4300259 – Termo-estatística
Provinha 3 (Pi3) 26/10/2020
Período DIURNO

Observação: Todos os itens da provinha devem apresentar solução. Os que apresentarem apenas as respostas NÃO serão corrigidos.

DURAÇÃO: 10:30h as 13:30h

1) Um gás ideal com N moléculas idênticas e independentes está confinado em um recipiente com dois lados de comprimento *L* e altura de comprimento desprezível. Assim, as moléculas só apresentam movimento translacional nas direções *x* e *y*, e movimento rotacional em torno do eixo z, ou seja, no plano xy. A energia cinética de cada molécula é descrita por $E_i = (1/2)\, m\, (v_x^2 + v_y^2) + (1/2)\, I\, w^2$, onde *m* é a massa, *I* é o momento de inércia, v_x e v_y são as componentes da velocidade linear que variam de -∞ a +∞ e *w* é a componente *z* da velocidade angular que também varia de -∞ a +∞; e as componentes *x* e *y* da posição variam de 0 a *L*. Este sistema tem uma distribuição de probabilidades escrita por $dp(v,w) = f(v)dv\, f(w)dw$. Determine:

(a) (0,5) as duas funções de densidade de probabilidade $f(v)$ e $f(w)$, apresente de forma qualitativa os dois gráficos destas funções e compare o $f(v)dv$ com a distribuição de velocidades de Maxwell do gás ideal num recipiente 3D e discuta as semelhanças e diferenças;

(b) (0,5) os valores médios, $\langle v \rangle$ e $\langle w \rangle$, e os valores quadrático médios (rapidez), v_{qm} e w_{qm}; e

(c) (0,5) a função de partição por molécula, z, e de todo o sistema *Z*, em função de β.

Sabendo que várias propriedades podem ser obtidas através da função de partição: a energia total média $\langle E \rangle = -\partial\, (lnZ)/\partial\beta$, a energia livre de Helmholtz $F = -(1/\beta)\, lnZ$, a pressão $P = -(\partial F/\partial A)_{T,N}$ onde *A* é a área do recipiente, etc. Determine:

(d) (0,5) a energia total média $\langle E \rangle$; Compare com a energia esperada pelo Teorema de Equipartição de Energia e justifica as semelhanças e diferenças;

(e) (0,5) a expressão para pressão *P*; Compare com a equação de estado do gás ideal num recipiente 3D: *PV = NkT* e discuta as semelhanças e diferenças.

Formulário:

$$G_n = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx \implies G_{2i} = \frac{1\cdot 3\cdots(2i-1)}{2^{i+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2i+1}}} \quad \text{e} \quad G_{2i+1} = \frac{i!}{2\alpha^{i+1}}; \qquad P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}};$$

$$\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2; \qquad x_{qm} = \sqrt{\langle x^2\rangle}; \qquad dxdydz = 4\pi r^2 dr; \qquad dxdy = 2\pi r dr;$$

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}; \qquad \beta = (1/kT); \qquad dp(\Gamma) = (1/Z)e^{-\beta E}\, d\Gamma; \qquad Z = z^N;$$

$$z = \int \ldots \int e^{-\beta E_i}\, d\Gamma_i; \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}(lnZ); \quad F = -\left(\frac{1}{\beta}\right) lnZ; \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}; \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}.$$