Capítulo 2

Estabilidade de sistemas de controle lineares invariantes no tempo

2.1 Introdução

Neste capítulo, vamos definir alguns conceitos relacionados à estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo.

Inicialmente, são definidos os conceitos de estabilidade Entrada-Saída (ou estabilidade com condições iniciais nulas), estabilidade interna (ou estabilidade com entrada nula). Em seguida apresenta-se as condições que definem se um sistema é estável, marginalmente estável (ou instável) e instável. juntamente com critério de estabilidade de Routh-Hurwitz para a determinação da estabilidade de sistemas.

O material aqui apresentado é baseado nos seguintes livros:

- Ogata, K. *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, 4th Edition, 2002.
- Kuo, B.C. *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall, 7th Edition, 1995.
- Dorf, R.C. *Modern Control Systems*, Addison-Wesley, 10th Edition, 2004.
- Chen, Chi-Tsong. *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, 3rd Edition, 1998

2.2 Algumas definições

Definição 1 (Estabilidade absoluta) *se refere a condição se um sistema é estável ou instável.* ◆

Definição 2 (Estabilidade relativa) *se o sistema é estável, pode-se determinar o grau de estabilidade deste sistema.* ◆

Definição 3 (Resposta com condições iniciais nulas (zero-state response)) *resposta devida ao sinal de entrada apenas.* ◆

Definição 4 (Resposta com entrada nula (zero-input response)) *resposta devida às condições iniciais apenas.* ◆

Definição 5 (Resposta total) *resposta com condições iniciais nulas + resposta com entrada nula.* ◆

2.3 Estabilidade Entrada-Saída (Bounded-Input Bounded-Output)

Seja:

- $u(t)$: entrada do sistema,

- $y(t)$: saída do sistema,
- $g(t)$ resposta impulsiva.

Definição 6 (Estabilidade Entrada-Saída) *com condições iniciais nulas, o sistema é dito ser Entrada-Saída estável, ou simplesmente estável, se a saída $y(t)$ é limitada para uma entrada $u(t)$ limitada.* ◆

A integral de convolução é dada por:

$$y(t) = \int_0^\infty u(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{2.1}$$

Tomando o módulo de ambos os lados temos:

$$|y(t)| = \left| \int_0^\infty u(t-\tau)g(\tau)d\tau \right|.$$

Distribuindo o módulo para ambos os termos da integral, podemos escrever:

$$|y(t)| \le \int_0^\infty |u(t-\tau)||g(\tau)|d\tau. \tag{2.2}$$

Se $u(t)$ é limitado:

$$|u(t)| \le M, \quad M \ge 0. \tag{2.3}$$

Então podemos escrever::

$$|y(t)| \le M \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau. \tag{2.4}$$

Se $y(t)$ deve ser limitado, então:

$$|y(t)| \le N < \infty, \tag{2.5}$$

onde $N > 0$.

Através de uma escolha adequada de N podemos escrever, observando as Equações 2.4 e 2.5,

$$M \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \le N < \infty. \tag{2.6}$$

Ou seja, deve existir um $0 < N < \infty$, tal que a Equação 2.6 possa sempre ser feita verdadeira. Ou ainda, para um número $0 < Q < \infty$:

$$\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \le Q < \infty. \tag{2.7}$$

A condição dada pela Equação 2.7 implica que a área sobre a curva $|g(\tau)| \times \tau$ deve ser finita.

Podemos concluir então, que se admitirmos que a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$ são limitados isto implica em que a Equação 2.7, que envolve a resposta impulsiva $g(\tau)$, deve necessariamente ser finita.

2.4 Relação entre estabilidade e as raízes da equação característica

Teorema 1 *Um sistema SISO com uma função de transferência própria e racional $G(s)$ é estável, se e somente se cada pólo de G(s), $\sigma_i + j\omega_i$ $(i = 1, \dots, n)$ possui parte real negativa, i.e. $\sigma_i < 0$.* ◆

Para mostrar a relação entre as raízes da equação característica e a condição dada pela Equação 2.7, vamos escrever a função de transferência $G(s)$ através da definição:

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt. \tag{2.8}$$

Tomando o módulo em ambos os lados, temos:

$$|G(s)| = \left| \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \right| \leq \int_0^\infty |g(t)||e^{-st}|dt. \tag{2.9}$$

Vamos assumir agora, que $|e^{-st}| = |e^{-\sigma t}|$, onde σ é a parte real de s, ou seja, vamos considerar apenas a parte real de s.

Quando s assume o valor de um pólo temos:

$$G(s) = \infty.$$

Desta forma, a Equação 2.9 pode ser escrita como:

$$\infty \leq \int_0^\infty |g(t)||e^{-\sigma t}|dt. \tag{2.10}$$

Se uma ou mais raízes estão no semi-plano direito de s ou no eixo $j\omega$ temos que $\sigma \geq 0$, então:

$$|e^{-\sigma t}| \leq M = 1. \tag{2.11}$$

Então, a Equação 2.10 torna-se:

$$\infty \leq \int_0^\infty M|g(t)|dt = \int_0^\infty |g(t)|dt. \tag{2.12}$$

o que viola a condição de estabilidade. Com pólos no semi plano direito ($\sigma > 0$) a integral $\int_0^\infty |g(t)|dt$ assume valores infinitos, o que indica que o sistema é instável.

Recapitulando, sabemos pela Equação 2.7 desenvolvida na Seção 2.3 que se a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$ forem limitadas, isto implica em que a seguinte equação:

$$\int_0^\infty |g(t)|dt, \tag{2.13}$$

também deve ser limitada. Para um ponto particular $s = \sigma \geq 0$, demonstramos através da Equação 2.12 que obtemos um valor infinito para a integral dada pela Equação 2.13. Ou seja, a escolha de um pólo dado por $s = \sigma \geq 0$ leva a um sistema que não satisfaz as condições de estabilidade de Entrada-Saída.

Observações Os argumentos acima foram extraídos do livro *Automatic Control Systems*, de B.C. Kuo, entretanto esta demonstração é incompleta já que não demonstra que a Equação 2.7 converge caso seja escolhido um σ negativo (pólo estável).

A única maneira de resolver este problema é utilizar resultados de sistemas descritos por equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = C(t)x(t), \end{cases} \tag{2.14}$$

Neste caso, podemos escrever:

$$\int_0^\infty |g(t)|dt = \int_0^\infty |Ce^{At}B|dt, \tag{2.15}$$

e demonstrar que a matriz A deve conter auto-valores (raízes da equação característica) com parte real negativa para que esta integral seja limitada. Uma demonstração completa deste resultado foge do escopo deste curso, quem tiver interesse pode consultar o Livro: *Linear System Theory*, Wilson J. Rugh, Prentice-Hall, 2nd Edition, 1996.

2.5 Estabilidade Interna

A estabilidade interna se refere à condição de estabilidade quando a entrada é nula e o sistema é dirigido pelas condições iniciais não nulas $\mathbf{x_0}$.

Definição 7 *A resposta com entrada nula do sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ é marginalmente estável se para cada estado inicial finito x_0 excita uma resposta $\mathbf{x}(t)$ limitada.* ◆

Definição 8 *A resposta com entrada nula do sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ é assintoticamente estável se para cada estado inicial finito x_0 excita uma resposta $\mathbf{x}(t)$ limitada e ainda $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x} = 0$.* ◆

Teorema 2 *A equação $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ é marginalmente estável se e apenas se todos os autovalores de A possuem parte real nula ou negativa e aqueles com parte nula são raízes simples do polinômio mínimo de A [2].* ◆

Teorema 3 *A equação $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ é assintoticamente estável se e apenas se todos os autovalores de A possuem parte real negativa.* ◆

[2] O conceito de polinômio mínimo é bastante complexo e relevante para os casos em que existem autovalores múltiplos. Dado uma matriz A, o seu polinômio mínimo é o polinômio mônico (polinômio com coeficiente do termo de maior grau igual a 1) $\psi(\lambda)$ de menor grau tal que $\psi(A) = \mathbf{0}$.

Se λ_i é um autovalor de A com multiplicidade n_i a equação característica é escrita como:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{n_i} \tag{2.16}$$

Suponha que a Forma diagonal de Jordan de A seja conhecida. O polinômio mínimo $\psi(\lambda)$ pode ser escrito como:

$$\psi(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{\bar{n}_i}, \tag{2.17}$$

onde $\bar{n}_i$ é a maior ordem de todos os blocos de Jordan associados com λ_i. Obviamente temos $\bar{n}_i < n_i$. Se todos os autovalores forem distintos, então a equação característica $\Delta(\lambda)$ e o polinômio mínimo $\psi(\lambda)$ são idênticos.

Por exemplo, a matriz a seguir é a forma de Jordan de ordem 4:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

As matrizes $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ apresentadas a seguir são matrizes de sistemas distintos. Os seus polinômios mínimos são distintos mas as equações características são idênticas.

1.
$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$
$$\psi_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4 (\lambda - \lambda_2), \tag{2.20}$$
$$\Delta_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4 (\lambda - \lambda_2). \tag{2.21}$$

2.
$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$
$$\psi_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_2), \tag{2.23}$$
$$\Delta_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4 (\lambda - \lambda_2). \tag{2.24}$$

3.
$$\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$
$$\psi_3(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2), \tag{2.26}$$
$$\Delta_3(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4 (\lambda - \lambda_2). \tag{2.27}$$

Aqui, não demonstraremos tais teoremas. Utilizaremos alguns exemplos como ilustração. Vamos supor, o seguinte sistema de 1a. ordem:

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t). \tag{2.28}$$

Este sistema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \\ y(t) = x(t), \end{cases} \tag{2.29}$$

o que corresponde à representação em espaço de estados.

Fazendo o sinal de entrada $u(t) = 0$, obtemos:

$$\dot{x}(t) = ax(t). \tag{2.30}$$

Utilizando a propriedade da Transformada de Laplace para a derivada de um sinal, temos:

$$sX(s) - x(0) = aX(s). \tag{2.31}$$

Logo:

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} x(t) = e^{at}x(0). \tag{2.32}$$

Observando a Equação 2.32 podemos concluir que:

- Se o pólo é positivo ($a > 0$) então $x(t)$ cresce indefinidamente, ou seja:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty. \tag{2.33}$$

- Se o pólo é negativo ($a < 0$) então $x(t)$ decresce exponencialmente, ou seja:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{2.34}$$

Obviamente, a estabilidade assintótica do estado $x(t)$ implica na estabilidade assintótica da saída $y(t)$.

O mesmo resultado, pode ser extrapolado para sistemas de ordem n:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \tag{2.35}$$

onde A é uma matriz $n \times n$. Neste caso, poderíamos escrever:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}x(0), \tag{2.36}$$

e da mesma forma, o vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ decresce exponencialmente se e somente se os pólos do sistema tiverem parte real negativa.

A Figura 2.1 ilustra a resposta de $\mathbf{x}(t)$ no tempo e a trajetória no plano de fase do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \tag{2.37}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \tag{2.38}$$

Para entrada nula $u(t) = 0$ e as seguintes condições iniciais:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Note que este sistema é assintoticamente estável com autovalores de parte real negativa -1 e -2.

Este sistema é equivalente a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}. \tag{2.39}$$

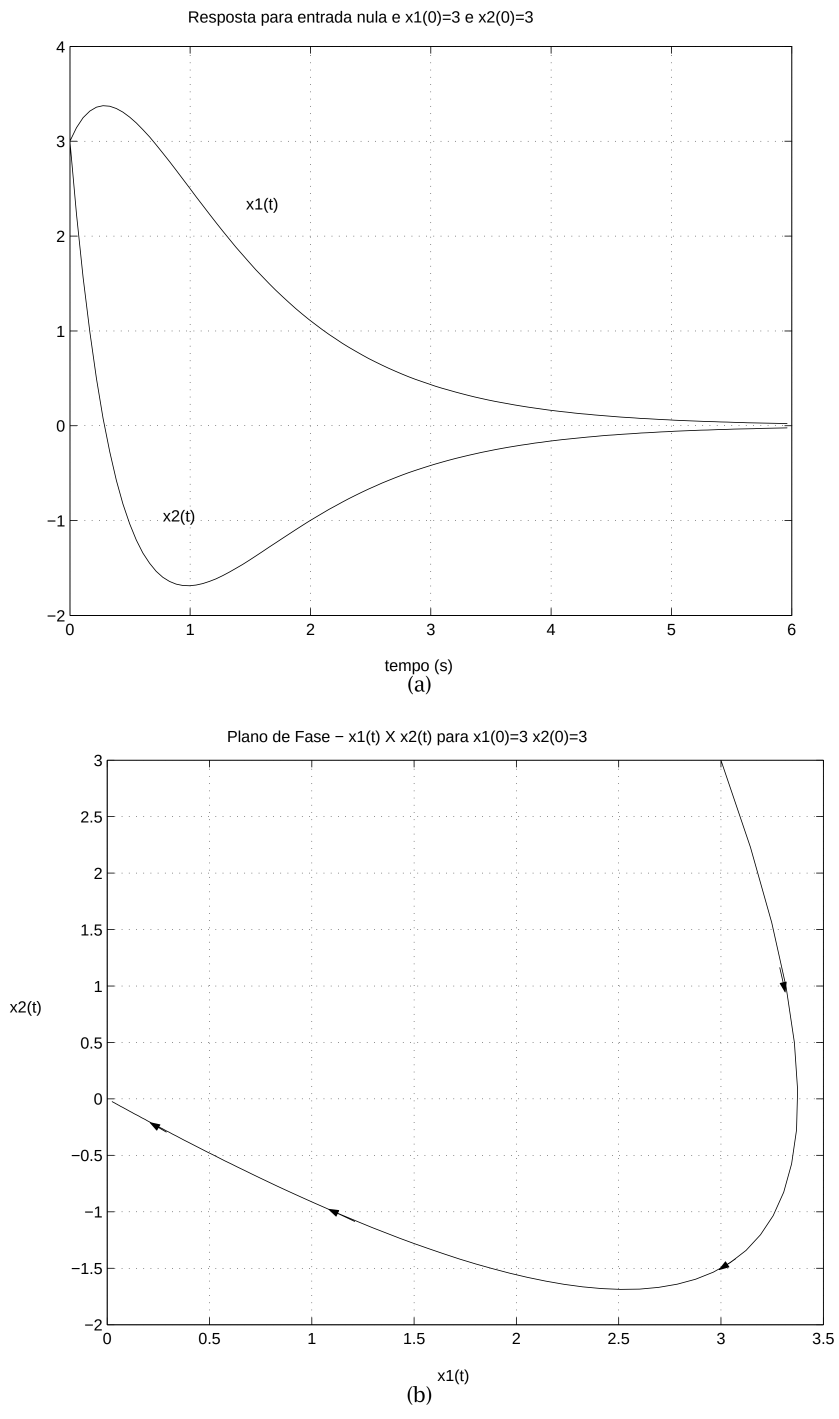


Figura 2.1. *(a) Evolução de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ em função do tempo - (b) Trajetória do sistema para entrada nula e condições iniciais $x(0)$ no espaço de estados (plano de fase).*

Observação 1 *Note que na estabilidade interna estamos interessados na estabilidade de $x(t)$ e não de $y(t)$. Lembre-se que a função de transferência do sistema dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ pode não conter todos os pólos do sistema devido ao eventual cancelamento de pólos e zeros.* ◆

2.6 Uma análise da estabilidade através da resposta impulsiva.

Uma função de transferência para um sistema de controle em malha fechada pode ser escrita como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^N\prod_{k=1}^{Q}(s+\sigma_k)\prod_{m=1}^{R}\left[s^2+2\alpha_m s+(\alpha_m^2+\omega_m^2)\right]} \tag{2.40}$$

A resposta impulsiva no tempo pode ser escrita como:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{Q} A_k e^{-\sigma_k t} + \sum_{m=1}^{R} B_m \frac{1}{\omega_m} e^{\alpha_m t}\sin(\omega_m t + \theta_m) \tag{2.41}$$

onde a A_k e B_m são constantes que dependem de σ_i,z_i, α_m, K e ω_m.

Observando a Equação 2.40 acima pode-se notar que para que a resposta seja limitada os pólos do sistema devem estar no semi-plano esquerdo.

2.7 Condições de estabilidade para sistemas SISO invariantes no tempo

A Tabela 2.7 indica cada condição de estabilidade e as características do sistema que devem estar associadas a cada condição.

Rigorosamente, a tabela é válida apenas para análise entrada-saída, onde se analisa os pólos da função de trasnferência. As características associadas aos sistema marginalmente estáveis citadas abaixo não são válidas para a estabilidade interna (onde se analisa os auto-valores), como pôde ser observado na Seção 2.5. Para o caso da estabilidade interna, a estabilidade marginal depende do conceito de polinômio mínimo e não da equação característica da função de transfência $G(s)$. Entretanto, para a maioria dos casos as características citadas abaixo valem tanto para a estabilidade interna quanto para a estabilidade Entrada-Saída.

Tabela 2.1. *Condições de estabilidade de sistemas SISO invariantes no tempo.*

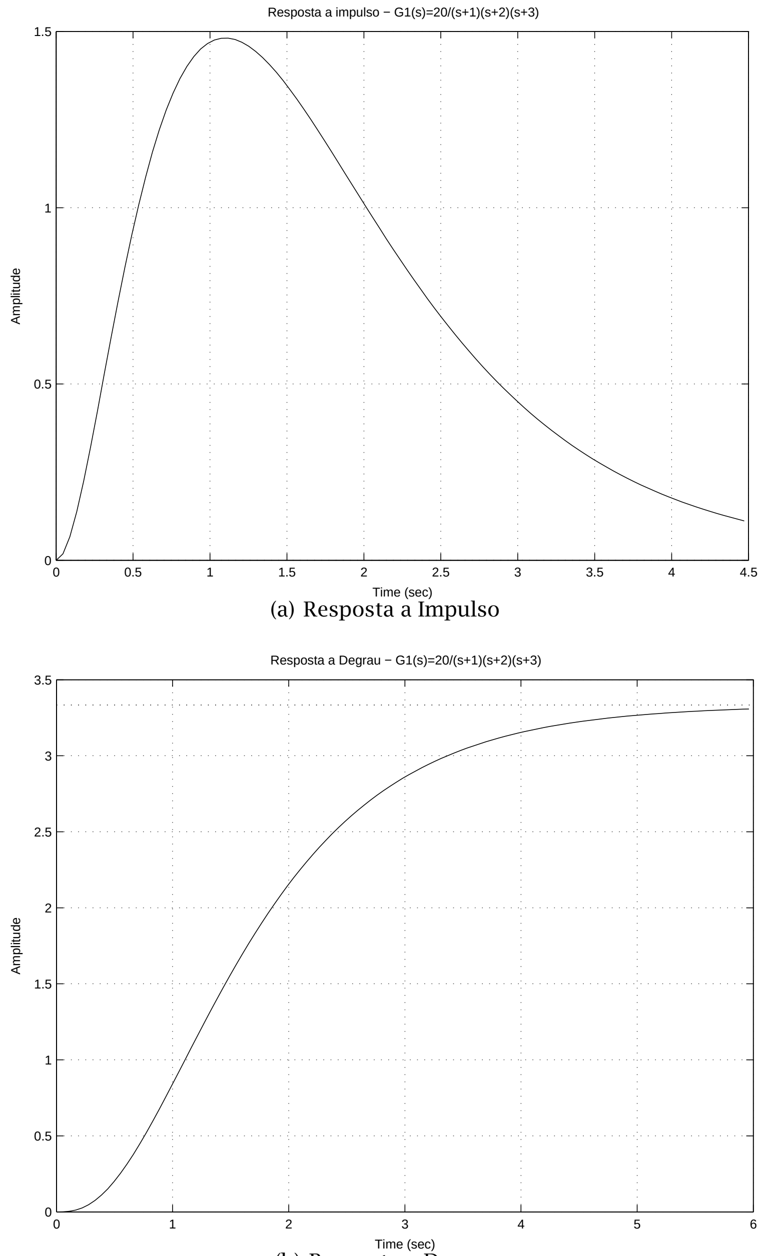
Condição de Estabilidade	**Valores de s** $= \sigma_\mathbf{i} + \mathbf{j}\omega_\mathbf{i} \quad (\mathbf{i} = \mathbf{1},\ldots,\mathbf{n})$
Assintoticamente Estável/ Estável	• $\sigma_i < 0$ para $i = 1,\ldots,n$
Marginalmente estável ou Marginalmente instável	• pelo menos algum $\sigma_i = 0$, • nenhum valor $\sigma_i > 0$, • nenhum pólo múltiplo no eixo $j\omega$.
Instável	• Pelo menos algum $\sigma_i > 0$ ou algum pólo $\sigma_i = 0$ de ordem múltipla (pólo de ordem múltipla no eixo $j\omega$)

Exemplos:

1.

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+3)}. \tag{2.42}$$

Obviamente trata-se de um sistema estável. Os pólos são: $s = -1$, $s = -2$ e $s = -3$. A Figura 2.2 ilustra a resposta impulsiva e a resposta a degrau deste sistema.



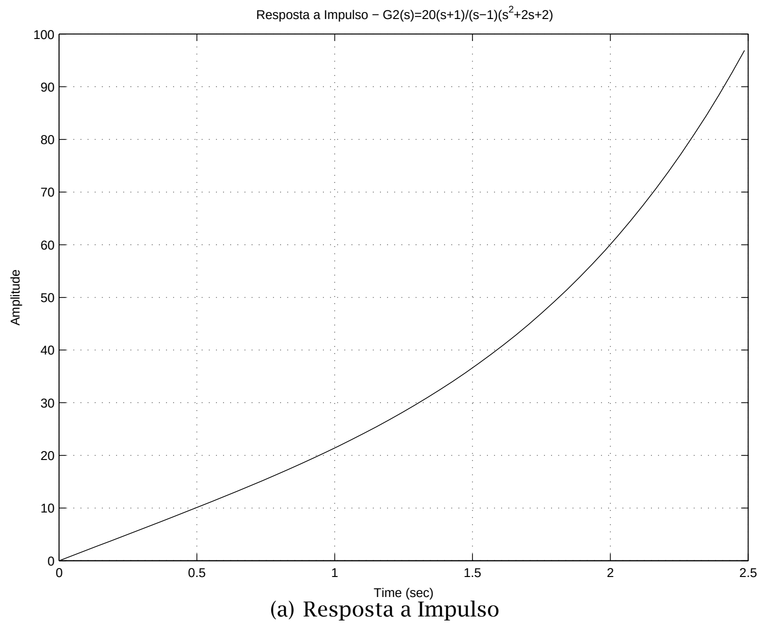
(a) Resposta a Impulso

(b) Resposta a Degrau

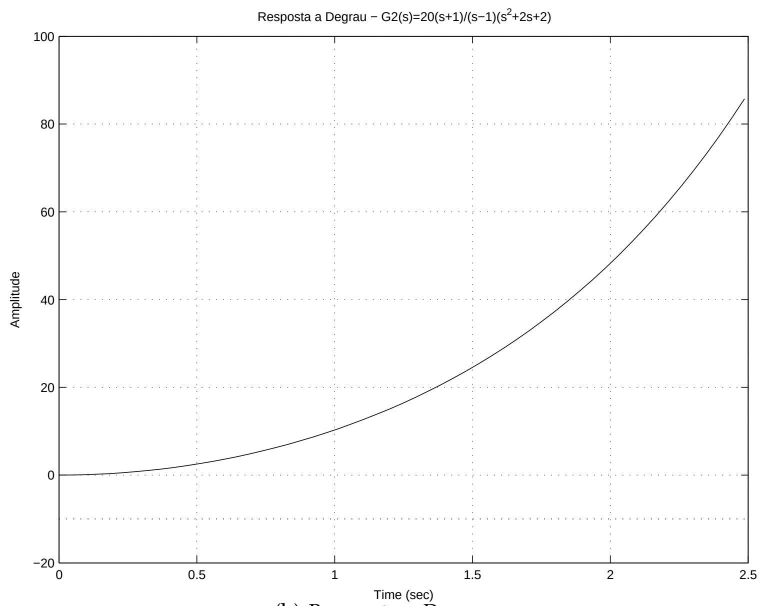
Figura 2.2. *Comportamento do sistema $G_1(s)$.*

2.
$$G_2(s) = \frac{20(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+2)}. \tag{2.43}$$

O sistema é instável porque existe um pólo em $s = 1$. A Figura 2.3 ilustra a resposta impulsiva e a resposta a degrau deste sistema.



(a) Resposta a Impulso

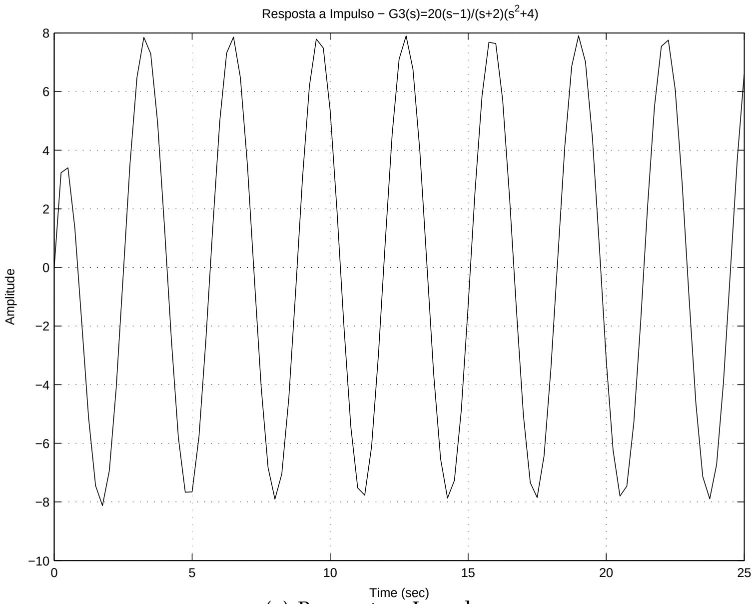


(b) Resposta a Degrau

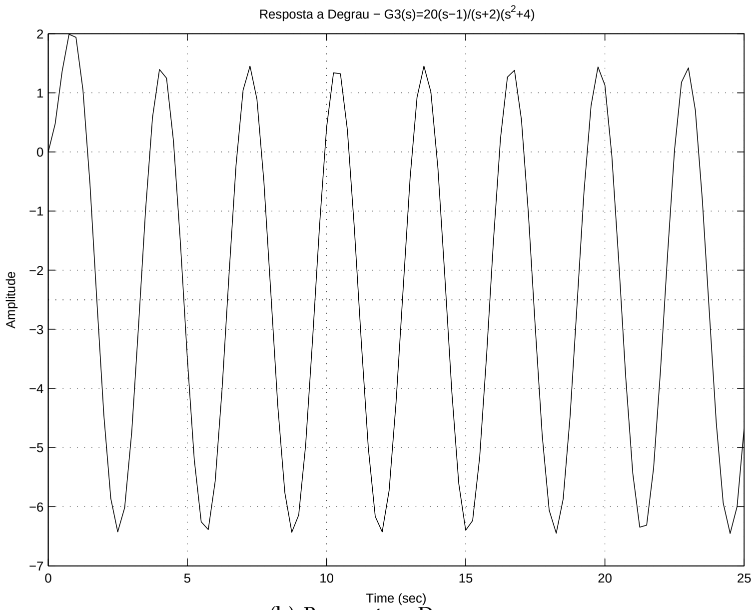
Figura 2.3. *Comportamento do sistema $G_2(s)$.*

3.
$$G_3(s) = \frac{20(s-1)}{(s+2)(s^2+4)}. \tag{2.44}$$

O sistema é marginalmente estável devido ao par de pólos complexos conjugados $\pm j2$. A Figura 2.4 ilustra a resposta impulsiva e a resposta a degrau deste sistema.



(a) Resposta a Impulso

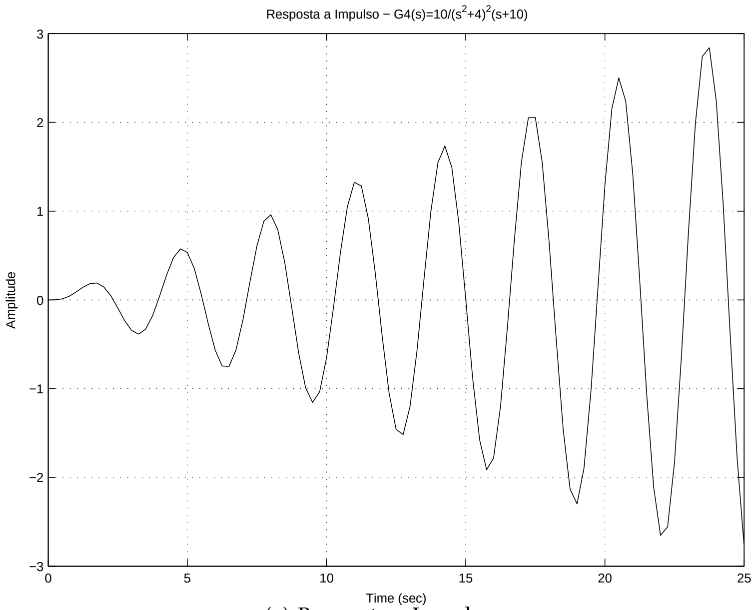


(b) Resposta a Degrau

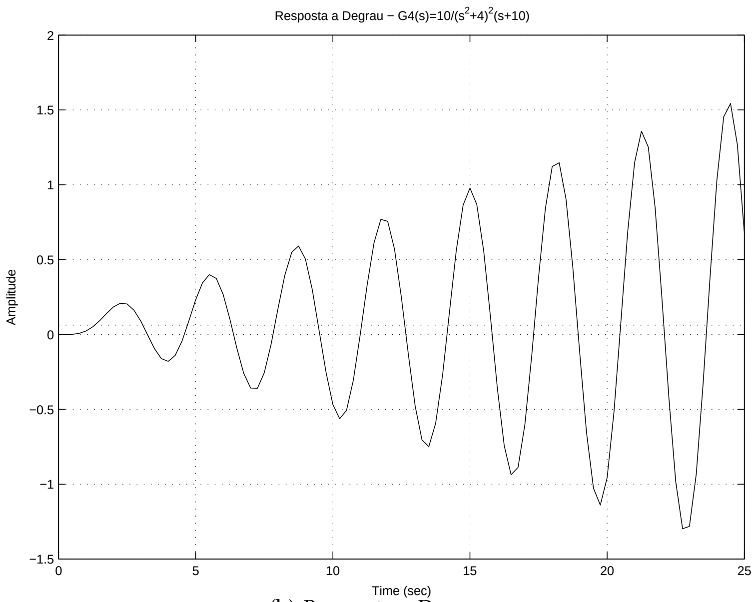
Figura 2.4. *Comportamento do sistema $G_3(s)$.*

4.
$$G_4(s)\frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)}. \tag{2.45}$$

O sistema é instável devido aos pólo complexos de ordem múltipla $s = \pm j2$ A Figura 2.5 ilustra a resposta impulsiva e a resposta a degrau deste sistema.



(a) Resposta a Impulso



(b) Resposta a Degrau

Figura 2.5. *Comportamento do sistema $G_4(s)$.*

2.8 O Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

O método de Routh-Hurwitz permite definir a estabilidade de um sistema a partir da equação característica do sistema. A equação característica de um sistema SISO (Single Input Single Output) invariante no tempo pode ser escrita como:

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0. \tag{2.46}$$

Para se determinar a estabilidade ou não de um sistema é necessário determinar se alguma das raízes de $F(s)$ pertence ao semi-plano direito de s. Se a Equação 2.46 é escrita na forma fatorada obtemos:

$$F(s) = a_n(s - r_1)(s - r_2)\ldots(s - r_n), \tag{2.47}$$

onde r_i é a i-ésima raiz da equação característica. Multiplicando todos os fatores, podemos escrever:

$$\begin{aligned} F(s) =& a_n s^n - a_n(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)s^{n-1} \\ &+ a_n(r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 + \ldots)s^{n-2} \\ &- a_n(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots)s^{n-3} + \ldots \\ &+ a_n(-1)^n r_1r_2r_3\ldots r_n. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Em outras palavras, para uma equação de ordem n, obtemos:

$$\begin{aligned} F(s) =& a_n s^n - a_n(\text{soma de todas as raízes})s^{n-1} \\ &+ a_n(\text{soma de todos os produtos de raízes duas a duas})s^{n-2} \\ &- a_n(\text{soma de todos os produtos de raízes três a três})s^{n-3} + \ldots \\ &+ a_n(\text{produto de todas as raízes}) = 0 \end{aligned}$$

Examinando a Equação 2.48, podemos notar que todos os coeficientes do polinômio devem ter o mesmo sinal se todas as raízes estão no semi-plano esquerdo. Além disso, é necessário que todos os coeficientes sejam não nulos. Estes requisitos são necessários mas não suficientes. Isto é, se estes requisitos não forem satisfeitos, já podemos afirmar que o sistema não é estável. Entretanto, se os requisitos forem satisfeitos, não necessariamente temos um sistema estável. Por exemplo, para a seguinte equação característica:

$$F(s) = (s + 2)(s^2 - s + 4) = (s^3 + s^2 + 2s + 8).$$

Este sistema é instável, mesmo tendo todos os coeficientes de mesmo sinal.

2.9 O critério de Hurwitz

A condição necessária e suficiente para que todas as raízes da equação característica estejam no semi-plano esquerdo é satisfeita quando todos os determinantes de Hurwitz $D_k, k = 1, 2, \ldots$ sejam positivos.

Os determinantes de Hurwitz para a equação característica são dados por:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} \end{vmatrix} \\
D_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \\
D_3 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \\
\cdots & \\
D_n &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

2.10 A tabulação de Routh

Felizmente, não é necessário calcular os determinantes de Hurwitz. Um método equivalente foi desenvolvido por Routh e é comumente denominado tabulação de Routh.

Inicialmente, arranja-se os coeficientes da seguinte forma:

$$
\begin{array}{cccccc}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & a_{n-8} & \cdots \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & a_{n-9} &
\end{array}
$$

Vamos utilizar como exemplo uma equação de 6a. ordem:

$$F(s) = a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0. \tag{2.50}$$

Para este caso a Tabulação de Routh é calculada como:

$$
\begin{array}{ccccc}
s^6 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\
s^4 & \dfrac{a_5 a_4 - a_6 a_3}{a_5} = A & \dfrac{a_5 a_2 - a_6 a_1}{a_5} = B & \dfrac{a_5 a_0 - a_6 0}{a_5} = a_0 & 0 \\
s^3 & \dfrac{A a_3 - a_5 B}{A} = C & \dfrac{A a_1 - a_5 a_0}{A} = D & \dfrac{A0 - a_5 0}{A} = 0 & 0 \\
s^2 & \dfrac{BC - AD}{C} = E & \dfrac{C a_0 - A0}{C} = a_0 & \dfrac{C0 - A0}{C} = 0 & 0 \\
s_1 & \dfrac{ED - C a_0}{E} = F & 0 & 0 & 0 \\
s^0 & \dfrac{F a_0 - E0}{F} = a_0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz estabelece que o número de pólos do sistemacom parte real positiva é igual ao número de trocas de sinal dos elementos da primeira coluna da tabela.

Exemplo 2.1 Considere a equação:

$$F(s) = (s-2)(s+1)(s-3) = s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0. \tag{2.51}$$

A equação acima possui um coeficiente negativo, o que significa que não satisfaz as condições necessárias para a estabilidade. Através da forma fatorada, sabemos que existem duas raízes no semi-plano direito: $s = 2$, $s = 3$.

Vamos examinar quais seriam os cálculos do método de Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{llll} s^3 & 1 & 1 & 1 \\ s^2 & -4 & 6 & 6 \\ s^1 & \frac{(-4)(1)-(6)(1)}{-4} = 2.5 & 0 & \\ s^0 & \frac{(2.5)(6)-(-4)(0)}{2.5} = 6 & 0 & \end{array}$$

Existem duas mudanças de sinal na coluna 1, indicando a presença de duas raízes no semi-plano direito.

Exemplo 2.2 Considere a equação:

$$F(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0. \quad (2.52)$$

Neste caso, as condições necessárias são satisfeitas, i.e., todos os termos estão presentes e de mesmo sinal.

A tabulação de Routh-Hurwitz é calculada como:

$$\begin{array}{llll} s^4 & 2 & 3 & 10 \\ s^3 & 1 & 5 & 0 \\ s^2 & \frac{(1)(3)-(2)(5)}{1} = -7 & 10 & 0 \\ s^1 & \frac{(-7)(5)-(1)(10)}{-7} = 6.43 & 0 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

Como existem duas mudanças de sinal na primeira coluna existem duas raízes no semi-plano direito. As quatro raízes do sistema são dadas por:

- $s = -1.0055 \pm j0.9311$,
- $s = 0.7555 \pm j1.4444$.

Caso Especial 1 Se o primeiro elemento de qualquer linha for zero e os outros forem diferentes de zero, os elementos da próxima linha serão todos infinitos. Para solucionar este problema, deve-se substituir o elemento nulo por um número positivo ϵ arbitrariamente pequeno.

Exemplo 2.3

$$F(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0 \qquad (2.53)$$

s^4	1	2	3
s^3	1	2	0
s^2	$\boxed{0 \to \epsilon}$	3	

Como a linha correspondente a s^2 possui o primeiro elemento nulo, devemos substituí-lo por ϵ.

s^4	1	2	3
s^3	1	2	0
s^2	ϵ	3	
s^1	$\frac{2\epsilon-3}{\epsilon} = \frac{-3}{\epsilon}$	0	
s^0	3	0	

Existem duas mudanças de sinal o que significa que existem duas raízes no semiplano direito. As raízes são:

- $s = -0.09057 \pm j0.902$,
- $s = 0.4057 \pm j1.2928$.

OBS: O método pode não funcionar se o sistema possui raízes imaginárias puras.

Caso Especial 2 Se todos os elementos de uma linha são zeros as seguintes condições podem existir:

- A equação possui pelo menos um par de raízes reais iguais mas de sinais opostos,
- A equação tem um ou mais pares de raízes imaginárias,
- A equação tem pares de raízes complexas conjugadas formando uma simetria em relação à origem. Ex: $s = -1 \pm j1$, $s = 1 \pm j1$.

Uma possível solução consiste em utilizar uma equação auxiliar $A(s) = 0$ que corresponde à linha anterior de zeros. A equação auxiliar sempre contêm apenas termos de ordem par. As raízes da equação auxiliar também satisfazem a equação original.

O método consiste nos seguintes passos:

- Escreva a Equação $A(s)$ utilizando os coeficientes da linha anterior a linha nula,
- Calcule a derivada da equação $A(s)$:

$$\frac{dA(s)}{ds} = 0, \qquad (2.54)$$

- Substitua a linha de zeros pelos coeficientes de $dA(s)/ds = 0$.

Exemplo 2.4 Vamos tentar determinar a estabilidade absoluta de um sistema que possua a seguinte equação característica:

$$F(s) = s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0. \tag{2.55}$$

A tabulação de Routh-Hurwitz é calculada como:

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 8 & 7 \\ s^4 & 4 & 8 & 4 \\ s^3 & 6 & 6 & 0 \\ s^2 & 4 & 4 & \\ s^1 & 0 & 0 & \end{array}$$

Como podemos observar a linha correspondente à linha s^1 é nula. Os polinômios $A(s)$ e $dA(s)/ds$ neste caso seriam dados por:

$$\begin{aligned} A(S) &= 4s^2 + 4 = 0 \\ \frac{dA(s)}{ds} &= 8s = 0. \end{aligned} \tag{2.56}$$

A tabulação de Routh-Hurwitz seria agora dada por:

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 8 & 7 \\ s^4 & 4 & 8 & 4 \\ s^3 & 6 & 6 & 0 \\ s^2 & 4 & 4 & \\ s^1 & 8 & 0 & \\ s^0 & 4 & & \end{array} \tag{2.57}$$

Como não há mudanças de sinal não há raízes no semi-plano direito. As raízes de $A(s)$ são $s = \pm j$ o que indica que o sistema é marginalmente estável.

2.11 Estabilidade Relativa

A verificação da estabilidade segundo o critério de Routh-Hurwitz fornece apenas uma informação parcial sobre a questão da estabilidade, ou seja, através deste critério é possível afirmar se o sistema é instável ou não. Entretanto, algumas vezes, sabendo que o sistema é estável, é desejável medir a estabilidade relativa do sistema.

A estabilidade relativa pode ser definida como uma propriedade que é medida pela parte real (que está diretamente relacionada ao tempo de acomodação) de cada raiz ou par de raízes. Dentro deste contexto, podemos dizer que a raiz r_2 na Figura 2.6 é relativamente mais estável que as raízes r_1,$\hat{r}_1$.

A estabilidade relativa, pode também ser definida em termos do coeficiente ζ de cada par de pólos complexos e portanto em termos do tempo de subida t_r e máximo sobresinal M_p.

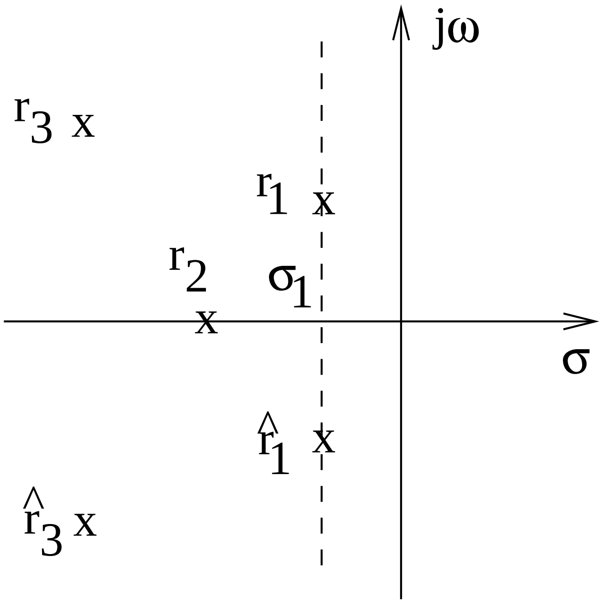


Figura 2.6. *Exemplo de raízes e sua estabilidade relativa.*

Uma possível técnica para medir a estabilidade relativa consiste em deslocar o eixo vertical $j\omega$ para a esquerda e aplicar o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz. Para tal, temos que definir um eixo vertical:

$$s_n = s + \sigma. \tag{2.58}$$

Na Figura 2.6 se definirmos $\sigma = \sigma_1$, as raízes r_1, $\hat{r}_1$ passam a pertencer ao eixo imaginário definindo assim um sistema marginalmente instável.

Exemplo 2.5 Seja a seguinte equação característica:

$$F(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4. \tag{2.59}$$

Definindo o novo eixo vertical como: $s_n = s + 2$ temos:

$$\begin{aligned} F(s_n) &= (s_n - 2)^3 + 4(s_n - 2)^2 + 6(s_n - 2) + 4, \\ &= s_n^3 - 2s_n^2 + 2s_n + 16. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Como os termos da equação característica não possuem o mesmo sinal, já podemos afirmar que o sistema é instável.
