



EACH

Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

Cálculo II: Derivadas Parciais – parte 2

ACH 4553 Cálculo II - Marketing
Prof. Andrea Lucchesi

Agenda

1. Recapitulando: definição de derivadas parciais – funções de 2 variáveis
2. Técnicas de derivação – derivadas parciais
3. Exercício Aplicado

1. Recapitulando: definição derivadas parciais – função de 2 variáveis

- Seja $z = f(x,y)$ uma função de 2 variáveis.
- A derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a x , mantendo y constante, é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \mid y \text{ constante} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}\end{aligned}$$

Indica a variação de $f(x,y)$ como resposta a variações infinitesimais em x , mantendo y constante.

Notação de derivada de função de 2 variáveis:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x$$

Derivada parcial em relação a x , mantendo y constante.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y$$

Derivada parcial em relação a y , mantendo x constante.

1. Recapitulando: definição derivadas parciais – função de 2 variáveis (continuação)

- Da mesma forma, a derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a y , mantendo x constante, é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \mid x \text{ constante} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}\end{aligned}$$

Indica a variação de $f(x,y)$ como resposta a variações infinitesimais em y , mantendo x constante.

Agenda

1. Recapitulando: definição de derivadas parciais – funções de 2 variáveis
2. Técnicas de derivação – derivadas parciais
3. Exercício Aplicado

Referência:

Cap 10: págs 243 a 245 (seções 10.1 a 10.3)

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

2. Técnicas de derivação – derivada parcial

- As regras de derivação para funções de uma variável também são válidas para funções de duas variáveis, desde que:
 - no cálculo da derivada parcial em relação a x (f_x), y seja mantido constante;
 - no cálculo da derivada parcial em relação a y (f_y), x seja mantido constante.

Exemplo 3:

Dada a função $f(x,y) = 3x^2 + y^3$, calcule as derivadas parciais em relação a x e y .

- Derivada parcial em relação a x :

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x + 0 = 6x \quad (y \text{ está mantido constante})$$

- Derivada parcial em relação a y :

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 + 3y^2 = 3y^2 \quad (x \text{ está mantido constante})$$

2. Técnicas de derivação – derivada parcial (continuação)

Exemplo 4:

Dada a função $f(x,y) = x^2y$

$$f(x) = 3x^2 = 3 \cdot 2 \cdot x = 6x$$

$$f(x,y) = yx^2 = y \cdot 2 \cdot x = 2xy$$

- Derivada parcial em relação a x:

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad (y \text{ está mantido constante})$$

- Derivada parcial em relação a y:

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \cdot 1 = x^2 \quad (x \text{ está mantido constante})$$

2. Técnicas de derivação – derivada parcial *(continuação)*

Exemplo 5:

Dada a função $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 - 3y^3 + 4$

- Derivada parcial em relação a x:

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + 2 \cdot 1 \cdot y^2 + 0 + 0 = 2x + 2y^2 \quad (y \text{ está mantido constante})$$

- Derivada parcial em relação a y:

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 + 2x \cdot 2y - 3 \cdot 3y^2 + 0 = 4xy - 9y^2 \quad (x \text{ está mantido constante})$$

2. Técnicas de derivação – derivada parcial (continuação)

Exemplo 6:

Dada a função $f(x,y) = (x^2 + xy^2 - 3y)^5$ (usar a regra da cadeia)

- Derivada parcial em relação a x:

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 5(x^2 + xy^2 - 3y)^4 \cdot (2x + 1 \cdot y^2 - 0) = 5(x^2 + xy^2 - 3y)^4 (2x + y^2)$$

(y está mantido constante)

- Derivada parcial em relação a y:

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 5(x^2 + xy^2 - 3y)^4 \cdot (0 + x \cdot 2y - 3) = 5(x^2 + xy^2 - 3y)^4 (2xy - 3)$$

(x está mantido constante)

2. Técnicas de derivação – derivada parcial (continuação)

Exemplo 7:

Dada a função $f(x,y) = 2x^3 + 2x^2y - 3y^3 + \frac{2y}{3x}$ reescrevendo: $f(x,y) = 2x^3 + 2x^2y - 3y^3 + \frac{2yx^{-1}}{3}$

- Derivada parcial em relação a x:

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y - 0 + \frac{2y \cdot (-1) \cdot x^{-2}}{3} = \\&= 6x^2 + 4xy - \frac{2yx^{-2}}{3} \quad (y \text{ está mantido constante})\end{aligned}$$

- Derivada parcial em relação a y:

$$\begin{aligned}f_y &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 + 2x^2 \cdot 1 - 3 \cdot 3y^2 + \frac{2 \cdot 1 \cdot x^{-1}}{3} \\&= 2x^2 - 9y^2 + \frac{2}{3x} \quad (x \text{ está mantido constante})\end{aligned}$$

Agenda

1. Recapitulando: definição de derivadas parciais – funções de 2 variáveis
2. Técnicas de derivação – derivadas parciais
3. Exercício Aplicado

Referência:

Cap 10: págs 243 a 245 (seções 10.1 a 10.3)

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

3. Exercício Aplicado

Seja a função custo $C(x,y) = 100 + 2x^2 + 3y^2$. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial C(1,2)}{\partial x}$ e $\frac{\partial C(1,2)}{\partial y}$ e interprete os resultados.

- Derivada parcial em relação a x:

$$f_x = \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = 0 + 4x + 0 = 4x \quad (y \text{ está mantido constante})$$

No ponto (1,2): $\frac{\partial C(1,2)}{\partial x} = 4.1 = 4$

3. Exercício Aplicado *(continuação)*

Seja a função custo $C(x,y) = 100 + 2x^2 + 3y^2$. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial C(1,2)}{\partial x}$ e $\frac{\partial C(1,2)}{\partial y}$ e interprete os resultados.

- Derivada parcial em relação a y:

$$f_y = \frac{\partial C(x,y)}{\partial y} = 0 + 0 + 6y = 6y \quad (x \text{ está mantido constante})$$

No ponto (1,2): $\frac{\partial C(1,2)}{\partial y} = 6 \cdot 2 = 12$

3. Exercício Aplicado *(continuação)*

Seja a função custo $C(x,y) = 100 + 2x^2 + 3y^2$. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial C(1,2)}{\partial x}$ e $\frac{\partial C(1,2)}{\partial y}$ e interprete os resultados.

Interpretação: derivada parcial em relação a x

$$\frac{\partial C(1,2)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4 = 4 \cong \frac{\Delta C}{\Delta x} \mid y \text{ constante}$$

- Supondo $\Delta x = 0,1$:

$$4 \cong \frac{\Delta C}{0,1}$$

$$4 \cdot 0,1 \cong \Delta C$$

$$\Delta C \cong 0,4$$

Derivada parcial em relação a x = dada uma variação de 0,1 em x, z aumenta 0,4, mantendo y constante.

3. Exercício Aplicado *(continuação)*

Seja a função custo $C(x,y) = 100 + 2x^2 + 3y^2$. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial C(1,2)}{\partial x}$ e $\frac{\partial C(1,2)}{\partial y}$ e interprete os resultados.

Interpretação: derivada parcial em relação a y

$$\frac{\partial C(1,2)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 12 = 12 \cong \frac{\Delta C}{\Delta y} \mid x \text{ constante}$$

- Supondo $\Delta y = 0,1$:

$$12 \cong \frac{\Delta C}{0,1}$$

$$12 \cdot 0,1 \cong \Delta C$$

$$\Delta C \cong 1,2$$

Derivada parcial em relação a y = dada uma variação de 0,1 em y, z aumenta 1,2, mantendo x constante.

3. Exercício Aplicado (continuação)

Seja a função custo $C(x,y) = 100 + 2x^2 + 3y^2$. Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial C(1,2)}{\partial x}$ e $\frac{\partial C(1,2)}{\partial y}$ e interprete os resultados.

Verificação: $C(1,2) = 100 + 2 + 12 = 114$

Variação no custo ΔC ou Δz com $\Delta x = 0,1$ e y constante:

$$C(1,1; 2) = 100 + 2(1,1)^2 + 3(2)^2 = 114,42$$

$$\Delta C = C(1,1; 2) - C(1,2) = 114,42 - 114 = 0,42$$

Variação no custo ΔC (ou Δz) com $\Delta y = 0,1$ e x constante:

$$C(1; 2,1) = 115,23$$

$$\Delta C = C(1; 2,1) - C(1,2) = 115,23 - 114 = 1,23$$

Anexo

Anexo: 3. Regras de derivação – derivada parcial (continuação)

Exemplo 7:

Dada a função $f(x,y) = 2x^3 + 2x^2y - 3y^3 + \frac{2y}{3x}$ reescrevendo: $f(x,y) = 2x^3 + 2x^2y - 3y^3 + \frac{2yx^{-1}}{3}$

Utilizando a **regra do quociente** para calcular a derivada parcial em relação a x do termo $\frac{2y}{3x}$

$$z(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{f_x \cdot g(x,y) - f(x,y) \cdot g_x}{[g(x,y)]^2}$$

$$= (0 \cdot 3x - 2y \cdot 3) / [3x]^2 = -6y/9x^2 = -2y/3x^2$$

Utilizando a **regra do quociente** para calcular a derivada parcial em relação a y do termo $\frac{2y}{3x}$

$$z(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{f_y \cdot g(x,y) - f(x,y) \cdot g_y}{[g(x,y)]^2}$$

$$= (2 \cdot 3x - 2y \cdot 0) / [3x]^2 = 6x/9x^2 = 2x/3x^2 = 2/3x$$