Lista de Exercícios 8 — Física II — 2020

Parte A: Relatividade

• **Ex. 1** — Neste exercício vamos buscar expressões mais sintéticas para os objetos que lidamos em Relatividade, que permitem simplificar as contas e enxergar aspectos mais profundos dessa teoria.

(a) No caso em que o referencial S' se move com velocidade $\vec{v} = v\,\hat{x}$ com respeito ao referencial S, a transformação de Lorentz entre os dois referenciais pode ser expressa em termos da matriz $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$:

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \gamma(v) \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{1}$$

onde $\mu, \nu = \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta = v/c$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Assuma que μ é o índice das linhas da matrix Λ, e ν é o índice das colunas dessa matriz.

Mostre que a expressão abaixo exprime as transformações de Lorentz:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, x^{\nu} ,$$

onde $\{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{ct, x, y, z\}$ representa as coordenadas espaço-tempo de um evento na posição x^{μ}.

(b) No mesmo sentido do exercício anterior, podemos expressar a invariância do "elemento de distância" de espaço-tempo, $ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2$, como a expressão:

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} ,$$

onde a matriz $\eta_{\mu\nu}$, chamada de *métrica de Minkowski*, é dada por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Mostre que a invariância de ds^2, segue da identidade:

$$\eta_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \Lambda^{\alpha}_{\ \mu}\, \eta_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\beta}_{\ \nu} .$$

Dica: tente expressar essas equações em termos de produtos de matrizes, mas *preste atenção aos índices.*

(c) Qual deve ser a expressão para uma transformação de Lorentz quando os referenciais têm uma velocidade relativa na direção z?

(d) Mostre que duas transformações de Lorentz sucessivas (de S para S', e de S' para S'') são equivalentes a uma transformação de Lorentz (de S direto para S''), e que isso preserva o elemento de distância invariante.

• **Ex. 2** — Um fóton tem, num referencial S, um 4-momento dado por $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, 0)$. Responda:

(a) Qual a relação entre a energia do fóton, E, e o módulo das componentes espaciais do momento, $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$?

(b) Considere um referencial S', que se move em relação a S com uma velocidade v paralela ao eixo x. Encontre o 4-momento do fóton nesse novo referencial, utilizando a transformação de Lorentz no seu formato $p'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu p^\nu$. Qual o ângulo que esse raio de luz faz com a horizontal (eixo x') no referencial S'? E qual é a energia desse fóton no referencial S'? (Nesse exercício você re-deriva as fórmulas para a aberração e para o efeito Doppler relativístico.)

(c) Repita o exercício da parte (b), mas considerando agora que a velocidade v do referencial S' com relação a S é na direção do eixo z.

Parte B: Fluidos

• **Ex. 3** — Dado que o módulo volumétrico K, o módulo de Young Y e coeficiente (ou a razão) de Poisson σ sejam positivos, que limitação a relação, válida para materiais isotrópicos, $K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}$ implica para os possíveis valores de σ? (Para valores medidos típicos veja e.g. 'Poisson's ratio' na Wikipedia).

Ex. 4 — Os dois recipientes cilíndricos indicados na fig. 1 têm bases de raios iguais r_0 e estão cheios de um líquido de densidade ρ até a mesma altura h. O primeiro tem uma parte inferior de altura $h_0 < h$ ligada a um gargalo de raio $r_1 < r_0$, enquanto o segundo é simplesmente um cilindro reto. A aceleração da gravidade é g.

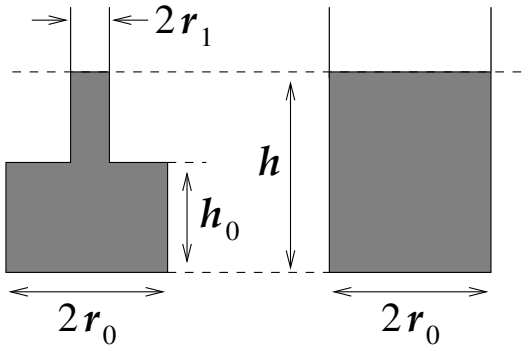


Figura 1: Problema 4.

a) Qual o peso do fluido contido em cada um dos dois recipientes, em termos das dimensões dadas, ρ e g?

b) Qual a força resultante exercida pela pressão do fluido sobre o fundo de cada um dos dois recipientes, em termos das mesmas quantidades?

c) Qual a força resultante exercida pelo fluido sobre as paredes laterais de cada um dos recipientes?

d) Qual a força resultante exercida pela pressão do fluido sobre o disco situado ao pé do gargalo do primeiro recipiente?

e) Compare a resultante de todas as fôrças exercidas pela pressão sobre a superfície interna de cada um dos recipientes com o peso do fluido em cada um deles.

Ex. 5 — (HMN 01-03) O manômetro de tubo inclinado (v fig. 2) é utilizado para medir pequenas diferenças de pressão $p_1 - p_2$ entre os dois tubos. O ramo de diâmetro d é inclinado de um ângulo θ com relação à horizontal. Se o fluido empregado é óleo de densidade $\rho = 0,8$ g/cm^3, com $d = 0,5$ cm e $D = 2,5$ cm, escolha θ para que o deslocamento l seja de 5 cm quando $p_1 - p_2 = 0,001$ atm. Qual é a vantagem de usar um tubo inclinado para medir pequenas diferenças de pressão?

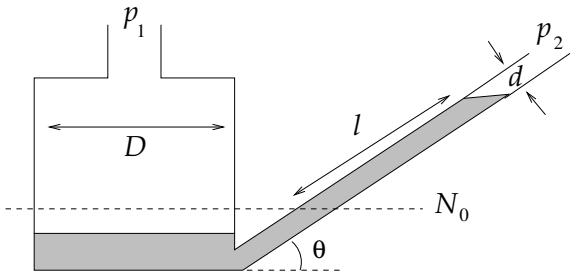


Figura 2: Problema 5.

Ex. 6 — Um cubo de gelo flutua sôbre um copo de água gelada, praticamente à temperatura de 0º C. Quando o gelo derrete, sem mudança apreciável de temperatura, o nível da água no copo sobe, desce ou não se altera? Explique.

Ex. 7 — Um tubo em U contendo um líquido de densidade ρ gira com velocidade angular ω em torno de um de seus ramos verticais (v. fig. 3). A distância entre os dois ramos do tubo é d. Calcule a diferença h da altura de equilíbrio do fluido nos dois ramos do tubo em termos de ω, d e da aceleração da gravidade g. Porque h não depende da densidade do líquido?

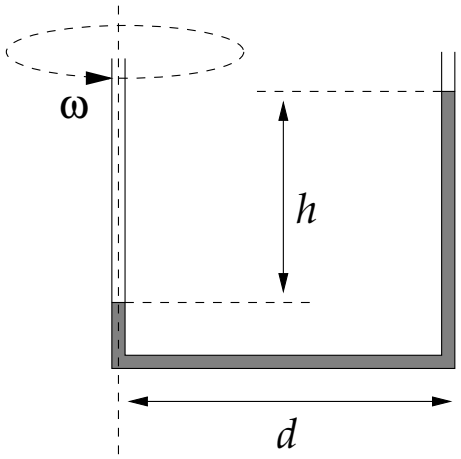


Figura 3: Problema 7.

Ex. 8 — a) A aceleração da gravidade é $\vec{g}$, na direção vertical e dirigida de cima para baixo. Mostre que o fato de que a superfície de separação entre dois fluidos não miscíveis, de densidades ρ_1 e $\rho_2 < \rho_1$ (por exemplo, água e óleo) e em equilíbrio, é plana e horizontal, é equivalente à condição de que a energia potencial seja mínima. b) Mostre que quando o

recipiente em que os dois fluidos não miscíveis estão em equilíbrio está submetido a uma aceleração horizontal constante $\vec{a}$, a superfície de separação ainda é um plano, e calcule o ângulo que ele faz com a horizontal nesse caso (tal ângulo é medido em um plano perpendicular à reta de intersecção da superfície de separação com um plano horizontal). c) Como varia a pressão dentro do fluido? d) O que acontece se a aceleração for vertical, e $\vec{a} = \vec{g}$? **Sugestão:** você pode usar o princípio de equivalência de Einstein (v. HMN1, Seção 13.7(b)) para tratar as partes b), c) e d).