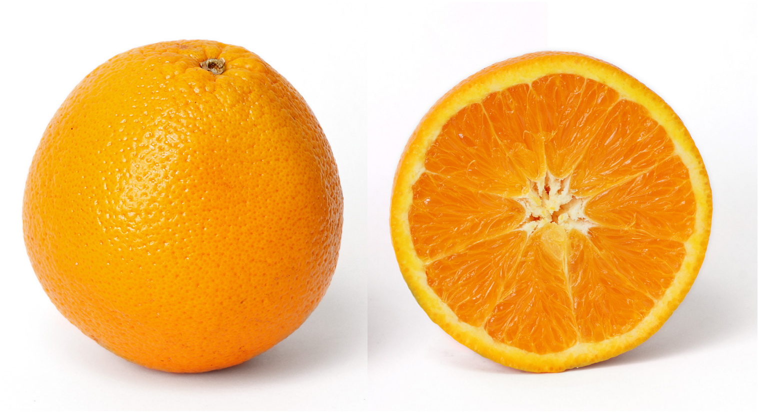
A Matemática da Tomografia Computadorizada

Elias S. Helou Neto

24 de outubro de 2019

Tomografia

Palavra “tomografia” formada por duas palavras gregas: “desenho de uma fatia”



Tomografia

Palavra “tomografia” formada por duas palavras gregas: “desenho de uma fatia”

Aplicações

- Medicina
- Ciências de materiais
- Biologia
- Astrofísica
- Geociências
- Oceanografia
- etc.

Modalidades Tomográficas

- Tomografia não difrativa (sinal é partícula – linha reta)
  - Por transmissão: raios-x, prótons, nêutrons, múon, neutrino, elétrons
  - Por emissão: pósitron e raios gama
  - Tomografia por fluorescência (transmissão e emissão)
- Tomografia difrativa (sinal é onda – curvas)
  - $\{$Impedância, resistividade, capacitância$\}$ elétrica
  - Ultrassonografia
  - Tomografia termo-acústica

Existem outras modalidades, e.g., ressonância magnética.

Transmissão de Raios-X

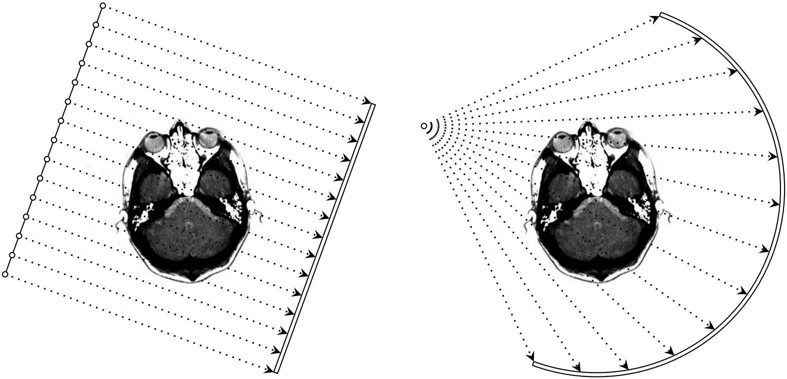
Atenuação de Raios-X

$$\frac{I_e}{I_d} = e^{\int_L f(x)\mathrm{d}s}$$

- I_e: Intensidade emitida
- I_d: Intensidade detectada
- L: Segmento de reta ligando detector a emissor
- f: Taxa de atenuação linear: valores desconhecidos

Conhecemos $\int_L f(x)\mathrm{d}x$ para diversos segmentos L.
Mas desejamos obter f.

Tomografia por Transmissão

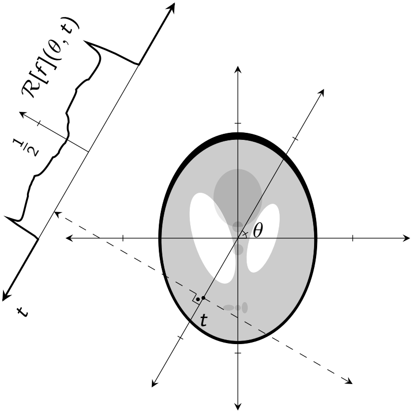


Tomografia por Transmissão: à esquerda exemplo de leitura por feixes paralelos; à direita, feixes divergentes.

Tomografia por Transmissão

Reconstrução de Imagens Através de Projeções

Transformada de Radon



$$\mathcal{R}[f](\theta, t) := \int_{\mathbb{R}} f\left(t\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\right) \mathrm{d}s$$

A Transformada de Fourier

Definição e Inversa

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definimos

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\omega}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

cuja inversa é dada por:

$$\mathcal{F}^{-1}[g](\boldsymbol{x}) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}.$$

O Teorema da Fatia de Fourier

Seja $p_\theta(t) := \mathcal{R}[f](\theta, t)$. Então:

$$\mathcal{F}[p_\theta](\omega) = \mathcal{F}[f]\left(\omega \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right)\right).$$

Ou seja, é possível obter a imagem no espaço de Fourier através de dados de Radon.

Retroprojeção Filtrada

A fórmula de inversão de Fourier

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](\boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$$

em duas dimensões pode ser reescrita como:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,\pi]} \int_{\mathbb{R}} |\omega| \mathcal{F}[f] \left(\omega \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right)\right) e^{i\omega(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\theta.$$

Retroprojeção Filtrada

A fórmula de inversão de Fourier

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](\boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$$

em duas dimensões pode ser reescrita como:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,\pi]} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\omega| \mathcal{F}[p_\theta](\omega) e^{i\omega(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\theta.$$

Retroprojeção Filtrada

A fórmula de inversão de Fourier

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](\boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$$

em duas dimensões pode ser reescrita como:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,\pi]} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\omega| \mathcal{F}[p_\theta](\omega) e^{i\omega(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\theta.$$

Filtragem

Retroprojeção Filtrada

A fórmula de inversão de Fourier

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](\boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$$

em duas dimensões pode ser reescrita como:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,\pi]} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\omega| \mathcal{F}[p_\theta](\omega) e^{i\omega(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\theta.$$

Retroprojeção

Por que Iterar?

- Modelo físico mais preciso
  - Policromaticidade
  - "Beam hardening"
  - Espalhamento
  - Modelagem do detector
  - Modelagem da emissão radiativa
  - etc.
- Geometrias não padrão
  - Ângulo limitado
  - Amostragem angular esparsa
  - Amostragem angular irregular
  - Dados faltantes (pixeis queimados)
  - Tomografia interior
  - etc.

Mais: não-negatividade, esparsidade (em alguma base), suavidade por partes, etc.

Por que Não Iterar?

- Tempo de computação elevado
- É preciso reconstruir todo o objeto
- Algoritmos não-lineares (difícil analisar/prever o desempenho)
- Ajuste de parâmetros algorítmicos

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\
\text{s. a:} \quad & g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, r\}.
\end{aligned}
$$

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — Função objetivo
- $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$, com $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — Restrições

Solução Global

Definição

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. a:} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}. \end{aligned}$$

Dizemos que $\boldsymbol{x}^*$ é minimizador global se $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ temos $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*)$.

Solução Local

Definição

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. a:} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}. \end{aligned}$$

Dizemos que $\boldsymbol{x}^*$ é minimizador local se $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{X} \cap \{\boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \epsilon\}$ temos $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*)$.

Transformada de Radon

Linearidade

$$\mathcal{R}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{R}[f] + \beta \mathcal{R}[g]$$

Assumindo $f = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j$, então o problema torna-se:

$$R\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{b},$$

onde $r_{ij} = \mathcal{R}[f_j](\theta_i, t_i)$ e $b_i = \mathcal{R}[f](\theta_i, t_i)$.

$$
\begin{array}{ll}
\min & \|R\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 \\
\text{s. a:} & x_j \geq 0 \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\min & TV(\boldsymbol{x}) \\
\text{s. a:} & \boldsymbol{x} \in \min\limits_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+} \|R\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\|^2
\end{array}
$$

onde

$$
TV(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} \sqrt{(x_{i,j} - x_{i,j-1})^2 + (x_{i,j} - x_{i-1,j})^2}.
$$

Laboratório Nacional de Luz Síncrotron – LNLS

Anel

Imagem: http://exame.abril.com.br/revista-exame/edicoes/104402/noticias/o-brasil-que-inova

Laboratório Nacional de Luz Síncrotron – LNLS

Anel

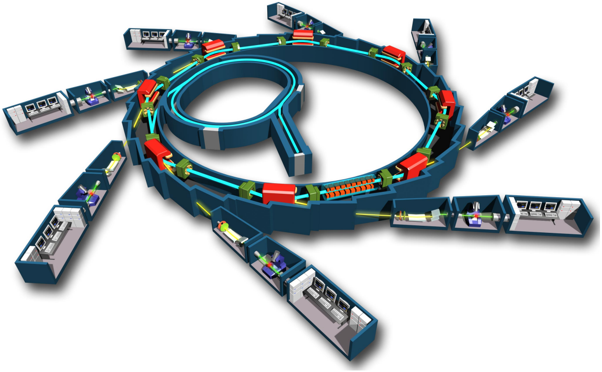
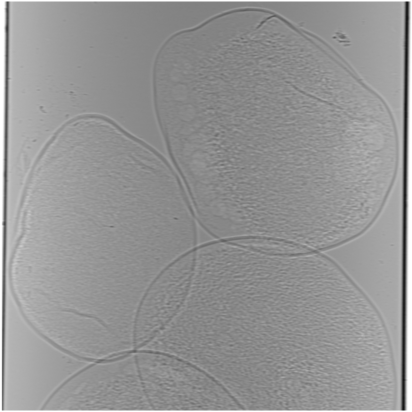


Imagem: https://luizmullerpt.wordpress.com/2014/09/14/

Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

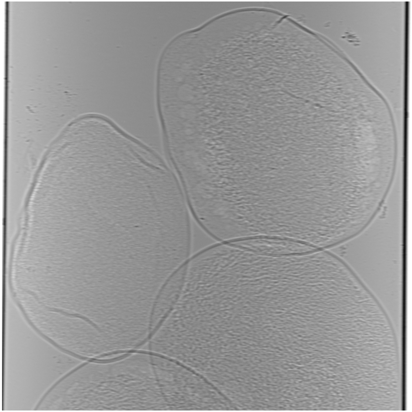
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76 \text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

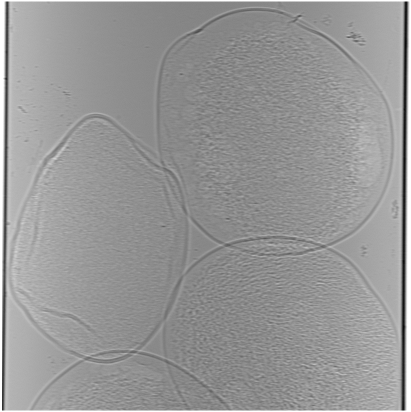
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76\text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76 \mathrm{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

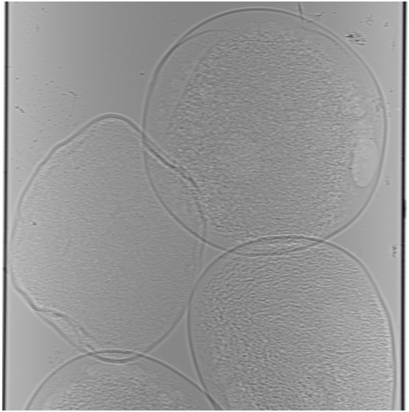
Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76\text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis

Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76 \mathrm{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

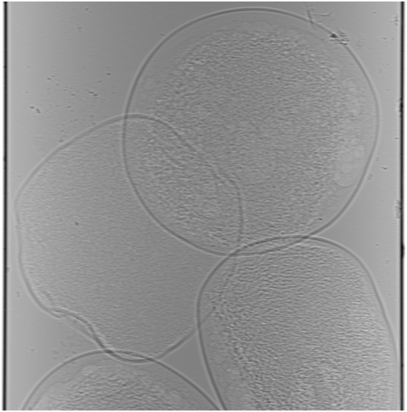
Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76\text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis

Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

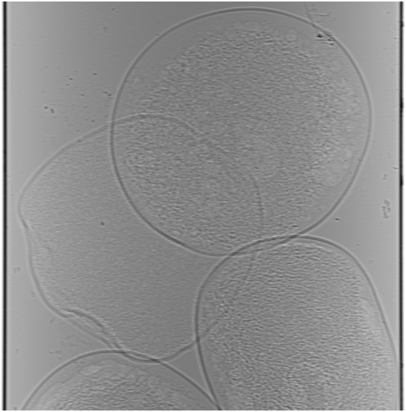
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76 \text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

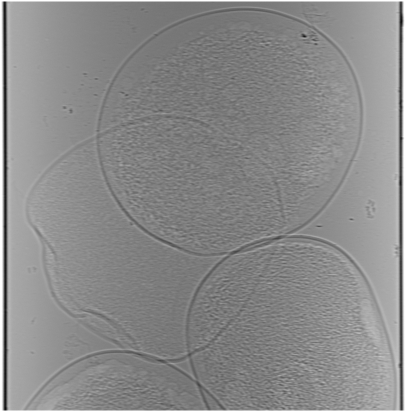
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76 mm^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

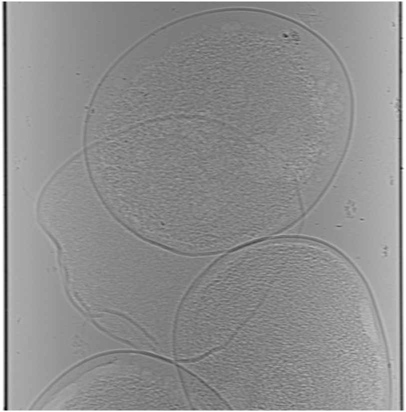
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76\text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

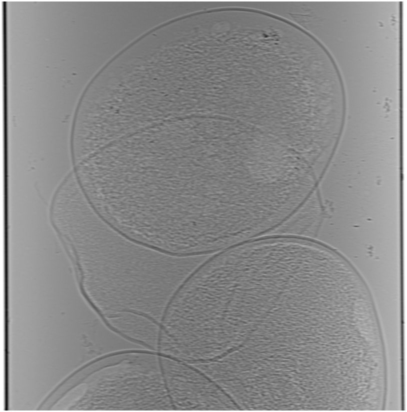
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76 \text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

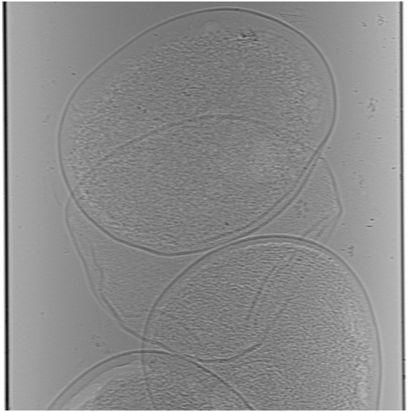
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76\text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

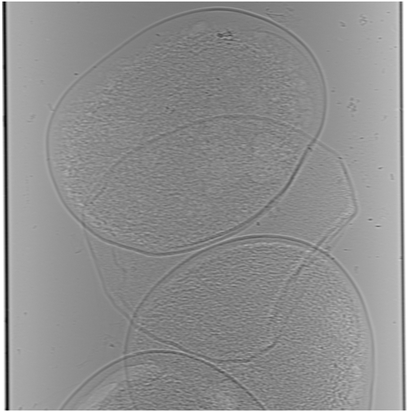
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76 mm^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

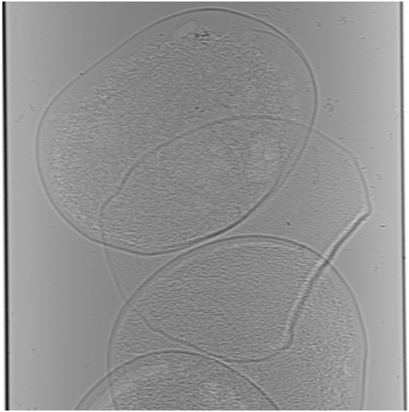
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76 \text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

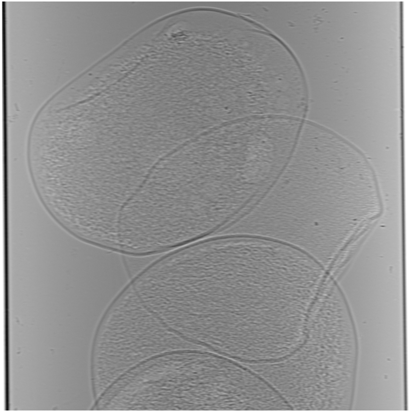
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76\text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

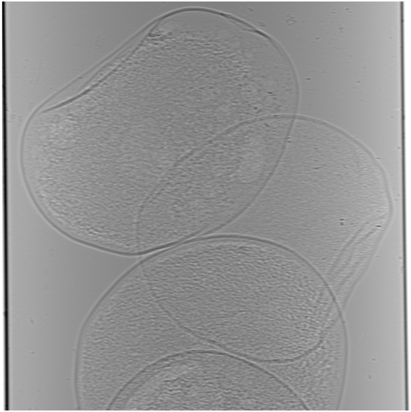
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76\text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

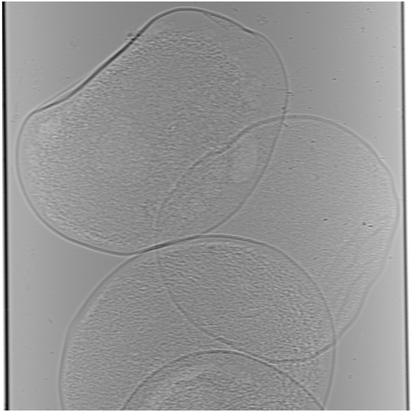
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76mm^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

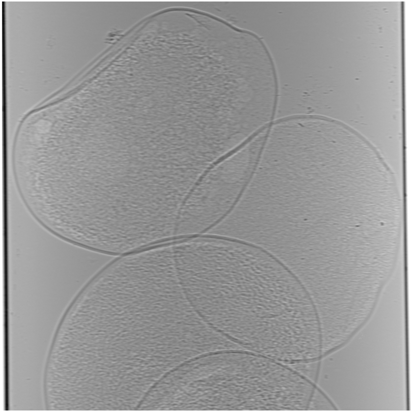
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76\text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

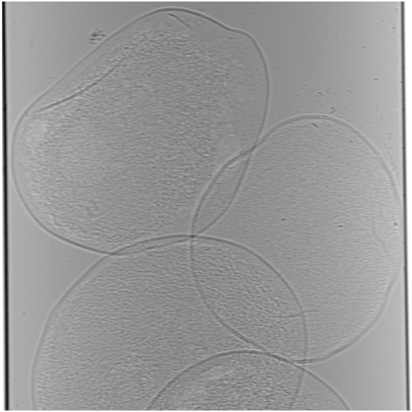
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76\text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

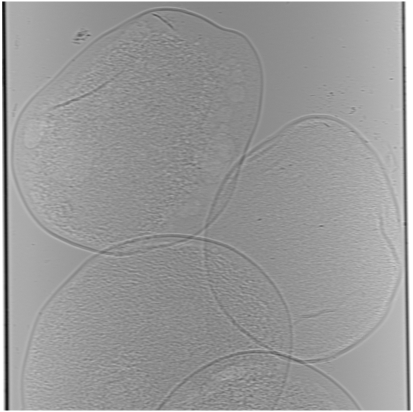
- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76 mm^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



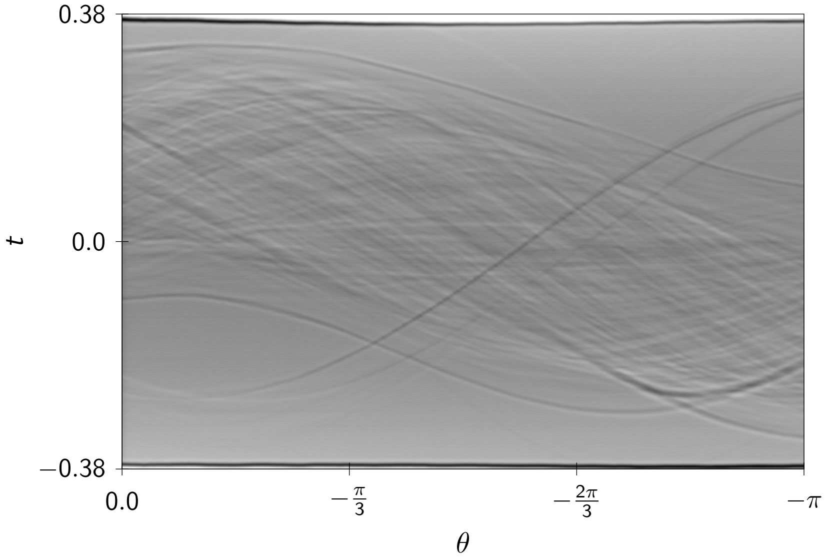
Exemplo

Ovos de peixe em água, tubo capilar de borossilicato

- Tempo de exposição por radiografia: 20 segundos
- Número de radiografias: 200
- Tamanho do campo de visão: $0.76 \times 0.76\text{mm}^2$
- Resolução: 2048×2048 pixeis



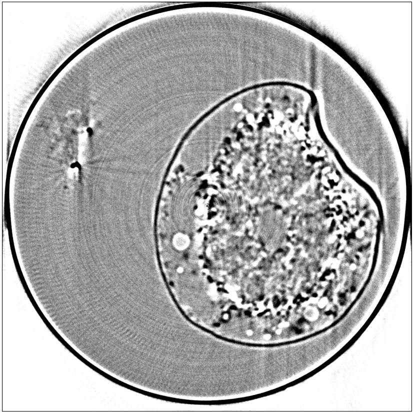
Dados Tomográficos



Reconstruções

Modelo de Quadrados Mínimos

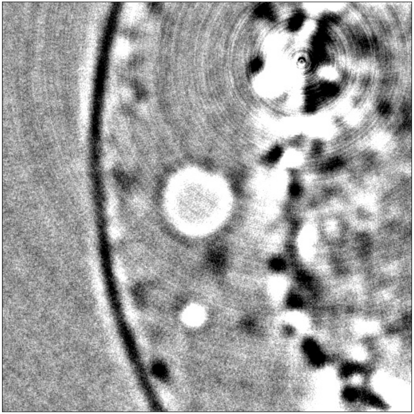
$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+} \|R\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$$



Reconstruções

Modelo de Quadrados Mínimos

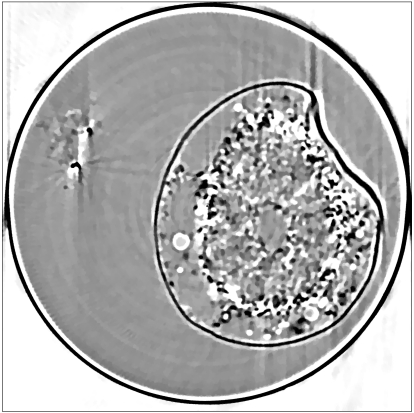
$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+} \|R\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$$



Reconstruções

Modelo de Quadrados Mínimos em dois níveis

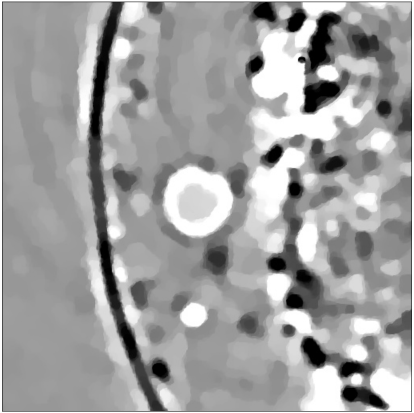
$$\begin{array}{ll} \min & TV(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. a:} & \boldsymbol{x} \in \displaystyle\min_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+} \|R\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\|^2 \end{array}$$



Reconstruções

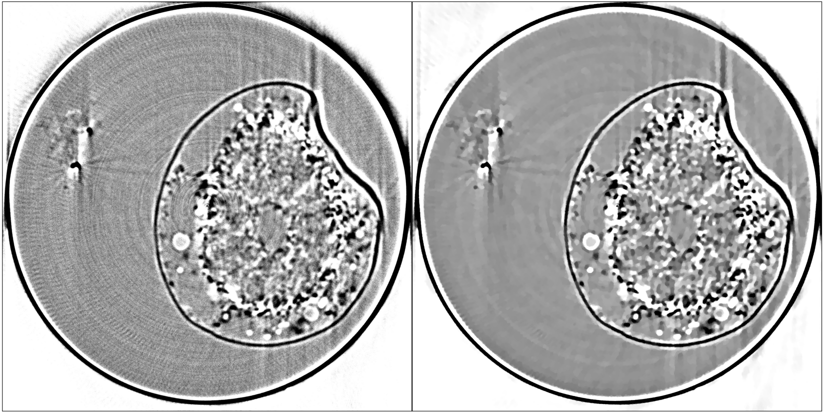
Modelo de Quadrados Mínimos em dois níveis

$$\begin{array}{ll} \min & TV(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. a:} & \boldsymbol{x} \in \min_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+} \|R\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\|^2 \end{array}$$



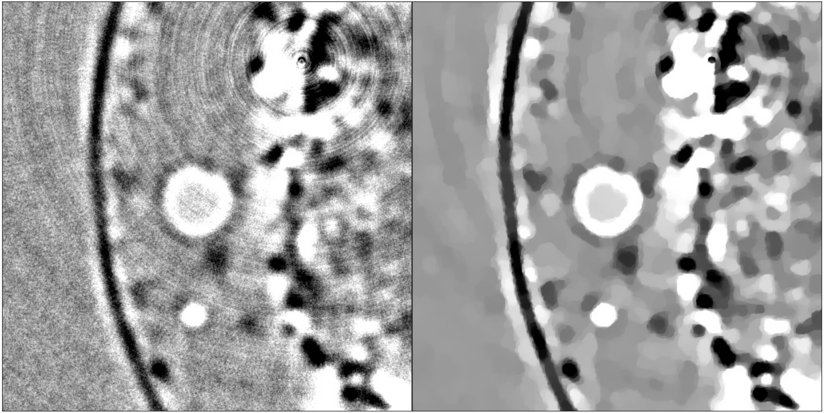
Reconstruções

Não-regularizado × Regularizado



Reconstruções

Não-regularizado $\times$ Regularizado



Conclusões

- A tomografia permite ver dentro de coisas legais
- Dentro da tomografia tem coisas legais pra serem vistas

Obrigado!