CONTINUAÇÃO: Aplicação de Diagonalização de Operadores 25/11/2020

Slide 10

TEORIA

Equação de Recorrência (ou de Diferença) de Ordem n

O próximo termo da sequência depende de uma ou mais gerações anteriores

Número de gerações anteriores das quais a sequência depende

Forma Geral: $y(t) = f\big(y(t-1), y(t-2), \ldots, y(t-n)\big)$

O próximo termo depende de $\underline{\underline{n}}$ gerações anteriores.

** Eq. Recorrência de 2ª Ordem: o próximo termo da sequência depende das $\underline{\underline{2}}$ gerações anteriores

$$\underbrace{y(t)}_{\text{próximo termo}} + \underbrace{b\, y(t-1) + c\, y(t-2)}_{\underline{\underline{2}}\text{ gerações anteriores}} = 0 \qquad (1)$$

E a solução buscada deve ser a mais simples, de forma a garantir a correlação com os termos anteriores (a recorrência).

Portanto, a solução suposta é $y(t) = K\lambda^t$. Substituindo essa solução em (1), tem-se:

$$\cancel{K}\lambda^t + b(\cancel{K}\lambda^{t-1}) + c(\cancel{K}\lambda^{t-2}) = 0$$

$$\cancel{\lambda^t} + b\frac{\cancel{\lambda^t}}{\lambda} + c\frac{\cancel{\lambda^t}}{\lambda^2} = 0 \longrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Possíveis soluções
$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2: & y(t) = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda: & y(t) = c_1\lambda^t + c_2 t\lambda^t \end{cases}$$

A solução geral é CL das soluções independentes.

3) Sequência de Fibonacci - Eq. Recorrência de 2ª Ordem : $a(t) = ?$

Sabe-se que : $a(0) = 1$

$a(1) = 1$

$a(2) = 2$

$a(3) = 3$

$a(4) = 5$

$\vdots$

Logo :

$$a(t) = a(t-1) + a(t-2)$$

Eq. Recorrência 2ª Ordem

$$a(t) - a(t-1) - a(t-2) = 0 \qquad (1)$$

Como a solução geral para (1) é $a(t) = K\lambda^t$, tem-se :

$$\cancel{K}\lambda^t - \cancel{K}\lambda^{t-1} - \cancel{K}\lambda^{t-2} = 0$$

$$\cancel{\lambda^t} - \frac{\cancel{\lambda^t}}{\lambda} - \frac{\cancel{\lambda^t}}{\lambda^2} = 0$$

$$\longrightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \xrightarrow{\text{autovalores}} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; ; \; \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, portanto, a solução geral para $a(t)$ é da forma:

$$a(t) = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t$$

$$a(t) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t \quad , \; c_1, c_2 \ldots \text{ constantes}$$

No entanto, a seq. Fibonacci representa uma solução particular de $a(t)$, e não a solução geral. Desta forma, as constantes c_1 e c_2 devem ser determinadas. São conhecidos os termos iniciais da sequência, que aqui figuram como as condições iniciais. Tem-se, portanto, um Problema de Valor Inicial (PVI):

$$a(0) = 1 \longrightarrow a(0) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$$

$$a(1) = 1 \longrightarrow a(1) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

t

De onde se estabelece o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

, cuja solução é:

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \; ; \; c_2 = -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)$$

Substituindo c_1 e c_2 em $a(t)$, tem-se a solução da seq. Fibonacci:

$$a(t) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1}\right]$$

VERIFICANDO A SOLUÇÃO:

$a(0) = 1 \;\therefore\; t = 0$

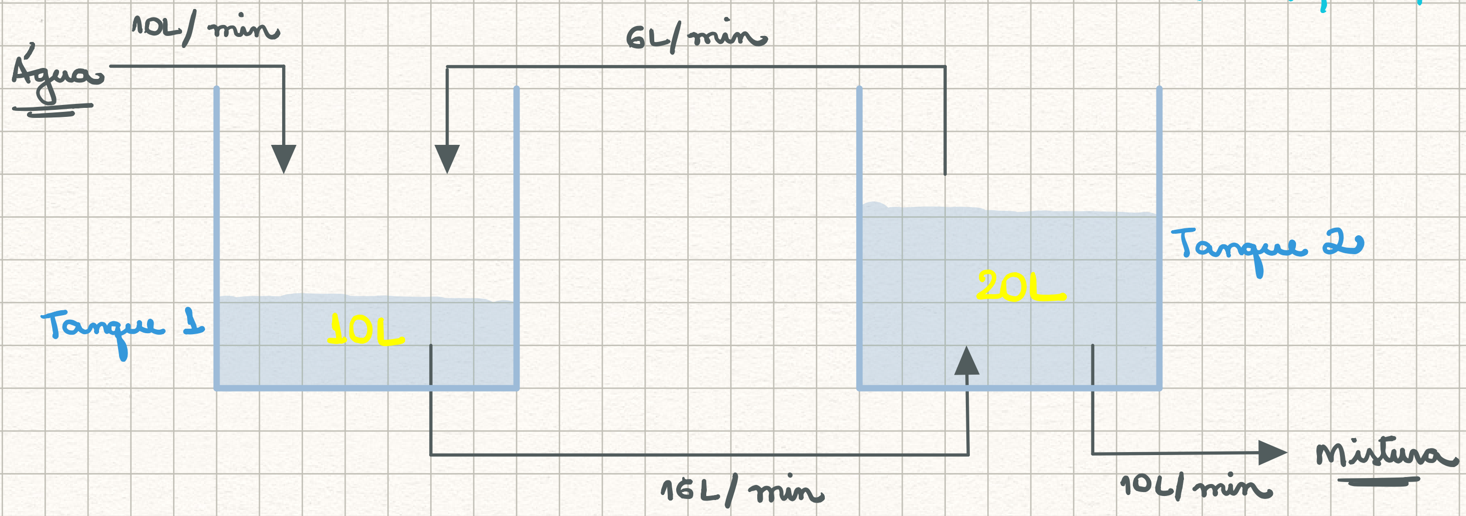
$t = 0 \longrightarrow a(t)$:

$$a(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{5}-\cancel{1}+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) \longrightarrow a(0) = 1$$

4) Modelagem Matemática

$x_i(t) = ?\,,\ i = 1, 2$



$t = 0$:

Tanque 1 ... 10L água pura

Tanque 2 ... 20L de água com 12 kg de sal

Quantidade líquido entra (cada Tanque) = Quantidade líquido sai (cada Tanque)

$\downarrow$

Volume mistura (cada Tanque) = constante

Logo $\begin{cases} \text{Tanque 1: contém sempre 10L mistura} \\ \text{Tanque 2: contém sempre 20L mistura} \end{cases}$

$x_1(t)$ ... quantidade de sal no Tanque 1 no instante t

$x_2(t)$ ... quantidade de sal no Tanque 2 no instante t

Taxas de variação instantânea de sal (cada Tanque) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{dx_2}{dt} \end{cases}$

taxa de sal entrando no Tanque

Em cada Tanque: $\dot{x}_i(t) = T_e - T_s$

taxa de sal saindo do Tanque

taxa de sal = $\left(\begin{matrix} \text{tx entrada ou saída} \\ \text{(mistura)} \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} \text{concentração de sal} \\ \text{(fluxo de entrada)} \end{matrix} \right)$

$$\frac{\text{quantidade de sal}}{\text{Volume da mistura}}$$ no tanque de onde está saindo

Assim:

$$\dot{x}_1(t) = \left(6 \frac{L}{min}\right) \cdot \left(\frac{x_2}{20} \frac{Kg}{L}\right) - \left(16 \frac{L}{min}\right) \cdot \left(\frac{x_1}{10} \frac{Kg}{L}\right)$$

$$\dot{x}_2(t) = \left(16 \frac{L}{min}\right) \cdot \left(\frac{x_1}{10} \frac{Kg}{L}\right) - \left((10+6) \frac{L}{min}\right) \cdot \left(\frac{x_2}{20} \frac{Kg}{L}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{3}{10} x_2 - \frac{8}{5} x_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{8}{5} x_1 - \frac{4}{5} x_2 \end{cases}, \text{ com } \begin{cases} x_1(0) = 0 \text{ Kg} \\ x_2(0) = 12 \text{ Kg} \end{cases} \quad \text{(PVI)}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/5 & 3/10 \\ 8/5 & -4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \dot{F} = AF \quad F = F(t)$$

O sistema de EDOs é da forma $\dot{F} = AF$, portanto, se a matriz A for diagonalizável, as soluções independentes serão do tipo:

$$F_i(t) = \vec{v}_i \, e^{\lambda_i t} \quad \begin{cases} \lambda_i \ldots \text{ autovalor de A} \\ \vec{v}_i \ldots \text{ autovetor associado a } \lambda_i \end{cases}$$

A matriz A é diagonalizável?

Autovalores: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda + 2/5)(\lambda + 2)$

EC: $p(\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -\frac{2}{5}$; $\lambda_2 = -2$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\exists$ $\underline{\underline{2}}$ autovetores LI ; $A_{2\times 2}$, então $\dim(V) = 2$.

Portanto, $\exists$ uma base de autovetores e A é diagonalizável.

Assim, a solução geral é CL de F_1 e de F_2:

$$F(t) = c_1 F_1 + c_2 F_2 \quad , c_1, c_2 \ldots \text{ constantes}$$

Autovetores : SLH : $(A - \lambda_i I)\vec{v_i} = \vec{0}$, $\vec{v_i} = (x, y)$

$$\lambda_1 = -\frac{2}{5} \longrightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow F_1 = \vec{v_1} e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-\frac{2t}{5}} \text{ é uma solução}$$

$$\lambda_2 = -2 \longrightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow F_2 = \vec{v_2} e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-2t} \text{ é a outra solução}$$

Escrevendo $F = F(t)$ como CL das soluções independentes F_1 e F_2:

$$F(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-\frac{2t}{5}} - 3c_2 e^{-2t} \\ 4c_1 e^{-\frac{2t}{5}} + 4c_2 e^{-2t} \end{bmatrix}$$

E a quantidade de sal em cada Tanque é assim definida:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-\frac{2t}{5}} - 3c_2 e^{-2t} \\ x_2(t) = 4c_1 e^{-\frac{2t}{5}} + 4c_2 e^{-2t} \end{cases} , \quad c_1, c_2 \ldots \text{ constantes}$$

Para encontrar c_1 e c_2, será necessário utilizar as condições iniciais do PVI: $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 12$. Ao aplicá-las, o sistema anterior pode ser assim reescrito:

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 = 0 \\ 4c_1 + 4c_2 = 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{SOLUÇÃO}} \begin{array}{l} c_1 = 9/4 \\ c_2 = 3/4 \end{array}$$

Assim, a solução do PVI acima modelado é:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{9}{4} e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{9}{4} e^{-2t} \\ x_2(t) = 9 e^{-\frac{2}{5}t} + 3 e^{-2t} \end{cases} \quad (\text{Kg})$$

CURIOSIDADE - Análise

O que acontece com a quantidade de sal à medida que o tempo passa?

$$\text{Se } t \to \infty \begin{cases} \lim_{t \to \infty} x_1(t) = 0 \\ \lim_{t \to \infty} x_2(t) = 0 \end{cases}$$

O resultado é coerente?

Sim, pois entra água pura no Tanque 1 e sai mistura do Tanque 2; então, ao longo do tempo, todo o sal irá embora dos Tanques.