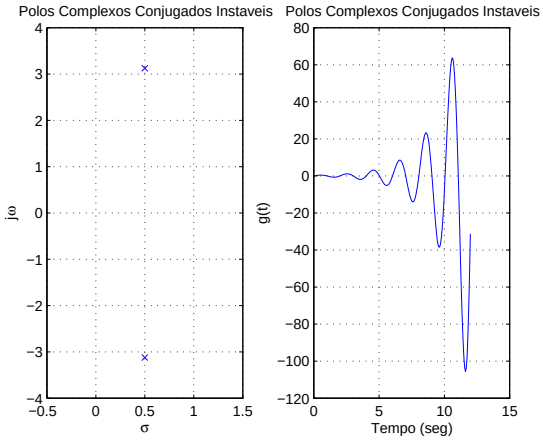

Figura 1.4. *Localização dos pólos e resposta impulsiva do sistema* $G(s)$.

5. **Pólos reais negativos com multiplicidade 2** $s = -\sigma$:

   · Função de transferência:

$$\frac{Ki}{(s+\sigma)} + \frac{K_{i+1}}{(s+\sigma)^2}.$$

   · Resposta no tempo:

$$K_i \exp^{-\sigma t} + K_{i+1} t \exp^{-\sigma t}.$$

A figura 1.5 ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}.$$

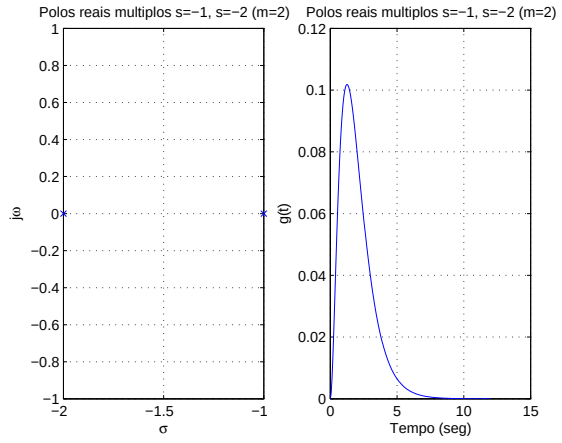

Figura 1.5. *Localização dos pólos e resposta impulsiva do sistema* $G(s) = 1/(s = 1)(s+2)^2$.

6. **Pólos imaginários** $s = \pm j\omega$:

   · Função de transferência:

$$\frac{k_i}{s - j\omega} + \frac{K_{i+1}}{s + j\omega}.$$

   Onde $K_i = K_{i+1}^*$.

   · Resposta no tempo:

$$K_i \exp^{j\omega t} + K_{i+1} \exp^{-j\omega t}, \tag{1.53}$$
$$A \sin(\omega t + \Phi).$$

A figura 1.6 ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s - j2)(s + j2)}.$$

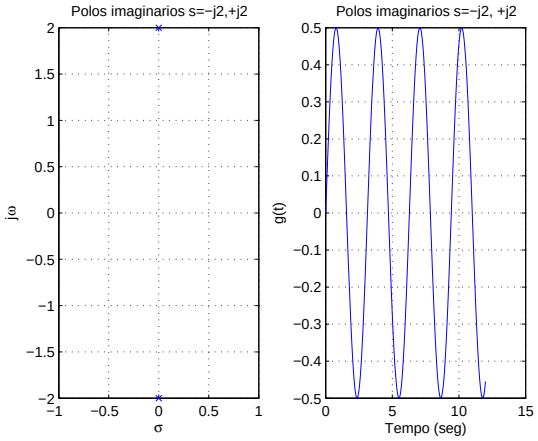

Figura 1.6. *Localização dos pólos e resposta impulsiva do sistema* $G(s) = 1/(s - j2)(s + j2)$.

7. **Pólos imaginários duplos** $s = \pm j\omega$:

   · Função de transferência:

$$\frac{K}{(s^2 + \omega^2)^2} =$$
$$\frac{K}{(s + j\omega)^2(s - j\omega)^2} =$$
$$\frac{K_1}{(s + j\omega)} + \frac{K_2}{(s + j\omega)^2} + \frac{K_3}{(s - j\omega)} + \frac{K_4}{(s - j\omega)^2}.$$

   · Resposta no tempo:

$$g(t) = A_1 \sin(\omega t + \Phi_1) + A_2 t \sin(\omega t + \Phi_2).$$

A figura 1.7 ilustra a localização do pólo e a resposta impulsiva para o sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s - j2)^2(s + j2)^2}.$$

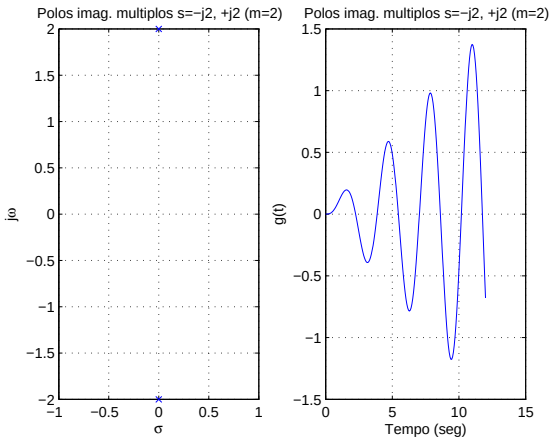

Figura 1.7. *Localização dos pólos e resposta impulsiva do sistema* $G(s) = 1/(s - j2)^2(s + j2)^2$.

1.7 O efeito dos zeros

O efeito dos zeros sobre a resposta do sistema é mais difícil de ser inferido. Apesar da localização dos pólos determinar a natureza dos modos do sistema, é a localização dos zeros que determina a proporção que os modos são combinados. Estas combinações podem fazer com que os resultados sejam bastante diferentes quando comparados com os modos individuais relativos a cada pólo.

Da mesma forma como nos pólos, também podemos definir zeros rápidos e zeros lentos. Zeros rápidos são aqueles que estão bastante afastados em relação ao eixo imaginário quando comparado com os pólos dominantes. Por outro lado, zeros lentos são aqueles que estão bem mais próximos do eixo imaginário do que os pólos dominantes.

Exemplo 4 Para ilustrar a influência dos zeros na resposta do sistema a resposta a degrau de vários sistemas com pólos iguais mas com zeros diferentes são comparados. Os sistemas definidos pelas funções de transferência $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$ e suas respectivas expansões em frações parxiais podem ser observados na Tabela 4. A expansão em frações parciais de qualquer um desses sistemas pode ser representada por:

$$Y(s) = \frac{K_1}{(s + 1)} + \frac{K_2}{(s + 1 + j)} + \frac{K_3}{(s + 1 - j)} + \frac{K_4}{s}.$$

A Figura 1.8 ilustra a resposta a degraus do sistemas $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$.

Tabela 1.2. *Respostas a degrau dos sistemas $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$.*

	K_1	K_2	K_3	K_4
$G_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	-2	$0.5 + j0.5$	$0.5 - j0.5$	1
$G_2(s) = \frac{0.2(s+10)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	2	$-1.5 - j0.5$	$-1.5 - j0.5$	1
$G_3(s) = \frac{-0.2(s+10)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	-6	$2.5 + j0.5$	$2.5 - j0.5$	1
$G_4(s) = \frac{10(s^2+0.1s+0.2)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	1	$5 + j4.5$	$5 - j4.5$	1

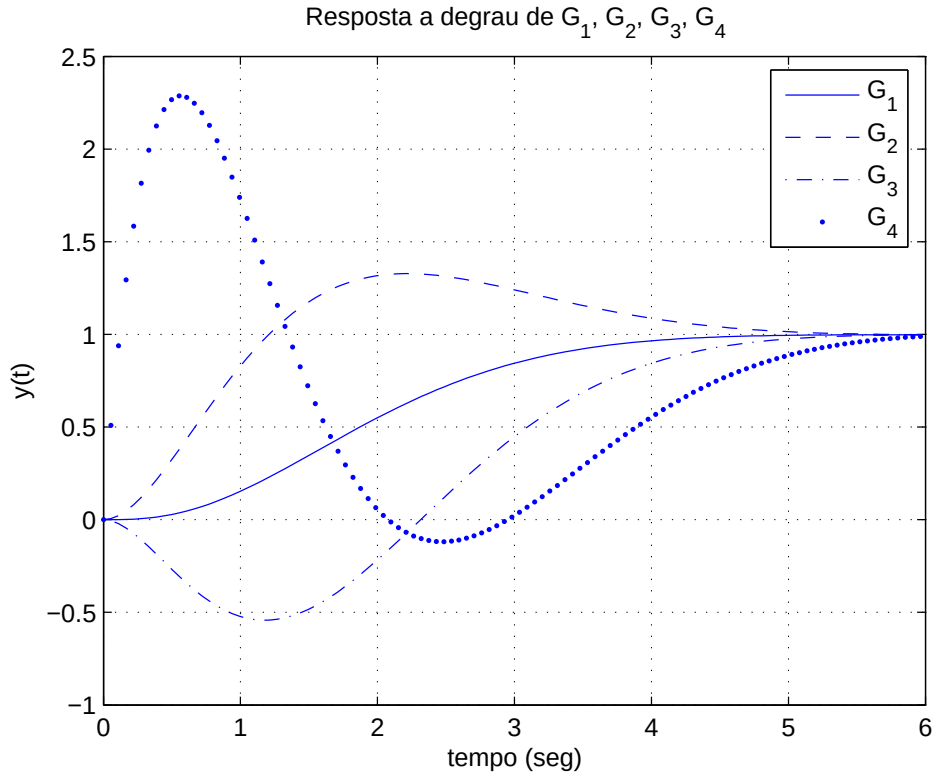

Figura 1.8. *Respostas a degrau dos sistemas $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$.*

Exemplo 5 Considere, por exemplo, a seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{-s + c}{c(s+1)(0.5s+1)},$$

nesse sistema é possível verificar a variação da resposta $y(t)$ através da variação do parâmetro c sem a mudança dos valores dos pólos e do ganho do sistema. Os dois modos naturais do sistema são representados por, $\exp^{-1t}$ e $\exp^{-2t}$, que são relacionados aos pólos -1 e -2 respectivamente. O efeito do primeiro modo natural $\exp^{-1t}$ pode gradativamente ser anulado a medida que $c \to -1$. O mesmo acontece para $\exp^{-2t}$ quando $c \to -2$. Uma situação mais geral, pode ser observada na Figura 1.9 onde é apresentado a resposta a degrau do sistema $H(s)$ considerando $c = -0.1, 0.1, -0.25, 0.25, -10, 10$. Pode ser observado que, para um zero rápido, por exemplo $|c| \gg 1$, não existe um impacto significativo na resposta transitória. Quando o zero é lento e estável o sistema possui sobresinal significativo. Quando o zero é lento e instável então o sistema exibe um *undershoot* significativo.

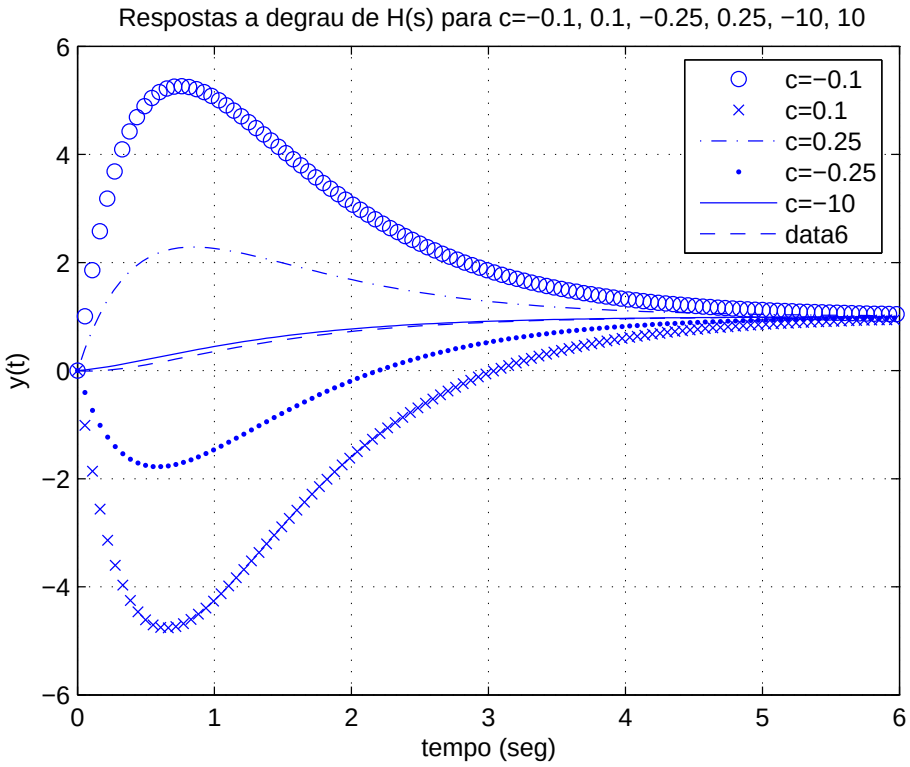

Figura 1.9. *Respostas a degrau do sistema $H(s)$ para diferentes valores de c.*

É possível estabelecer estimativas para o sobresinal e *undershoot*. a seguir alguns resultados desenvolvidos por Goodwin, Graebe e Salgado [2].

[2] G.C. Goodwin, Stefan F. Graebe e M.E. Salgado, Control System Design, Prentice-Hall.

Lema 1 (Zeros de fase não mínima e undershoot) *Assuma um sistema linear e estável com função de transferência $G(s)$ possuindo ganho unitário e um zero em $s = c$, onde $c \in \mathbb{R}^+$. Assuma também que a resposta a degrau unitário do sistema, $y(t)$, tem um tempo de acomodação t_s, i.e., $1 + \delta \geq |y(t)| \leq 1 - \delta, (\delta \ll 1), \forall t \geq t_s$, Então $y(t)$ exibe um* undershoot *M_u, que satisfaz a seguinte relação:*

$$M_u \geq \frac{1-\delta}{\exp^{ct_s} - 1}.$$

Este lema estabelece que, quando o sistema possui zeros de fase não mínima existe uma solução de compromisso entre ter uma resposta rápida e uma resposta com undershoot *pequeno.* ◆

Lema 2 (Zeros lentos e sobresinal) *Assuma um sistema linear e estável, com função de transferência dada por $G(s)$ possuindo ganho unitário e um zero em $s = c, c < 0$. Além disso, assuma que:*

1. *O sistema tem pólos dominantes com parte real igual a $-p, p > 0$,*
2. *O zero e o pólo dominante são relacionados através da seguinte equação:*

$$\eta \triangleq \left| \frac{c}{p} \right| \ll 1,$$

3. *O valor de δ definindo o tempo de assentamento t_s é escolhido tal que $K > 0$ resultando que:*

$$|v(t)| < K \exp^{-pt}, \quad \forall t \geq t_s.$$

É possível concluir que a resposta a degrau possui um sobresinal que é limitado de acordo com a seguinte relação:

$$M_P \geq \frac{1}{\exp^{-ct_s} - 1} \left(1 - \frac{K\eta}{1-\eta} \right).$$

Este lema estabelece que quando um sistema estável possui zeros lentos, existe uma solução de compromisso entre uma resposta rápida e um sobresinal pequeno. ◆