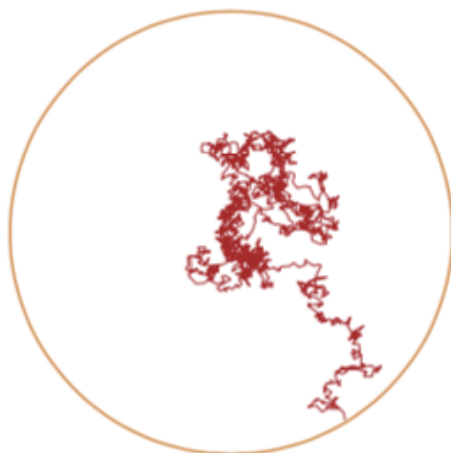


O MOVIMENTO BROWNIANO

Em 1827, o botânico inglês Robert Brown investigou, através de um microscópio, o movimento de partículas de pólen em suspensão na água, que se agitavam de forma bastante peculiar, em um rápido *zig-zag*.



A princípio ele imaginou tratar-se de seres vivos, mas partículas minúsculas de material inorgânico apresentavam o mesmo tipo de comportamento.

Apenas 50 anos depois é que foi sugerida uma explicação qualitativa do fenômeno, pelo jesuíta belga *Joseph Delsaux*, baseada em colisões provocadas pelas moléculas do líquido.

Finalmente, em 1905, uma descrição quantitativa do fenômeno foi feita por Einstein (em um artigo publicado no mesmo volume do *Annalen der Physik* em que publicou a sua *Teoria da Relatividade Especial*).

As partículas microscópicas do pólen (na faixa de 0,1 a 1 μm , aproximadamente), sendo muito maiores que as moléculas do líquido, seria continuamente bombardeadas por estas.

Como resultado, tem-se o movimento irregular característico em *zig-zag* que foi denominado “**movimento browniano**”.

Este mesmo fenômeno serviu de base para se explicar como ocorre a **difusão** das moléculas em fluidos (líquidos ou gasosos).

Einstein propõe que a função de distribuição de probabilidade $P(x, t)$ de encontrar uma partícula na posição x no tempo t satisfaz a equação diferencial de difusão:

$$D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = 0$$

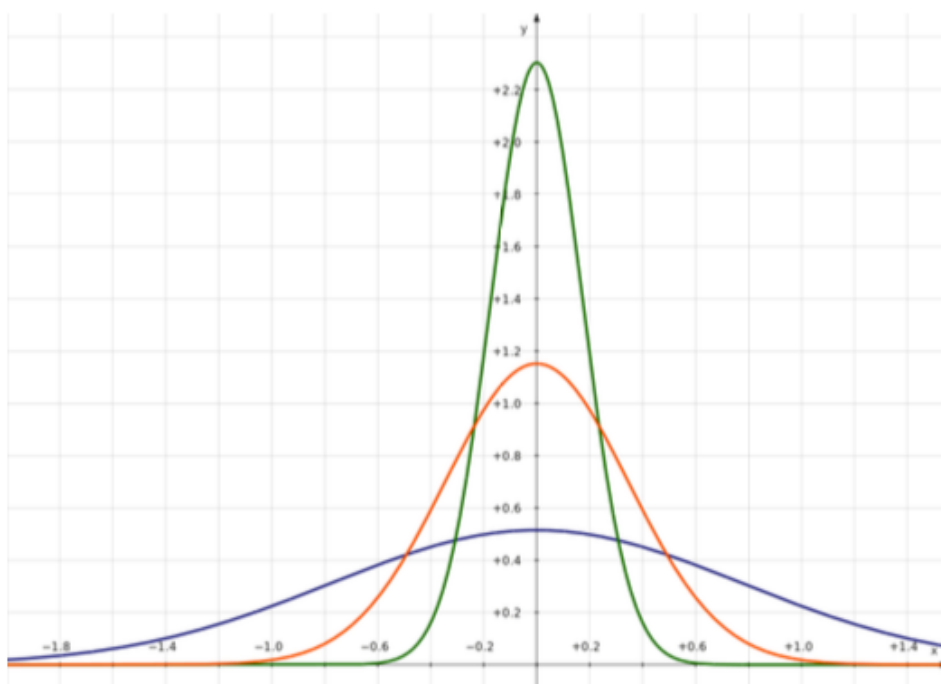
onde uma solução para esta equação é uma distribuição gaussiana onde D é o coeficiente de difusão.

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Einstein mostrou que o coeficiente de difusão pode ser obtido utilizando o raio a da partícula, o coeficiente de viscosidade do meio η e a temperatura do sistema, através da expressão:

$$D = \frac{kT}{6\pi a\eta}$$

Exemplo de $P(x, t)$ com diferentes tempos. A distribuição com o tempo menor apresenta a menor largura e a com tempo maior a maior largura.



DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

A distribuição binomial é descreve ao sistema que só tem duas respostas: sim/não; direita/esquerda; ligado/desligado; certo/errado; bom/ruim; etc.

Seja p a probabilidade de uma resposta e q a probabilidade da outra resposta. Isso implica que $p + q = 1$. Se aplicarmos o teorema da equiprobabilidade temos que $p = q = 1/2$, devemos ressaltar que existem situações onde $p \neq q$.

Se N é o número total de eventos e n o número de respostas para p , então o número de respostas para q será $N - n$.

A probabilidade de ter n respostas p em N tentativas é $P(n)$ dada por:

$$P(n) = P_N^{n, N-n} p^n q^{N-n} = \frac{N!}{n! (N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Esta distribuição binomial tem as seguintes propriedades:

(a) média

$$\langle n \rangle = \sum_{i=1}^N n P(n) = Np$$

(b) média quadrática e variância

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{i=1}^N n^2 P(n) = Np(q + Np)$$

$$\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = Npq$$

(b) no limite de $N \rightarrow \infty$, a distribuição binomial tende a distribuição Gaussiana

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma_n^2}}$$

onde $n_0 = \langle n \rangle$ e $\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$.

No movimento Browniano a distância total percorrida é $x = [n - (N - n)]l = (2n - N)l = ml$, onde l é o tamanho do passo e $dx = 2ldn$. Então fazendo a mudança de variável de n para x temos que $P(x)$ também é uma distribuição gaussiana

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}}$$

onde $x_0 = \langle x \rangle$ e $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$.

Vamos considerar que τ é o tempo de cada passo, então o tempo total será $t = N\tau$.

Se $p = q = 1/2$, temos que $\langle n \rangle = N/2$ e $\langle n^2 \rangle = (N + N^2)/4$, levando estes resultados para o cálculo da posição média, ficamos com

$$\langle x \rangle = (2\langle n \rangle - N)l = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle = \langle [(2n - N)l]^2 \rangle = \langle 4n^2 l^2 - 4nNl^2 + N^2 l^2 \rangle \\ &= 4l^2 \langle n^2 \rangle - 4Nl^2 \langle n \rangle + N^2 l^2 = Nl^2 = \frac{tl^2}{\tau}\end{aligned}$$

Substituindo estes valores de $\langle x \rangle = 0$ e $\sigma_x^2 = Nl^2$ na distribuição gaussiana temos:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi tl^2/\tau}} e^{-\frac{x^2}{2tl^2/\tau}} = P(x, t)$$

para esta equação ficar igual a solução da equação de difusão, temos que $4Dt = 2tl^2/\tau$. Então, o coeficiente de difusão é $D = l^2/2\tau$. Isto significa que o coeficiente de difusão é uma característica do sistema que pode ser identificado através de uma caminhada aleatória onde cada passo tem um tamanho de l e ocorre num tempo τ .