

Gabarito - Lista III

① Considerando uma função $y(x, t)$ podemos calcular sua expansão em uma série de Fourier

$$y(x, t) = \sum_n A_n \cos(k_n - \omega_n t) + B_n \sin(k_n - \omega_n t). \quad (1)$$

Os coeficientes podem ser obtidos fazendo uso das relações

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 1, & \text{if } n = m \neq 0 \\ 0, & \text{if } n \neq m \\ 2, & \text{if } n = m = 0 \end{cases} \\ \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 1, & \text{if } n = m \neq 0 \\ 0, & \text{if } n \neq m \end{cases} \\ \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Como o pulso em questão satisfaz $y(x, 0) = y(-x, 0)$ todos coeficientes B_n são nulos. Portanto

$$y(x, 0) = \sum_n A_n \cos k_n x. \quad (3)$$

Utilizando (2) e (3) temos que

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L y(x, 0) dx && \text{se } n = 0 \\ A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos(k_n x) y(x, 0) dx && \text{se } n \neq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

②

$$\begin{aligned} k &= 0.1 \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} \\ \tau &= \frac{2\pi}{\omega} \\ \omega &= kv \\ A &= 0.5; \end{aligned} \quad (5)$$

③

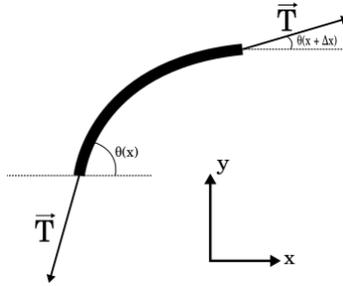


Figura 1: Análise das forças em um pedaço pequeno do pulso.

- a) Considere o desenho de um pedaço pequeno do pulso

Podemos escrever a equação de movimento nas duas direções

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T \cos \theta(x + \Delta x) - T \cos \theta(x) \\ m\ddot{y} &= T \sin \theta(x + \Delta x) - T \sin \theta(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Para ângulos pequenos $\sin \theta \sim \tan \theta = \frac{\partial y(x)}{\partial x}$. Definindo a densidade de massa $\mu = \frac{m}{\Delta x}$, a equação em y se torna

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial y(x + \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right). \quad (7)$$

Dividindo por Δx e tomando o limite temos a equação de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Onde

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (9)$$

- b) Um peso imerso em um fluido sentirá uma força de empuxo devido a diferença de pressão exercida em cada face

$$\vec{\mathbf{F}}_E = \Delta P A \hat{y} = \rho g h \hat{y}. \quad (10)$$

A pressão de um fluido varia com a altura de forma que $\Delta P = \rho g h$. Na situação de equilíbrio temos de acordo com a figura 2 que o peso do bloco, que equivale ao peso de fluido deslocado, é igual a força de empuxo. Isso pode ser visto também pela equação

$$\vec{\mathbf{F}}_e = \underbrace{hA}_{V_{\text{bloco}} = V_{\text{desl}}} \rho g \hat{y} = \rho g V_{\text{bloco}} \hat{y} = P_{\text{bloco}} \hat{y}. \quad (11)$$

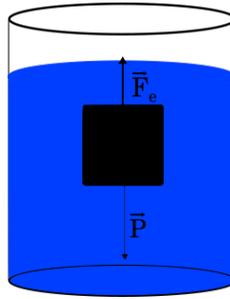


Figura 2: Um peso imerso em um fluido.

Onde V_{desl} e V_{bloco} são o volume de fluido deslocado e o volume do bloco, respectivamente.

- c) A tração que mantém o fio esticado é igual ao peso do bloco quando o bloco é submerso parcialmente temos que a tração é reduzida devido ao fato de que o empuxo ajuda no equilíbrio das forças. Comparando as velocidades antes v_a e depois v_d de submergir o fluido

$$\frac{v_d}{v_a} = \sqrt{\frac{T_d}{T_a}}. \quad (12)$$

Chamando $\frac{v_d}{v_a} \equiv \alpha$ temos que

$$T_d = \alpha^2 T_a = \alpha^2 P. \quad (13)$$

Porém $T_d = P - E = P - \rho g 2V/3$ de forma que

$$\alpha^2 m = m - \frac{2}{3} \rho_A V. \quad (14)$$

Onde ρ_A é a densidade da água. Dividindo (14) pelo volume temos

$$\frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{2}{3(1 - \alpha^2)} \approx 7.58. \quad (15)$$

④

Para somar as ondas podemos usar a relação

$$A \cos a + B \sin(a + \phi) = (A + B \sin \phi) \cos a + B \sin a \sin \phi \quad (16)$$

onde ϕ é uma fase, vamos multiplicar e dividir pelo fator $\sqrt{(A + B \sin \phi)^2 + B^2}$ e definir

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{B}{\sqrt{(A + B \sin \phi)^2 + B^2}}, \\ \sin \psi &= \frac{A + B \sin \phi}{\sqrt{(A + B \sin \phi)^2 + B^2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

De forma que

$$\begin{aligned} A \cos a + B \sin(a + \phi) &= A_{\text{res}} \sin \psi \cos a + A_{\text{res}} \cos \psi \sin a \\ &= A_{\text{res}} \sin(a + \psi). \end{aligned} \quad (18)$$

Onde

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{A + B \sin \phi}{B}, \\ A_{\text{res}} &= \sqrt{(A + B \sin \phi)^2 + B^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

⑤ Nesse exercício a tensão varia ao longo da corda de forma que a dedução feita no exercício ③, deve ser modificada

$$m\dot{y} = T(x + \Delta x) \sin \theta(x + \Delta x) - T(x) \sin \theta(x). \quad (20)$$

Somando e subtraindo $T(x) \sin \theta(x + \Delta x)$ temos

$$\mu \ddot{y} = \left(\frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} \right) \sin \theta(x + \Delta x) + T(x) \left(\frac{\sin \theta(x + \Delta x) - \sin \theta(x)}{\Delta x} \right). \quad (21)$$

Substituindo o seno pela derivada novamente e tomando o limite de $\Delta x \rightarrow 0$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{dT}{dx} \frac{\partial y}{\partial x} + T(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (22)$$

⑥ A dependência da velocidade com a tensão é

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (23)$$

a) Expandindo em torno da tração T_0

$$v(T) = v(T_0) + \frac{dv}{dT} \Delta T. \quad (24)$$

Como a derivada da velocidade em relação a tração é

$$\frac{dv}{dT} = \frac{1}{2\sqrt{T\mu}}. \quad (25)$$

Substituindo na equação (24) temos o resultado desejado

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T}. \quad (26)$$

b) Podemos relacionar diretamente a variação na frequência com a variação de velocidade

$$v = \lambda\nu. \quad (27)$$

Portanto

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta\nu}{\nu}. \quad (28)$$

Logo a variação percentual é

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2\Delta\nu}{\nu} \approx 0.9\% \quad (29)$$

⑦ A situação está exemplificada na figura 3. A relação entre o comprimento de onda inicial λ_i e final λ_f é

$$\lambda_f = \lambda_i + v\Delta t. \quad (30)$$

Que pode ser relacionado à distância que a primeira onda a ser refletida viajou

$$c\Delta t = \lambda_i + v\Delta t. \quad (31)$$

Isolando Δt em (31) e substituindo em (30) temos

$$\lambda_f = \frac{\lambda_i}{1 - \beta}. \quad (32)$$

Onde $\beta = v/c$. Invertendo para as frequências

$$f_f = (1 - \beta)f_i. \quad (33)$$

A distância entre dois picos de batimentos é metade do período logo

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \frac{8}{60}, \\ T &= 15 \text{ s.} \end{aligned} \quad (34)$$

A variação então é dada por

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\Delta f. \quad (35)$$

Temos que $\Delta f = \beta f_i$. Portanto

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{Tf_i} \\ v &= \frac{c}{f_i T} = 2 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (36)$$

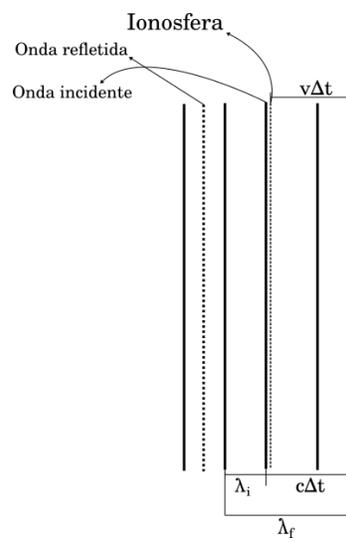


Figura 3: Situação da onda atingindo a ionosfera e sendo refletida.