

Lista VI

- (1) (a) O tempo total do raio de luz que vai até C na horizontal e depois para o observador

$$T^{(1)} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - u^2/c^2}. \quad (1)$$

O tempo total do raio de luz que vai até C na vertical e depois para o observador

$$T^{(2)} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

- (b) Para cada uma das velocidades no enunciado, obtemos

$$\phi(460 \text{ m/s}) \simeq 4,7 \times 10^{-5}, \quad (3)$$

$$\phi(3 \times 10^4 \text{ m/s}) \simeq 0,2. \quad (4)$$

(2)

$$T' = \gamma(v)T. \quad (5)$$

(3) (a)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} \right), \quad (6)$$

$$= \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}. \quad (7)$$

(b)

$$-ds^2 = \begin{pmatrix} d\eta & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\eta \\ dx \end{pmatrix} = d\vec{x}^T d\vec{x}, \quad (8)$$

Como qualquer rotação não modifica o último, o elemento ds^2 é invariante sobre a transformação

$$d\vec{x} \rightarrow d\vec{x}' = R(\theta)d\vec{x}, \quad (9)$$

onde

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (10)$$

é a nossa matriz de rotação.

$$\begin{pmatrix} dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \frac{v}{c} \sin \theta \\ v \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix}, \quad (11)$$

chamaremos essa matriz de $M(\theta)$.

Ou seja, a transformação em questão é

$$t \rightarrow t' = \cos \theta t + \frac{v}{c} \sin \theta x, \quad (12)$$

$$x \rightarrow x' = v \sin \theta t + \cos \theta x. \quad (13)$$

A partir de (12) e (13), obtemos

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \cos \theta, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{v}{c} \sin \theta, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = v \sin \theta, \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = \cos \theta. \quad (14)$$

Agora, podemos utilizar (14) para obter como as derivadas devem se transformar.

Começando com $\partial/\partial t$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial t'} + v \sin \theta \frac{\partial}{\partial x'}. \quad (15)$$

Analogamente para $\partial/\partial x'$,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{v}{c} \sin \theta \frac{\partial}{\partial t'} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial x'}, \quad (16)$$

onde utilizamos (13) e as derivadas em (14).

(c)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - c^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2\imath c \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{\sin^2 \theta}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2\frac{\imath}{c} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}. \quad (18)$$

Utilizando (18) e (17)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}.$$

Concluimos que o operador é invariante sobre a transformação descrita em (12) e (13).

(d) No limite não relativístico a transformação que obtivemos deve coincidir com a transformação de Galileu. Isto é, devemos ter

$$\cos \theta \simeq 1,$$

ou seja, θ é um ângulo pequeno, consequentemente também temos

$$\theta \simeq \sin \theta = \frac{\imath v}{c} \rightarrow \theta = \frac{\imath v}{c}.$$

Utilizando as identidades

$$\cosh(x) = \cos(\imath x),$$

$$\sinh(x) = -\imath \sin(\imath x),$$

a matriz $M(\theta)$ pode ser escrita como

$$M(\theta) = M(v/c) = \begin{pmatrix} \cosh(v/c) & -\frac{1}{c} \sinh(v/c) \\ -c \sinh(v/c) & \cosh(v/c) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

(4)

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow S' : \\
x' &= \gamma(v_1)(x - v_1 t), \\
t' &= \gamma(v_1)(t - v_1 x/c^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S' &\rightarrow S'' : \\
x'' &= \gamma(v_2)(x' - v_2 t'), \\
t'' &= \gamma(v_2)(t' - v_2 x'/c^2),
\end{aligned}$$

$$\rightarrow x'' = \gamma(v_1)\gamma(v_2)(1 + v_1 v_2/c^2) \left\{ x - \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2} t \right\}. \quad (20)$$

Note que

$$\gamma(v_1)\gamma(v_2) = (1 + v_1 v_2/c^2)^{-1} \gamma\left(\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}\right), \quad (21)$$

Então,

$$x'' = \gamma\left(\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}\right) \left\{ x - \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2} t \right\}, \quad (22)$$

Analogamente para t''

$$t'' = \gamma\left(\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}\right) \left\{ t - \frac{1}{c^2} \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2} x \right\}. \quad (23)$$

(5)

$$v = \tan \beta, \quad (24)$$

onde v é a velocidade do referencial S' com relação a S .

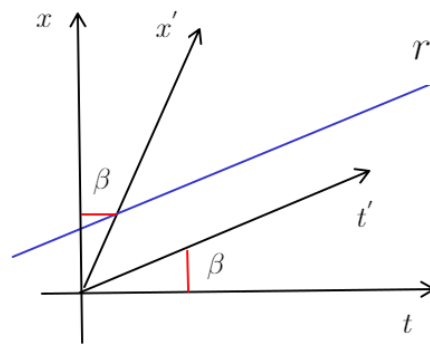


Figura 1: Diagrama espaço-tempo.