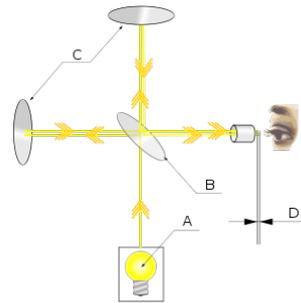


## 1ª Lista de Exercícios — Física II — Relatividade Restrita

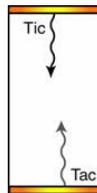
- **Ex. 1** — Em 1887 Albert Michelson e Edward Morley construíram um aparato para medir de que modo a velocidade da luz se propaga com relação ao “éter luminífero” (o meio hipotético cujas oscilações seriam as ondas de luz). Uma fonte de luz (A) é direcionada a um separador de feixes (B), a partir do qual dois raios de luz caminham, em direções perpendiculares, até serem refletidos por espelhos (C). Esses raios retornam ao separador de feixes e se recombinam antes de serem observados por um detector (D).



Suponha que as características do experimento são as seguintes: (i) a fonte de luz é monocromática, com um comprimento de onda de  $\lambda = 500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ; (ii) os braços do interferômetro (distâncias B-C) são de 10 m .

- Calcule o tempo que a luz deveria levar para percorrer cada braço do experimento, assumindo que o aparato viaja no “éter” com uma velocidade paralela a um dos braços.
- Calcule a diferença de fase  $\phi = c(T_1 - T_2)/\lambda$  (que é justamente a translação das franjas de interferência) nos casos em que a velocidade é a velocidade de rotação da Terra, 460 m/s, e quando a velocidade é a velocidade de rotação da Terra em torno do Sol  $3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ .

- **Ex. 2** — Considere a “ampulheta de luz” da figura abaixo.



Obtenha a transformação que deve ser aplicada aos intervalos de tempo medidos por dois observadores: um ( $S$ ) que está em repouso com relação à ampulheta, e outro ( $S'$ ) que se move com velocidade  $v$  na direção perpendicular à altura da ampulheta (no caso da figura, a velocidade seria na horizontal). Se chamamos o período (o tempo do “tic-tac” da ampulheta) de  $T$ , então a transformação entre os períodos medidos pelos dois observadores é  $T' = \gamma(v)T$ . Note: você ainda não aprendeu as transformações de Lorentz, mas elas não são necessárias; se você já conhece essas transformações, tente fazer essa questão de “primeiros princípios”.

• **Ex. 3** — O Princípio da Relatividade (restrita) afirma que as leis físicas devem ter a mesma expressão em quaisquer referenciais (no caso, referenciais inerciais). Neste problema vamos estudar o que isso significa na prática no caso do Eletromagnetismo, derivado por James Clerk Maxwell no meio do Século XIX.

Uma das consequências das Equações de Maxwell para a Eletrodinâmica é que, no vácuo (ou, como diriam alguns no Séc. XIX, o “éter luminífero”), os potenciais eletromagnéticos obedecem a *equação de onda*, dada por:

$$\left[ \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi(\vec{x}, t) = 0,$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo, e  $\epsilon_0$  é a constante de permissividade do vácuo. Para simplificar, vamos assumir que a onda se propaga na direção  $x$ , e que podemos combinar as duas constantes eletromagnéticas que caracterizam o vácuo (ou “éter”) numa única constante  $\mu_0 \epsilon_0 = c_0^{-2}$ , de forma que obtemos:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi(x, t) = 0. \quad (1)$$

(a) Suponha que nós verificamos as Equações de Maxwell no nosso laboratório, e concluímos que a Eq. (1) acima é válida. Considere agora um observador ( $S'$ ) que se movimenta com uma velocidade  $v$  ao longo da direção  $x$ , e use as transformações de Galileu para obter a forma dessa equação que deveria ser válida para  $S'$ .

(b) Como você deve ter visto do item anterior, as transformações de Galileu falham em reproduzir as mesmas leis físicas. Mas então, o que funciona? Para responder isso, note que o *operador*  $\partial^2/\partial x^2 - c_0^{-2}\partial^2/\partial t^2$  deve ser *invariante* sob as novas transformações. Uma maneira diferente de dizer a mesma coisa é exigir que o “elemento de distância tempo-espaço”  $ds^2 = c_0^2 dt^2 - dx^2$  seja invariante, ou seja,  $ds'^2 = c_0^2 dt'^2 - dx'^2$ . Porém, antes de você sair calculando, vamos modificar essa pergunta, tornando ela mais fácil de responder. Para isso, vamos chamar  $c_0 dt \equiv i d\eta$ , de forma que  $c_0^2 dt^2 = -d\eta^2$  e, de modo equivalente,  $c_0 dt' \equiv i d\eta'$ , e portanto  $c_0^2 dt'^2 = -d\eta'^2$ . Dessa forma, a exigência de invariância das leis do Eletromagnetismo implica que  $d\eta^2 + dx^2 = d\eta'^2 + dx'^2$ . Agora sim, podemos nos perguntar: quais as transformações mais gerais que preservam a invariância de  $ds^2$ ? Expresse essas transformações em termos de um *ângulo*. Em particular, obtenha a matriz que relaciona  $\{d\eta, dx\} \rightarrow \{d\eta', dx'\}$ , e depois expresse as mesmas como uma matriz que transforma as coordenadas  $\{dt, dx\} \rightarrow \{dt', dx'\}$ .

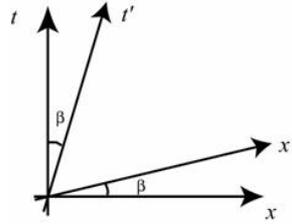
(c) Agora verifique explicitamente que a equação de onda é invariante sob as transformações encontradas no item anterior.

(d) Encontre como o parâmetro encontrado no item (b) anterior (o ângulo) se relaciona com a velocidade entre os dois observadores, no limite em que a velocidade entre os dois referenciais é muito menor que a velocidade da luz,  $v \ll c_0$ .

• **Ex. 4** — Mostre que o resultado de duas transformações de Lorentz (passando de um referencial  $S$  para outro  $S'$ , e depois passando de  $S'$  para um

terceiro referencial  $S''$ ) é uma transformação de Lorentz (de  $S$  direto para  $S''$ ). Qual a velocidade relativa entre  $S$  e  $S''$  (medida em qualquer um desses referenciais)?

• **Ex. 5** — Uma maneira de representar eventos no espaço-tempo é por meio de um “diagrama espaço-tempo”, como na figura abaixo:



Encontre a expressão para o ângulo  $\beta$  em função da velocidade de  $S'$  com relação a  $S$ .