T2 - Gabarito

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\boxed{T(1,1) = (3,2,1)}$, $T(0,-2) = (0,1,0)$

$\vec{v_1} = (1,1)$
$\vec{v_2} = (0,-2)$

Se não mostrar que é base: $-1{,}00$.

$\nexists\, K \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v_1} = K\vec{v_2}$ $\therefore$ vetores LI

$\dim(V) = \underline{\underline{2}}$ $\therefore$ $\underline{\underline{2}}$ vetores LI formam base do $\mathbb{R}^2$.

Como são conhecidas as imagens de dois vetores de uma base de $V = \mathbb{R}^2$, então é possível encontrar $T(x,y)$.

$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ formam uma base de V; logo, todo $\vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como CL dos vetores da base:

$$\vec{v} = \alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2}$$

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,-2)$$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \alpha - 2\beta = y \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \alpha = x \\ \beta = \frac{1}{2}(x-y) \end{array}$$

Considerando a Propriedade das TLs em relação à CL:

$$T(x,y) = T(\alpha(1,1) + \beta(0,-2))$$

$$T(x,y) = \alpha T(1,1) + \beta T(0,-2)$$

$$T(x,y) = x(3,2,1) + \frac{1}{2}(x-y)(0,1,0)$$

$$\boxed{T(x,y) = \left(3x, \frac{5x-y}{2}, x\right)}$$

Injetora $\iff N(T) = \{\vec{0}\}$

Sobrejetora $\iff Im(T) = W$

$N(T) = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \vec{0}\}$ $\begin{cases} \vec{v} = (x,y) \in V \\ \vec{0} = (0,0,0) \in W \end{cases}$

$$T(x,y) = (0,0,0)$$

$$\left(3x, \frac{5x-y}{2}, x\right) = (0,0,0) \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\therefore\ \vec{v} = (x,y) = (0,0)$ e $N(T) = \{\vec{0}\}$ $(\dim(N(T)) = 0)$

Então, T é injetora e $\nexists$ base para $N(T)$.

Pelo T. Dimensão:

$$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

$$\therefore\ \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(V) = 2$$

Mas $W = \mathbb{R}^3$ e $\dim(W) = 3 \neq \dim(\mathrm{Im}(T))$. Desta forma, T não é sobrejetora.

$\mathrm{Im}(T) = \{\vec{w} \in W \mid T(\vec{v}) = \vec{w}\}$ $\begin{cases} \vec{v} = (x,y) \in V \\ \vec{w} = (a,b,c) \in W \end{cases}$

$$T(x,y) = \vec{w}$$

$$\left(3x, \frac{5x-y}{2}, x\right) = (a,b,c)$$

$$\begin{cases} 3x = a & (i) \\ 5x - y = 2b & (ii) \\ x = c & (iii) \end{cases}$$

(i) e (iii): $a = 3c$

(ii): $b \in \mathbb{R}$

$$\therefore\ \vec{w} = (3c, b, c) \implies \vec{v}_{im} = c(3,0,1) + b(0,1,0)$$

$$\longrightarrow B_{im} = \{(3,0,1), (0,1,0)\}$$