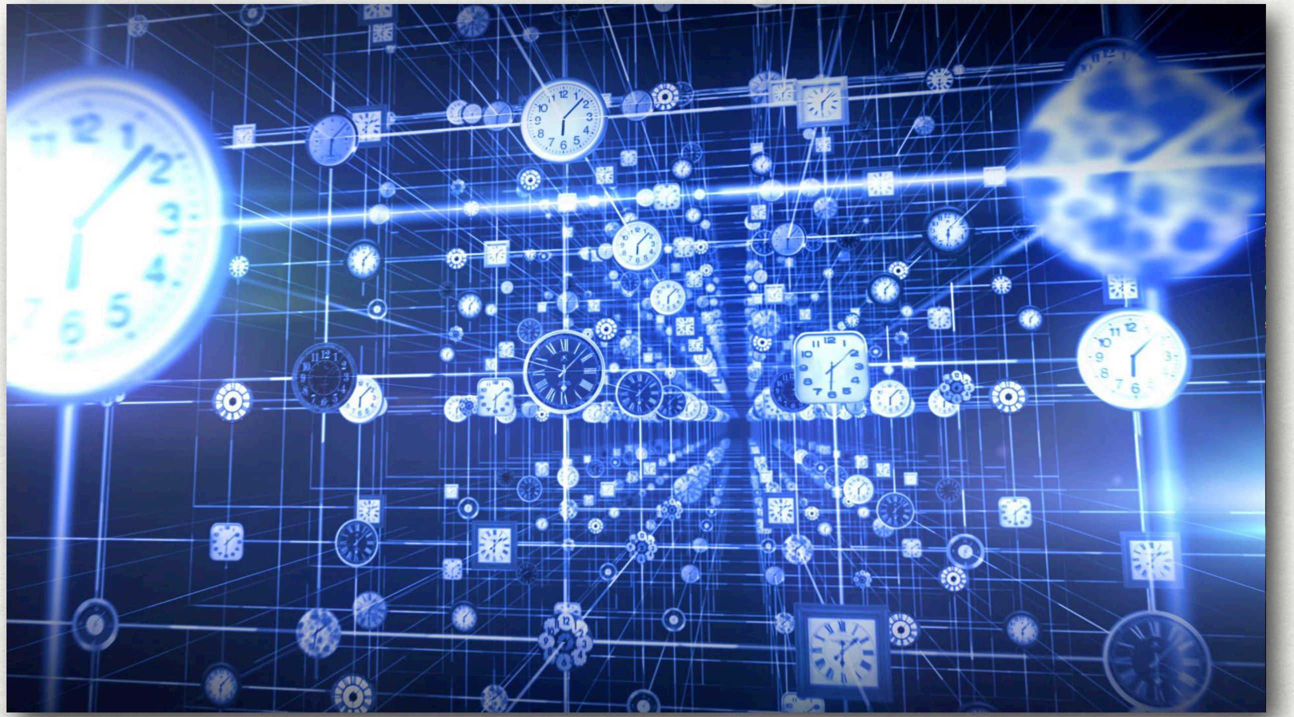
FÍSICA II

MÓDULO III: INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE ESPECIAL

4302112 – IF/USP – PROF. RAUL ABRAMO

AULA 12 - 25/09/2020

- O Princípio da Relatividade
- As transformações de Lorentz
- As noções de invariância e covariância
- Simultaneidade,
- Dilatação do tempo, contração do espaço
- Lei de adição de velocidades

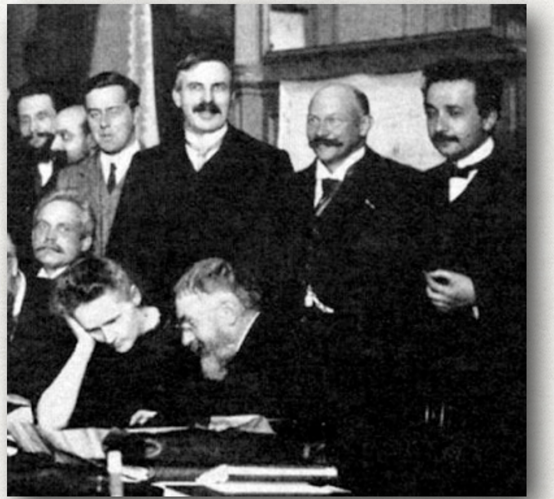


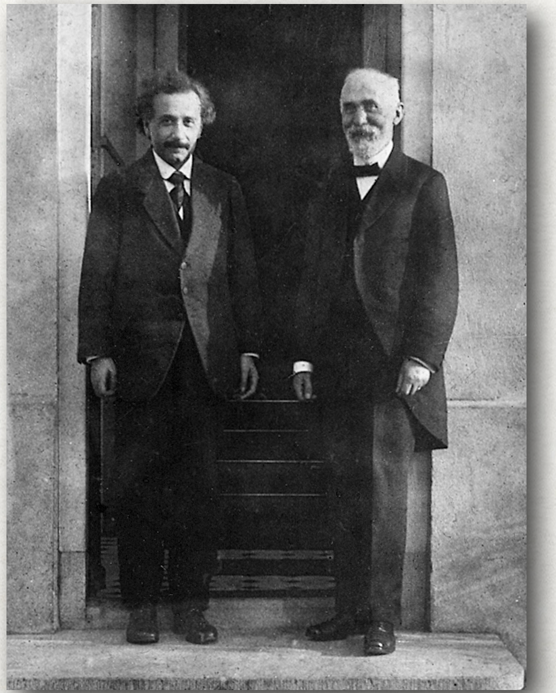
O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE

- Em 1905 Einstein coleta os principais resultados do Eletromagnetismo e experimentos como os de Michelson e Morley, e propõe o Princípio da Relatividade em termos de dois postulados:

    - **Todas as leis físicas têm a mesma expressão em qualquer referencial inercial, não sendo nenhum referencial preferido com relação a um outro qualquer.**

    - **A velocidade da luz (c) é a mesma em qualquer referencial, independente da direção de propagação ou das velocidades relativas das fontes emissoras e dos observadores.**





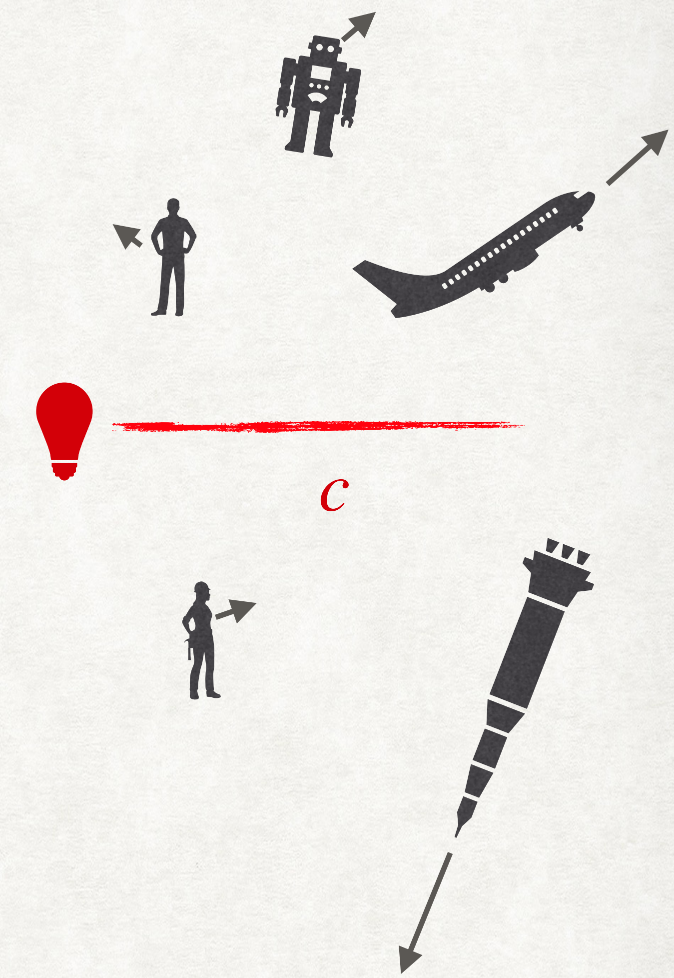
O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE

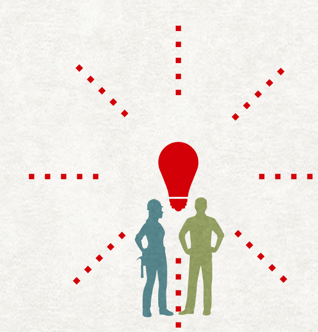
- Einstein: “a ***velocidade da luz*** é a ***mesma*** em ***qualquer*** referencial”

- Mas o que quer dizer isso, do ponto de vista prático? Como podemos ***implementar*** esse ***princípio***?

- Vamos fazer como Einstein, e bolar um experimento mental. Suponha que dois cientistas S ( ) e S' ( ) , combinem de ligar um flash de luz quando eles se encontrarem.

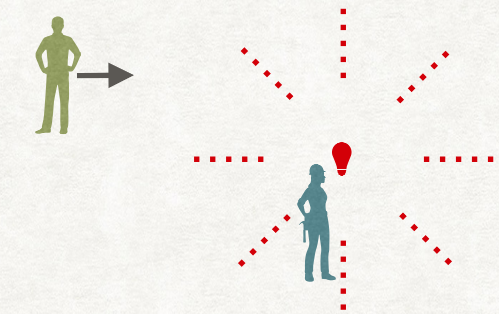
- Agora, vamos seguir esse flash de luz do ponto de vista de cada um desses dois observadores, supondo que eles se movimentam um com relação ao outro.



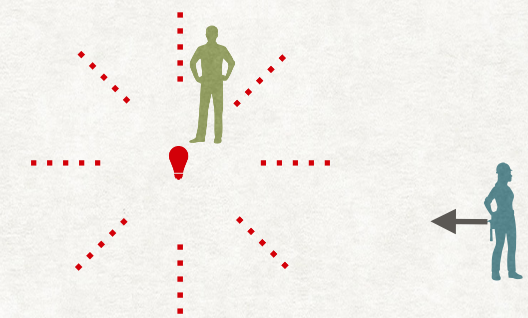


O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE: CONSEQUÊNCIAS

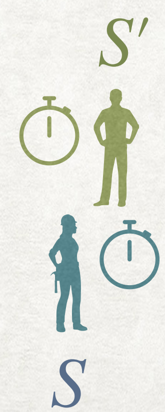
- Vamos primeiro tomar o ponto de vista do observador S , que vê o observador S' se movendo com velocidade $\vec{v}$.



- Podemos igualmente considerar o ponto de vista do observador S', que, em seu referencial, vê o observador S se movendo na direção oposta $(-\vec{v})$.



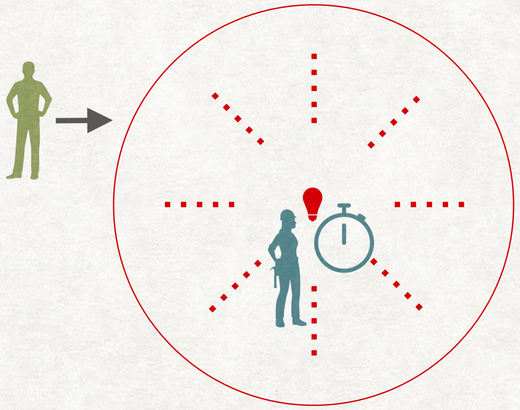
- Cada observador carrega consigo trenas, réguas, relógios, cronômetros ou o que mais for necessário para que eles meçam distâncias. Por uma questão prática, vamos supor que eles combinam que, ao se cruzarem, seus cronômetros deverão ser zerados.



O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE: CONSEQUÊNCIAS

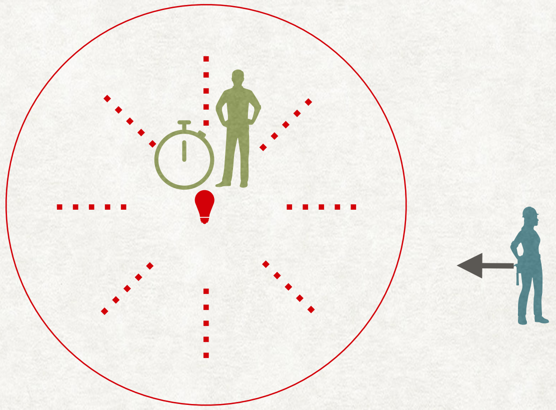
- Vamos então seguir o que acontece com esse flash de luz — assumindo que, segundo Einstein, a ***velocidade da luz é sempre a mesma***, independente do movimento de quem mede.

- Para o observador S, o flash de luz se afasta da origem do próprio referencial S, com velocidade constante, como se fosse uma casca esférica cujo raio aumenta com a velocidade da luz:



$$S : c^2t^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- Já do ponto de vista do observador S', a luz se move a partir da origem de S', em todas as direções com a mesma velocidade. Portanto, ele também vê o flash se afastar dele como:



$$S' : c^2t'^2 = r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

- OK, parece que até aqui tudo bem, não?

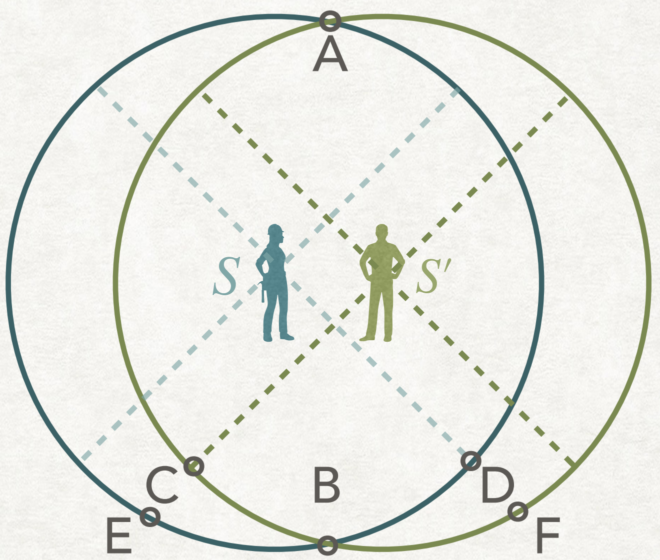
- Bom… nem tanto! Porque esse “lugar geométrico” do flash de luz parece ser diferente para cada observador!… Vamos olhar isso em detalhe a seguir.

O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE: CONSEQUÊNCIAS

- Vamos tentar ***juntar as duas descrições*** da progressão desse flash (o mesmo flash!), desde os dois pontos de vista.

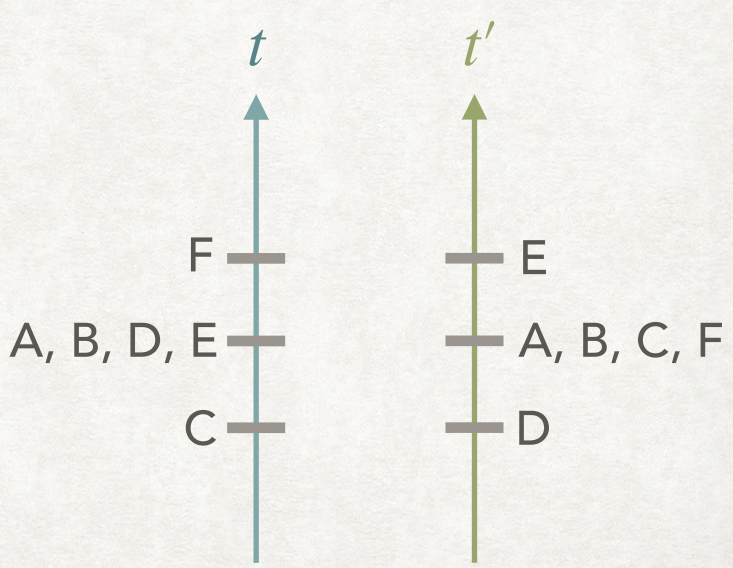
- Vamos mostrar a seguir que as duas descrições são ***incompatíveis*** se nos aferramos às noções familiares de tempo e espaço.

- Tome os pontos **A** e **B**. Segundo as duas descrições (de S e de S'), o flash passa por esses dois pontos no ***mesmo instante*** — ou seja, os eventos correspondentes à ***passagem do flash por aqueles pontos*** são ***simultâneos***.



- Agora tome o ponto **C**. Está claro que, do ponto de vista de S, ***o evento C ocorreu antes dos eventos A ou B*** — afinal, esse ponto está mais próximo da origem de S. Porém, ***para S' os eventos A, B e C são simultâneos*** — afinal, eles estão todos na ***mesma casca esférica*** do flash.

- Podemos também olhar para o ponto **D**: para o observador S, os eventos ***A, B e D são simultâneos***. Já ***para S', o evento D ocorreu antes dos eventos A e B***.



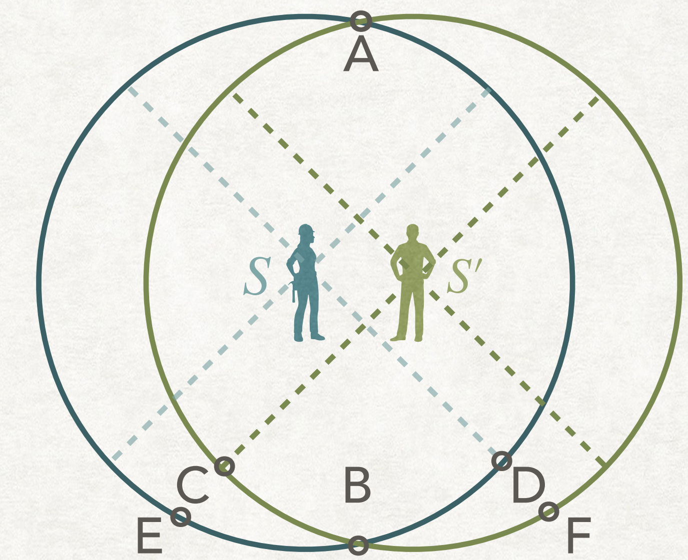
- Podemos deixar isso ainda mais divertido olhando para os pontos **E** e **F**.

- Para *S*, os eventos **A**, **D**, **B**, e **E** são simultâneos; já o evento **C** ocorreu antes dos outros, enquanto o evento **F** ocorreu depois.

- Para *S'*, os eventos **A**, **C**, **B**, e **F** são simultâneos; já o evento **D** ocorreu antes dos outros, enquanto o evento **E** ocorreu depois.

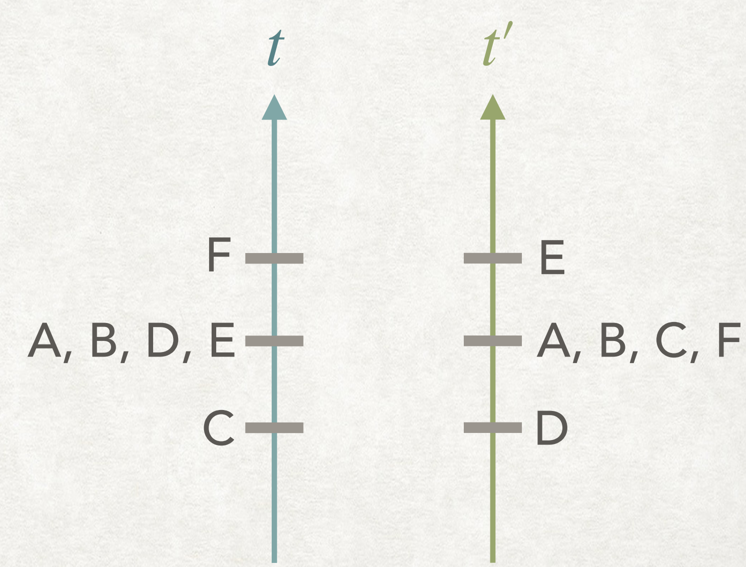
O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE: CONSEQUÊNCIAS

- Esse experimento mental (gedankenexperiment) mostra que se a velocidade da luz é a mesma para qualquer observador, então o conceito de simultaneidade não pode ser absoluto.



- Isso significa que a própria noção de "intervalo de tempo" não pode ser absoluta. Ou seja, o tempo entre dois eventos é uma medida que, ela sim, depende do estado de movimento do observador com relação a esses eventos.

- De fato, podemos conceber outros exemplos que mostram que a noção de distância (espaço entre objetos ou eventos) também não pode ser absoluta.

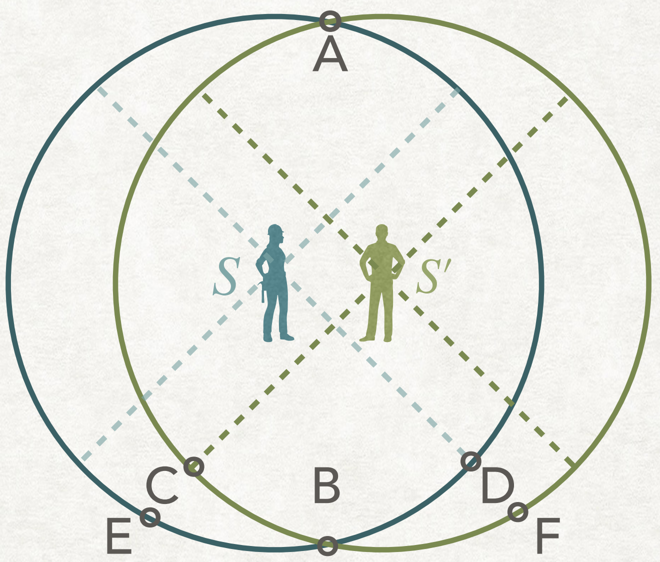


- ***Assim, chegamos à conclusão que, se a velocidade da luz é "absoluta", as noções de tempo e espaço não podem ser absolutas.***

- Mas então… como??

TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

- Vamos considerar os nossos ***dois observadores***, que possuem um ***movimento relativo***: *S* vê *S′* com uma velocidade v na direção $+\hat{x}$, enquanto *S′* vê *S* com uma velocidade $-v$ (ou seja, uma velocidade v na direção $-\hat{x}$).



- Vamos também supor que os dois observadores zeram os seus cronômetros quando eles se encontram, ou seja a ***emissão do flash*** se dá no instante e na posição da ***origem desses referenciais***:

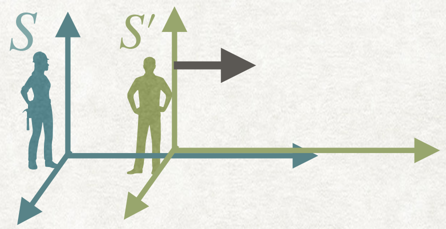
$$S : t = 0\,,\; x = y = z = 0$$

$$S' : t' = 0\,,\; x' = y' = z' = 0$$

- A propagação desse flash de luz se dá por meio das "cascas esféricas":

(i) $\quad c^2 t^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

(ii) $\quad c^2 t'^2 = r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$



- Nosso desafio agora é encontrar ***relações entre as coordenadas*** $\{t, x, y, z\}$ e $\{t', x', y', z'\}$, tais que as equações ***(i) e (ii) permaneçam válidas*** — ou seja, queremos garantir que a propagação do raio de luz se dê com a ***mesma velocidade*** em todas as direções, para ***ambos os observadores***.

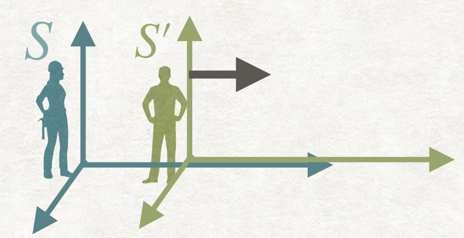
TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

- A relação entre $\{t, x, y, z\}$ e $\{t', x', y', z'\}$ deve obedecer algumas ***condições básicas***. Em particular, as ***transformações*** que relacionam os dois devem ser ***lineares*** : $t' = a_0 t + a_1 x + a_2 y + a_3 z$, etc.

  > Por quê?

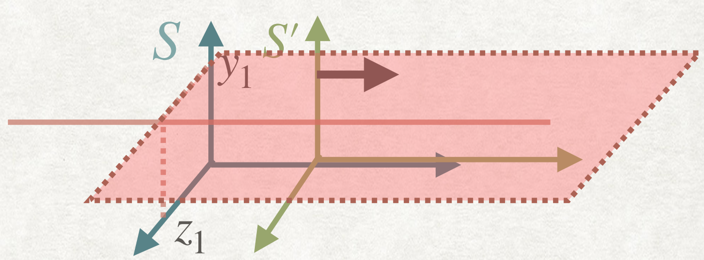
  > Porquê ***movimentos uniformes*** (não-acelerados) devem ser uniformes em ***qualquer referencial inercial***! Caso contrário, teríamos forças num referencial, mas não num outro.

- Vamos supor, sem perda de generalidade, que os eixos x e x' dos dois referenciais estão alinhados, e que ambos são paralelos ao movimento (veja a figura ao lado).



- Vamos agora considerar uma ***reta paralela*** aos eixos x e x' que passa por qualquer lugar — digamos que no referencial S essa reta passa por $\{y_1, z_1\}$.

- É evidente que ***qualquer movimento uniforme*** ao longo dessa reta será ***paralelo tanto a*** S ***quanto a*** S'.



- Mas isso vale para o ***conjunto de retas (e planos!) paralelos*** ao eixo x, portanto os planos $y = const.$ (ou $z = const.$) são ***paralelos aos eixos*** x ***e*** x' . Apenas a ***distância desses planos*** até o eixo x' é que poderia talvez ser diferente, ou seja:

$$y' \stackrel{?}{=} f(v) y \quad , \quad z' \stackrel{?}{=} f(v) z$$

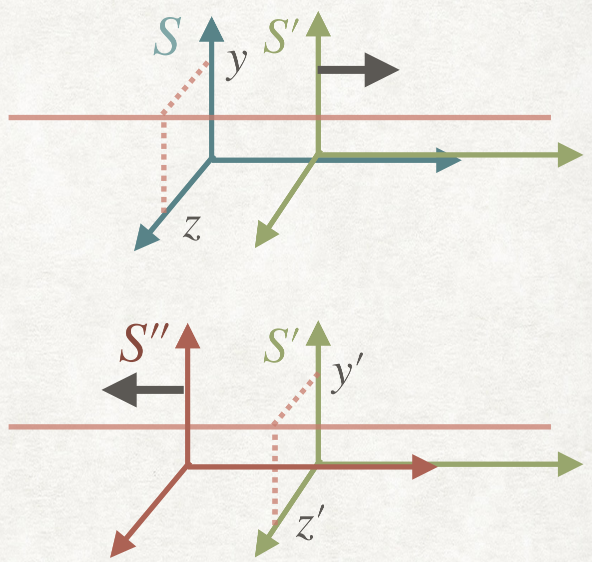
TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

- Vamos nos focar sobre essa transformação para as direções perpendiculares ao movimento:

$$y' = f(v)\,y \quad , \quad z' = f(v)\,z$$

- Mas considere agora o que aconteceria se tivéssemos um terceiro referencial, S'', que se move para a ***esquerda*** com ***velocidade*** v ***com relação a*** S'. Pelo mesmo argumento que acabamos de desenvolver, a distância até uma reta paralela aos eixos x, x' e x'' seria:

$$y'' = f(-v)\,y' = f(-v)f(v)\,y \quad , \quad z'' = f(-v)\,z' = f(-v)f(v)\,z$$



- Opa, mas… peraí… ***o referencial*** S'' ***é idêntico ao*** S***!*** Portanto, $y'' = y$ e $z'' = z$, e assim:

$$f(-v)f(v) = 1$$

- Agora, note bem: qual a diferença entre uma velocidade para a direita $(+v)$ ou para a esquerda $(-v)$? A distância até essa reta ***não pode depender dessa direção***, no máximo ela depende do módulo, ou seja,

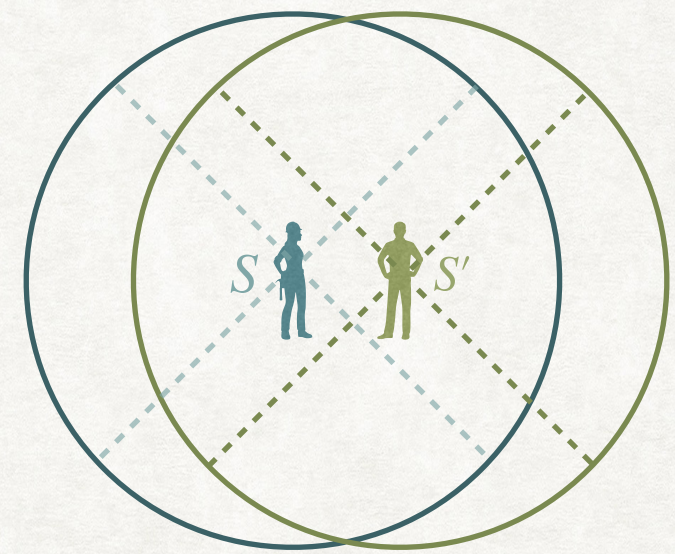
$$f(-v) = f(v) \quad \Longrightarrow \quad f^2(v) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(v) = \pm 1$$

- O sinal "−" corresponde apenas a uma ***inversão*** dos eixos (y ou z), então podemos descartar esse "truque" trivial.

- Portanto, chegamos à conclusão que, para ***direções perpendiculares ao movimento*** (aqui, $\vec{v} = v\,\hat{x}$), ***nada muda***: $y' = y$, $z' = z$.

TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

- Muito bem, agora que já "tiramos da frente" a questão das direções perpendiculares ao movimento, ainda resta a questão da relação entre as coordenadas $\{t, x\}$ e $\{t', x'\}$. Para encontrar a relação entre elas vamos retornar às nossas equações que denotam a propagação do flash de luz nos dois referenciais:



(*i*) $c^2t^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

(*ii*) $c^2t'^2 = r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

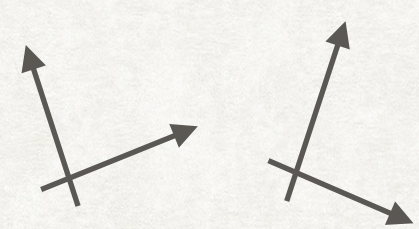
- Podemos re-escrever essas equações da forma:

(*i*) $c^2t^2 - x^2 = y^2 + z^2$

(*ii*) $c^2t'^2 - x'^2 = y'^2 + z'^2$

- Como o ***lado direito*** das duas equações é ***idêntico***, podemos escrever essa relação como:

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

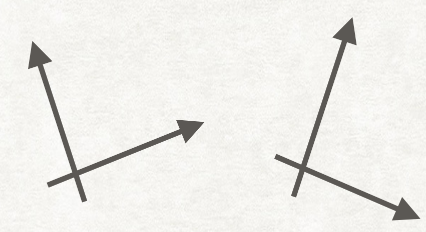


- Pergunta: qual a ***relação linear*** entre esses pares de coordenadas? Vocês conseguem pensar em ***algo familiar*** (ou ***quase*** familiar)?

TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

- Vamos reescrever a relação anterior para torná-la mais familiar. Temos:

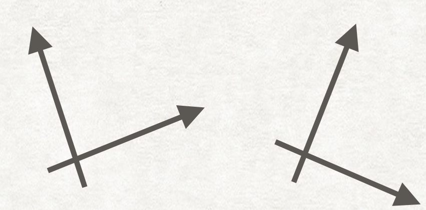
$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$



- Vamos introduzir as variáveis $\eta = i\,c\,t$ e $\eta' = i\,c\,t'$, de tal forma que $\eta^2 = - c^2\,t^2$ e $\eta'^2 = - c^2\,t'^2$. Em termos dessas variáveis a relação se torna:

$$\eta^2 + x^2 = \eta'^2 + x'^2$$

- E agora, você consegue pensar numa transformação linear simples, familiar, que relacione os dois pares de coordenadas?

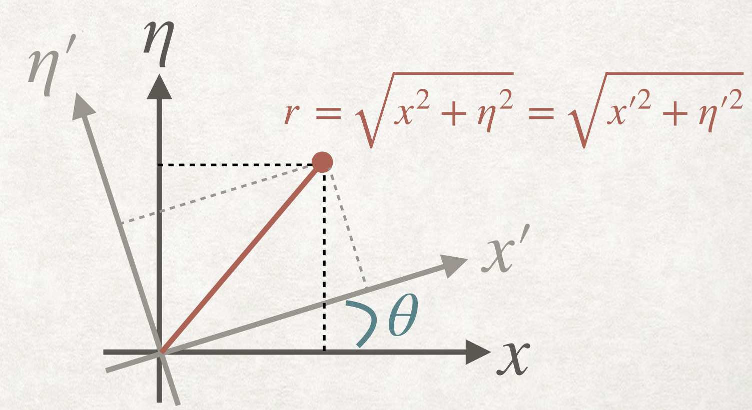


- SIM, é uma **rotação**!

- Temos então:

$$x' = x\cos\theta + \eta\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad\qquad x = x'\cos\theta - \eta'\mathrm{sen}\,\theta$$

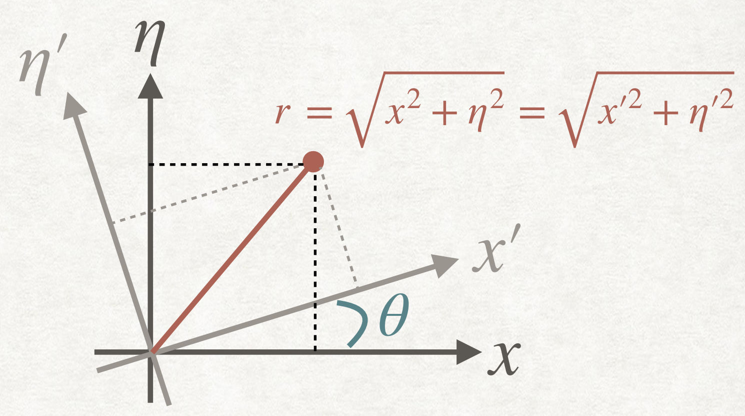
$$\eta' = -\,x\,\mathrm{sen}\,\theta + \eta\cos\theta \qquad\qquad \eta = x'\mathrm{sen}\,\theta + \eta'\cos\theta$$



- Mas quem seria esse ***"ângulo"*** θ que relaciona os dois referenciais? Certamente ele deve estar relacionado com ***a velocidade***...

TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

- Para encontrar a relação entre o ângulo θ e a velocidade v, vamos escrever essa "rotação" para os elementos de tempo e de distância (lembrando que $\eta = ict$, $d\eta = ic\,dt$):



$$ic\,dt' = ic\,dt\cos\theta - dx\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad ic\,dt = ic\,dt'\cos\theta + dx'\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$dx' = ic\,dt\,\mathrm{sen}\,\theta + dx\,\cos\theta \qquad dx = -\,ic\,dt'\mathrm{sen}\,\theta + dx'\cos\theta$$

- Considere um objeto em ***repouso no referencial*** S': isso significa que, ***no referencial*** S, ***esse objeto tem velocidade*** v. Logo:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad , \quad \frac{dx'}{dt'} = 0$$

- Mas, pelas relações acima temos que:

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{dx'\cos\theta - ic\,dt'\,\mathrm{sen}\,\theta}{\frac{1}{ic}\left(dx'\,\mathrm{sen}\,\theta + ic\,dt'\cos\theta\right)}$$

$$= ic\,\frac{\cancel{\frac{dx'}{dt'}}\cos\theta - ic\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cancel{\frac{dx'}{dt'}}\mathrm{sen}\,\theta + ic\,\cos\theta} = -\,ic\tan\theta$$

- Ou seja, deduzimos que $\tan\theta = i\dfrac{v}{c}$, em outras palavras:

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad , \text{ e } \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

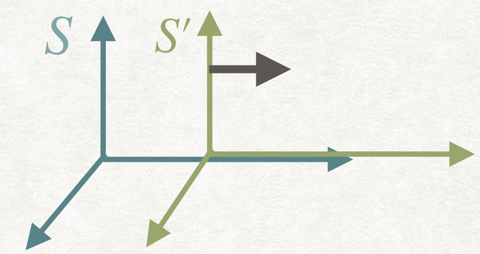
$$\begin{pmatrix} ic\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ic\,dt \\ dx \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{+v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{+v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \end{pmatrix}$$

TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

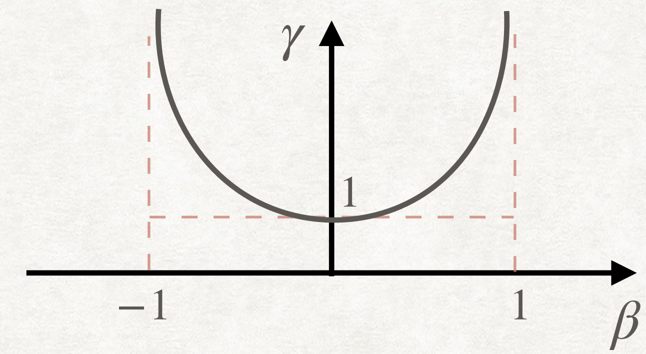


- As relações que acabamos de encontrar se chamam ***Transformações de Lorentz***.

- Podemos escrever essas transformações de várias maneiras, conforme o gosto do freguês. Mas para simplificar essas expressões é muito útil escrever dois termos que sempre aparecem:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

[Note que $|\beta| < 1$ e $\gamma > 1$!!]



- A expressão mais "corriqueira" para as transformações de Lorentz é:

$$ct' = \gamma(ct - \beta\, x) \quad , \quad ct = \gamma(ct' + \beta\, x')$$

$$x' = \gamma(x - \beta\, ct) \quad , \quad x = \gamma(x' + \beta\, ct')$$

$$y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z'$$

Note que a única diferença entre a transformação de S para S′ e a transformação de S′ para S é que muda o sinal de v (e/ou β) !

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Podemos também escrever essas transformações de um modo que deixe mais claro essa "rotação". Usando a fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, chegamos em $\tanh\theta = \beta$, e assim:

Escrevendo ct, o vetor das coordenadas tem todas as componentes com a **mesma dimensão**!

$$ct' = ct\cosh\theta - x\,\mathrm{senh}\,\theta$$

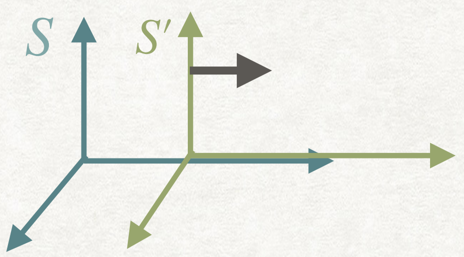
$$x' = -\,ct\,\mathrm{senh}\,\theta + x\cosh\theta$$

$$y' = y \quad , \quad z' = z$$

Note também que assumimos que as **origens** dos referenciais coincidem: ou seja, $t = t' = 0$ e $x = x' = 0$ correspondem ao mesmo ponto no tempo e no espaço

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\mathrm{senh}\,\theta & 0 & 0 \\ -\mathrm{senh}\,\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO



- É interessante verificar se, no limite em que a ***velocidade*** entre os dois referencias é ***muito menor que a velocidade da luz***, retornamos às ***transformações de Galileu***.

- Note que no limite $|\beta| = |v|/c \ll 1$, o fator γ pode ser expandido em β:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4)$$

- Assim, nesse limite as transformações de Lorentz se escrevem:

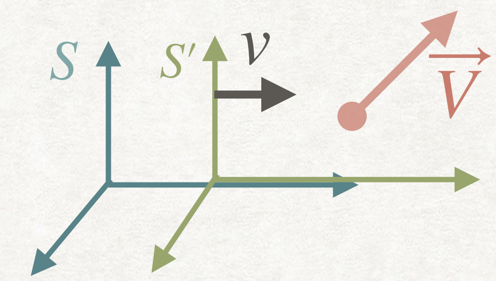
$$ct' \simeq \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)(ct - \beta x) \simeq ct + \dots$$

$$x' = \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)(x - \beta ct) = x - vt + \dots$$

$$y' = y \quad , \quad z' = z$$

- Ou seja, no ***limite não-relativístico*** as ***transformações de Lorentz*** se reduzem, aproximadamente, às ***transformações de Galileu***!

LEI DA ADIÇÃO DAS VELOCIDADES



- Vamos fazer a nossa primeira ***aplicação*** das Transformações de Lorentz.
- Suponha que um corpo tem uma certa **velocidade** $\vec{V}$, como medido ***no referencial*** S. Qual é a velocidade desse mesmo corpo, segundo ela é medida ***no referencial*** S'?
- Note que a velocidade desse corpo medida no referencial S' é simplesmente $\vec{V}' = d\vec{x}'/dt'$, então basta encontrar $d\vec{x}'$ e dt' usando as transformações de Lorentz.

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\operatorname{senh}\theta & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh}\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

- Para isso vamos usar as transformações de Lorentz em termos das ***distâncias infinitesimais*** — como mostrado ao lado, usando a notação tipo "rotação". Temos então (de modo similar ao que usamos na derivação das transformações de Lorentz):

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx\cosh\theta - c\,dt\operatorname{senh}\theta)}{\frac{\gamma}{c}\left(-dx\operatorname{senh}\theta + c\,dt\cosh\theta\right)}$$

$$= c\,\frac{\frac{dx}{dt}\cosh\theta - c\operatorname{senh}\theta}{-\frac{dx}{dt}\operatorname{senh}\theta + c\cosh\theta} = c\,\frac{V_x - c\tanh\theta}{-V_x\tanh\theta + c} = c\,\frac{V_x - c\beta}{-V_x\beta + c}$$

onde lembre-se que $\tanh\theta = \beta = v/c$. Assim, chegamos que:

$$V'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{V_x - v}{1 - V_x v/c^2}$$

- A expressão para as componentes da velocidade nas direções ortogonais (y, z) é simples de derivar, resultando em:

$$V'_{y,z} = \frac{V_{y,z}}{\gamma\,(1 - V_x v/c^2)}$$

Exercício: verifique que, se um objeto tem uma velocidade **menor que a da luz** num referencial S, ele terá uma velocidade menor do que a da luz **em qualquer referencial**!

EVENTOS

- A Transformações de Lorentz relacionam as coordenadas de ***eventos*** — as ***posições no espaço e no tempo*** que correspondem a algo que acontece naquele lugar, naquele instante.

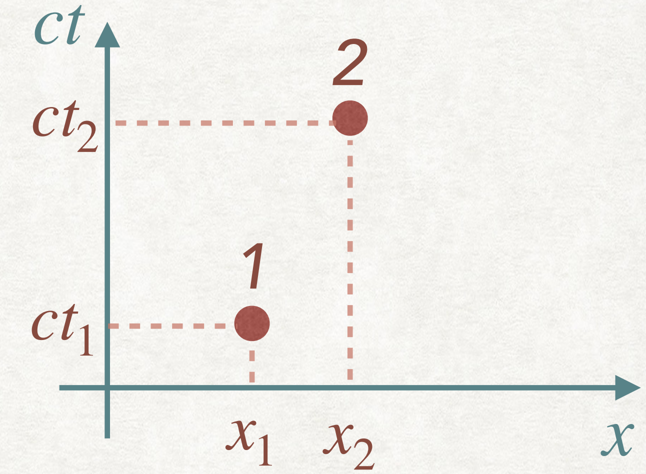
- Os eventos mais simples ocorrem num único lugar do espaço, e num momento preciso — por exemplo, a explosão de uma bomba. É corriqueiro denotar esses eventos em termos de ***diagramas de espaço-tempo***.

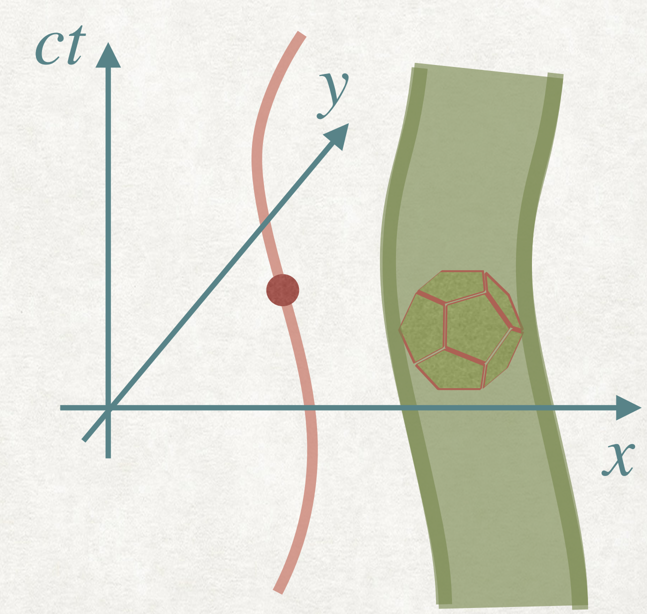
- Uma ***partícula pontual*** que executa um ***movimento*** está em um lugar a cada instante, continuamente traçando uma "***linha de mundo***".

- Um ***objeto,*** ao se mover, traça uma ***superfície*** ou um ***volume em 3+1 dimensões***

- As perguntas que podemos responder usando as transformações de Lorentz:
  - Qual é a ***distância*** (espacial) entre ***dois eventos***?
  - Qual é o ***intervalo de tempo*** (distância temporal) entre dois eventos?
  - Qual é o ***comprimento*** de um objeto?
  - …

Note: ct , que, assim como x, tem <u>unidades de distância</u>





EVENTOS

- Vamos começar com um par de eventos simples, separados por uma distância L, mas que são ***simultâneos*** no referencial S . Ou seja, $t_1 = t_2$, e $x_2 - x_1 = L$.

- Mas... ***e no referencial*** S'? Qual a ***distância*** entre esses eventos, e será que eles são ***simultâneos***?

- Lembre-se que, desde a discussão do Princípio da Relatividade, já sabemos que a ***noção de simultaneidade não é absoluta***, portanto não seria nenhuma grande surpresa se descobrirmos que, num referencial que se move com relação a S, esse mesmo par de eventos não ocorre no mesmo instante. Vejamos:

$$ct'_1 = \gamma(\cancel{ct_1} - \beta x_1)$$

$$ct'_2 = \gamma(\cancel{ct_2} - \beta x_2)$$

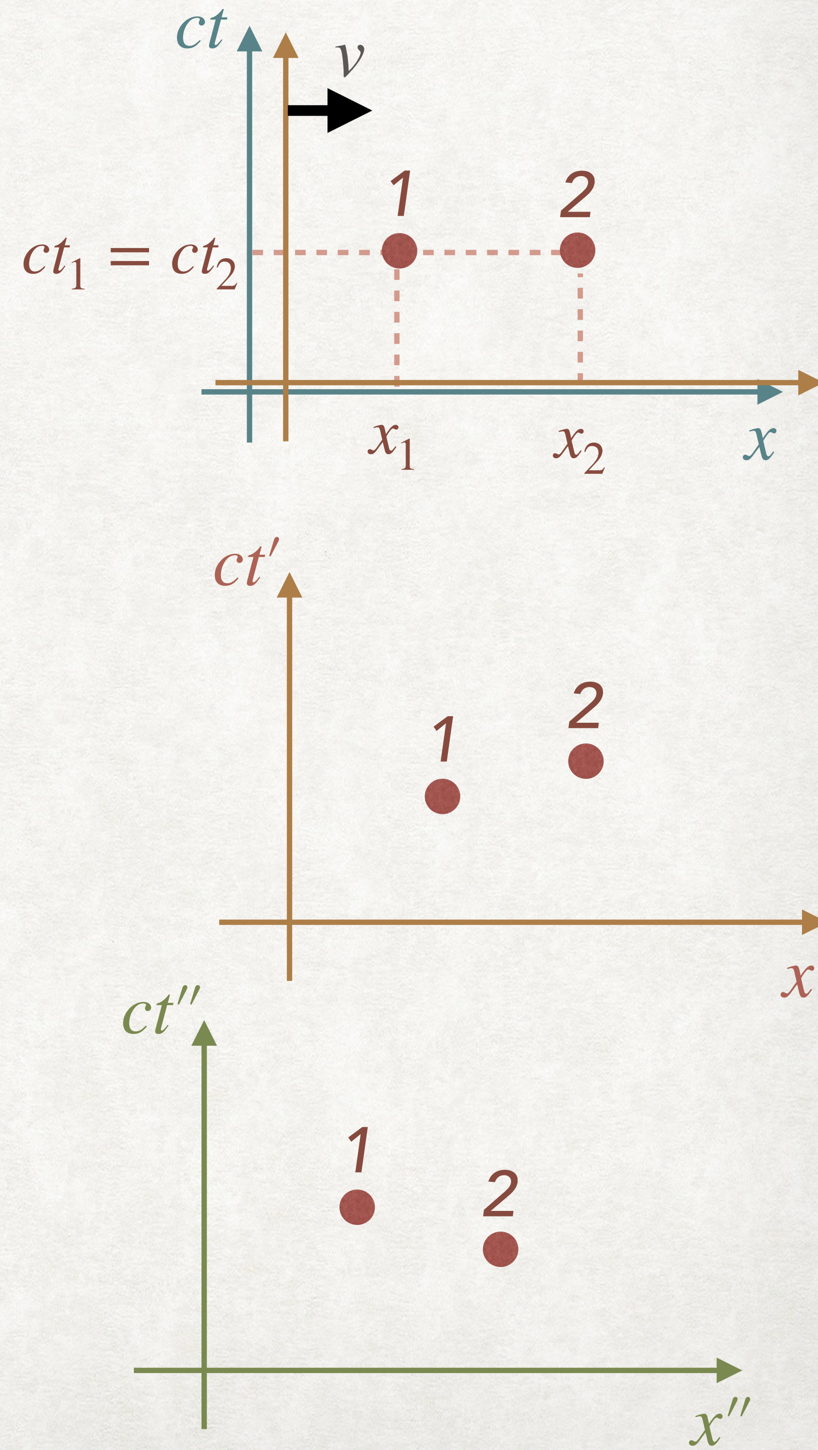
- Subtraindo os dois, usando que $t_1 = t_2$ e que $x_2 - x_1 = L$, obtemos que:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \frac{v}{c^2} L$$

[Note: se $v/c \ll 1$ temos o resultado não-relativístico, $t'_2 \simeq t'_1$!]

- Ou seja, no referencial S' os dois eventos ***não são simultâneos*** — o ***evento 2 ocorre depois do evento 1!***

- De fato, se ***trocarmos o sinal da velocidade***, seria o ***contrário***: nesse caso, o observador em movimento com relação a S (agora para a esquerda, S'') verá o ***evento 1 ocorrendo depois do evento 2!***



EVENTOS

- Agora vamos pegar dois eventos que, medido no referencial S, ocorrem no ***mesmo lugar***, mas em ***instantes diferentes***, ou seja, $x_1 = x_2$, e $t_2 - t_1 = T$.

- No referencial S', basta aplicar novamente as transformações de Lorentz. Temos então:

$$x_1' = \gamma(\cancel{x_1} - \beta c t_1)$$

$$x_2' = \gamma(\cancel{x_2} - \beta c t_2)$$

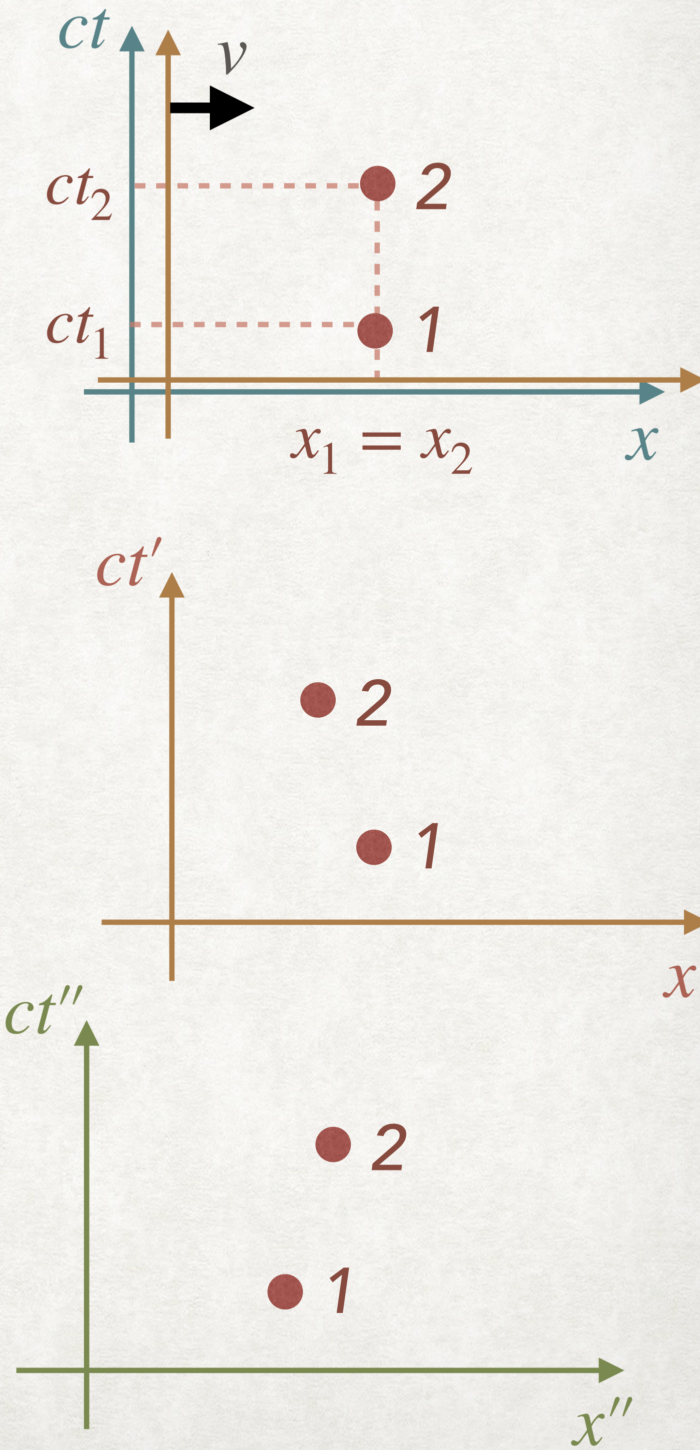
- Subtraindo os dois, usando que $x_1 = x_2$ e que $t_2 - t_1 = T$, obtemos que:

$$x_2' - x_1' = -\gamma \beta \, c \, T = -\gamma \, v \, T$$

- Bom… é claro! O evento 2 ocorre mais tarde, quando a origem daquele referencial já se deslocou mais para a direita…

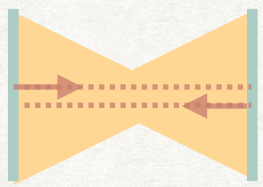
- E, de novo, se ***trocarmos o sinal da velocidade***, seria o ***contrário***: nesse caso, o observador em movimento com relação a S (agora para a esquerda) verá o ***evento 1 ocorrendo para a "esquerda" do evento 2.***

- Mas note: isso ***também acontece usando transformações de Galileu***, então não há nenhuma novidade! (Para verificar, tome o limite $|\beta| \ll 1, \gamma \simeq 1$.)



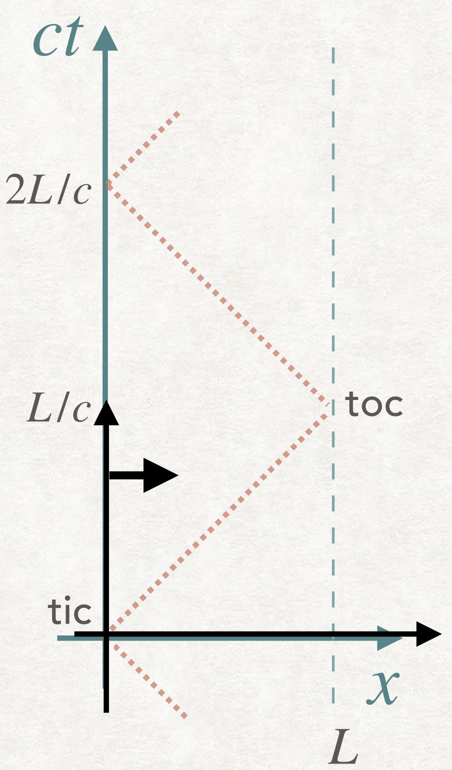
DILATAÇÃO DO TEMPO

- Vamos considerar uma "***ampulheta de luz***", que nada mais é do que um raio de luz que ***oscila entre dois espelhos***.



- Vamos supor que essa ampulheta está como na figura à direita, com o "tic" ocorrendo na base da ampulheta ($x = 0$), e o "toc" ocorrendo no topo (altura $x = L$), ou seja, o intervalo de tempo entre dois "tics" é de $\Delta t = 2L/c$.

- A linha de mundo desse raio de luz está indicada na figura ao lado — note que o raio de luz fica sempre limitado ao intervalo $0 \leq x \leq L$!



- Vamos agora ver como essa ampulheta é vista por um observador S', que se move para a direita com velocidade v . Suponha, como sempre, que a origem dos sistemas S e S' coincide no instante $t = t' = 0$, de modo que podemos usar as transformações de Lorentz para relacionar as coordenadas dos eventos (cada "tic" e "toc" da ampulheta).

- Considere o primeiro "tic", que no referencial S ocorre no instante $t_{tic} = 2L/c$ (e, claro, na posição $x_{tic} = 0$) . No referencial S' temos:

$$ct'_{tic} = \gamma(ct_{tic} - \beta x_{tic}) \ = \gamma c \frac{2L}{c} = 2\gamma L$$

- Ou seja, visto do referencial S' o intervalo de tempo entre dois "tics" é de:

$$\Delta t' = \gamma \, \frac{2L}{c} = \gamma \Delta t$$

- Em outras palavras, o observador S' detecta que o relógio do observador S demora um pouco mais para passar, comparado com o relógio idêntico que ele carrega consigo!

Note que o fator γ é sempre > 1!

A CONTRAÇÃO DO ESPAÇO

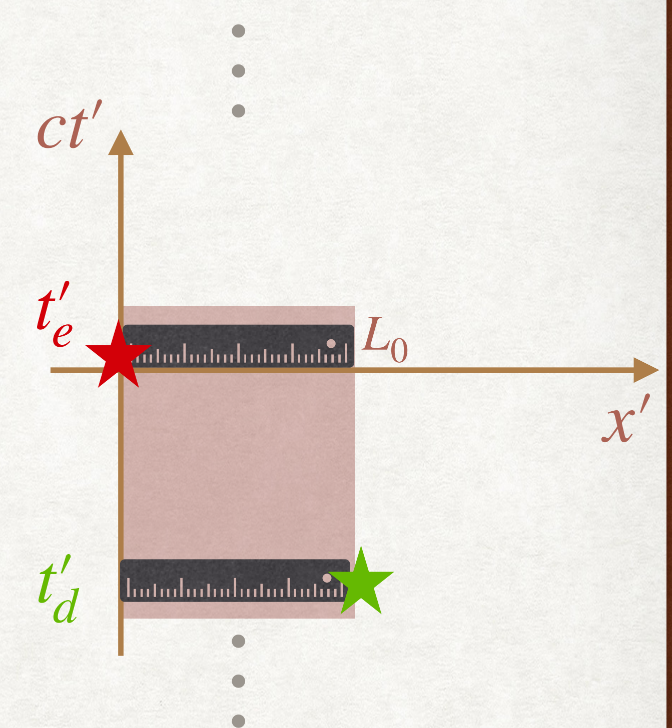
- Vamos supor que temos uma ***régua*** de comprimento L_0 no referencial S' (note: S' !). A linha de mundo dessa régua e uma "foto" dessa régua em $t' = 0$ estão indicados na figura ao lado.

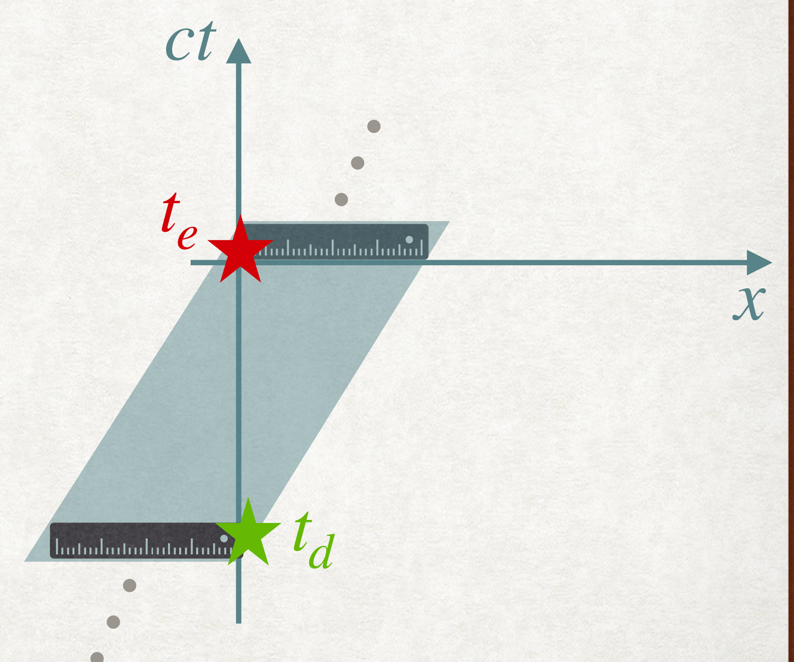
- Mas se a régua está em repouso no referencial S', então ela se move para a direita com relação ao referencial S (junto com o referencial S') — como indicado na figura abaixo.

- Queremos saber qual o comprimento dessa régua, como medido no referencial S. Para isso, vamos seguir com cuidado o movimento dessa régua, à medida que ela vai passando pela origem $(x = 0)$ do referencial S.

- As figuras ao lado indicam o evento : "***canto esquerdo*** da régua coincide com as origens dos referenciais S e S' " (★). Ou seja, $x_e = x'_e = 0$ em $t_e = t'_e = 0$.

- Se olharmos um instante ***anterior***, quando o ***canto direito*** ("*d*") da régua coincidiu com a ***origem do referencial*** S, temos o evento ★.





A CONTRAÇÃO DO ESPAÇO

- Vamos começar com o referencial S', no qual sabemos a posição do primeiro evento, ★ ($x'_d = L_0$), e também o instante em que isso ocorreu : $t'_d = -L_0/v$. Afinal, o referencial S passa para a esquerda com velocidade v, e portanto demora um tempo L_0/v para percorrer uma distância L_0 .

- Já no referencial S, sabemos ***onde*** esse evento ocorreu: na posição $x_d = 0$. Mas para saber ***quando*** esse evento ocorreu temos de usar as transformações (inversas!) de Lorentz:

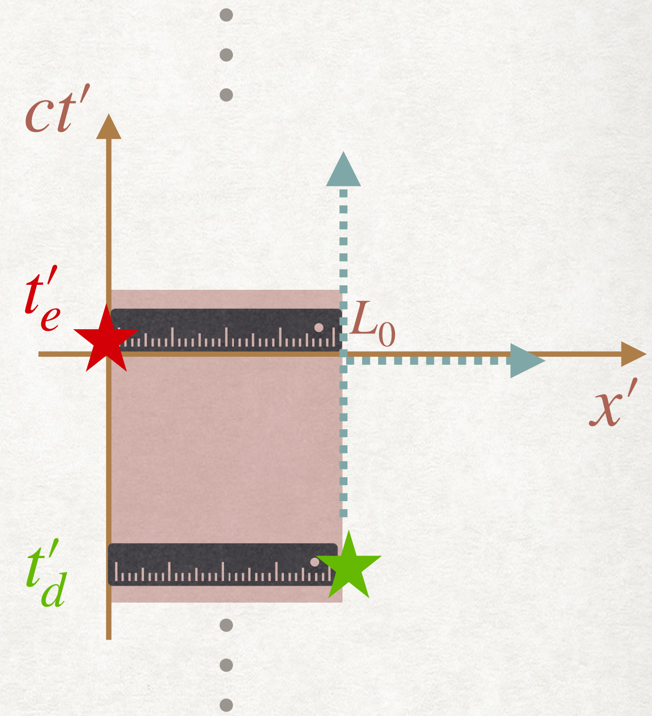
$$ct_d = \gamma(ct'_d + \beta x'_d) \ = \gamma\left(-\frac{c}{v}L_0 + \frac{v}{c}\,L_0\right)$$

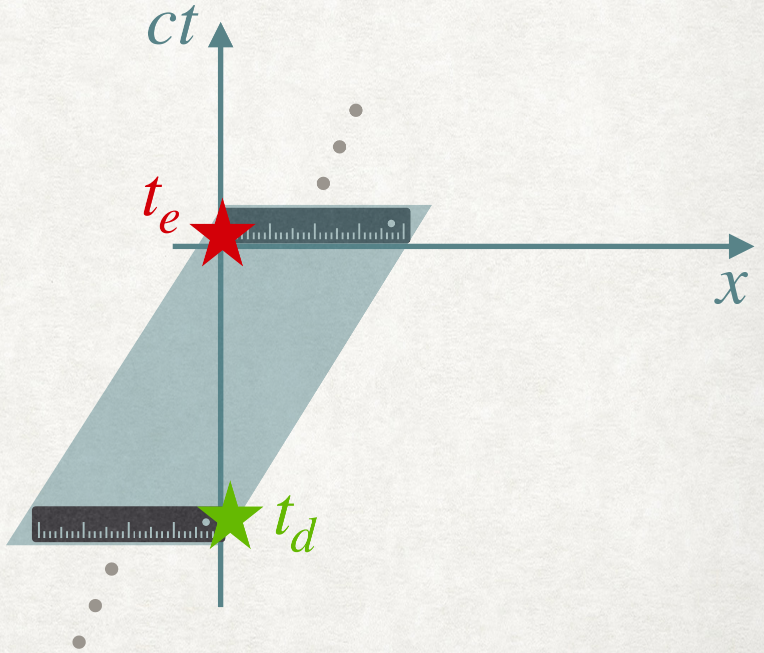
$$\Rightarrow \quad t_d = -\frac{L_0}{v}\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -\frac{L_0}{v}\frac{1}{\gamma}$$

- Compare agora essa expressão com $t'_d = -L_0/v$. Isso significa que, no referencial S, a régua demora um tempo $L_0/(\gamma v)$ para passar toda pela origem. Como a velocidade dessa régua é v, o comprimento dessa régua medido por S é contraído por um fator γ :

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

- Vocês podem também deduzir esse mesmo resultado de outras maneiras!





EM RESUMO:

- O ***Princípio da Relatividade*** nos diz que a ***velocidade da luz*** é a única ***quantidade absoluta***: qualquer referencial mede a velocidade de um raio de luz como sendo c.
- Isso leva diretamente às ***Transformações de Lorentz***, que relacionam ***coordenadas*** de ***eventos*** em quaisquer referenciais (inerciais!)
- Essas transformações nos dizem que as ***noções de tempo e espaço não são absolutas***: distâncias e intervalos de tempo entre eventos ***dependem do estado de movimento do observador*** com respeito a esses eventos.
- A própria ***noção de ordem temporal*** fica flexibilizada: eventos simultâneos num referencial não o são em um outro referencial.
- Em particular, pode ser que, num referencial um ***evento A ocorre antes de um evento B***, enquanto que num outro referencial o ***evento B ocorre antes do A***.
- Mas… ***como assim?*** A ***ordem temporal*** está ligada à ***causalidade!!*** Digamos que o evento ***A*** corresponde a eu ***apertar um botão***, e o evento ***B corresponde a uma bomba explodir e eu morrer*** na explosão. Certamente ***não pode ser possível*** que num outro referencial eu ***morra na explosão antes de apertar o botão da bomba***, certo?!
- ***CERTO!!!*** Veremos na próxima aula como a ***causalidade*** está totalmente contemplada na Relatividade Restrita, de uma maneira extremamente elegante.