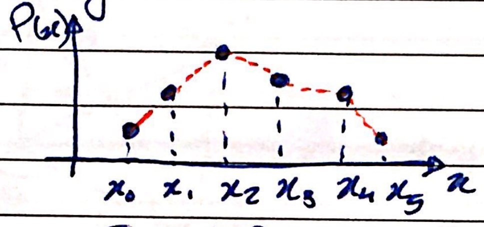
S T Q Q S S D — 21/09/20

Aula de hoje: Distribuição (continuação)

Resumo: Discreta e Contínua

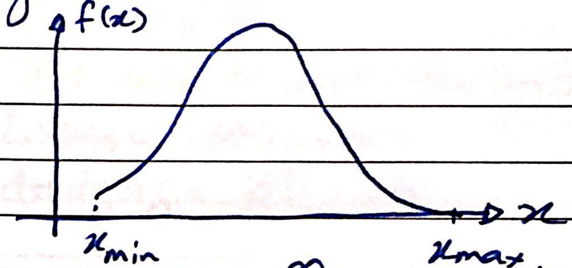
Discreta	Contínua
Tabela	Função
x $P(x)$	$dP(x) = f(x)\,dx$
Gráfico	$f(x)$ = densidade de probabilidade

Gráfico



$$\sum_i P(x_i) = 1$$

gráfico



$$\int dP = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\underline{x} = 1$$

Uma função $g(x)$ que descreve o problema. A 1ª etapa para transformar $g(x)$ numa densidade de probabilidade é fazer a normalização, ou seja, realizar a integral para achá a constante de normalização A

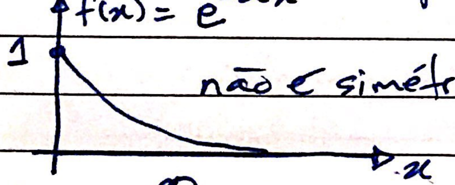
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = A$$

e depois dividir $g(x)$ por $A \Rightarrow f(x) = \dfrac{g(x)}{A}$

$$dP = f(x)\,dx \quad \text{onde} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

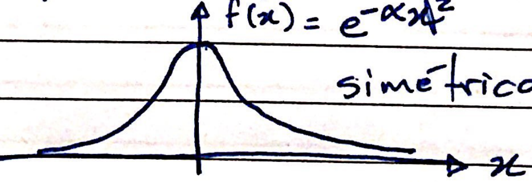
Resumo das principais funções que vamos trabalhar:

$f(x) = e^{-\alpha x}$



não é simétrica

$f(x) = e^{-\alpha x^2}$



simétrica e par
$f(x) = f(-x)$

$$A_1 = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} = \frac{1}{\alpha}\ ;\quad A_1 = \int_0^{\infty} x\,e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha^2}\ ;\quad G_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2}\,dx$$

$$\boxed{G_{2i} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2i-1)}{2^{i+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2i+1}}}} \quad \text{e} \quad \boxed{G_{2i+1} = \frac{i!}{2\alpha^{i+1}}}$$

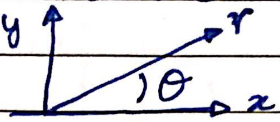
spiral

S T Q Q S S D ___/___/___

Importante não esquecer:

$dxdy = r\,dr\,d\theta$ $\Rightarrow r^2 = x^2+y^2$; $x = r\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$



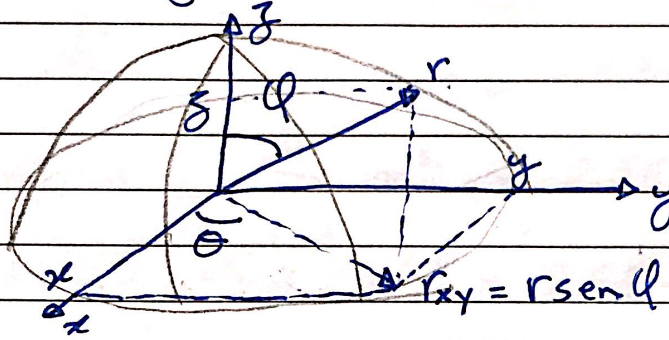
$dxdydz = r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$r^2 = x^2+y^2+z^2$

$x = r\,\text{sen}\,\varphi\,\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta$

$z = \cos\varphi$



NÃO depende explicitamente de θ e φ

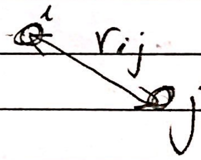
Espaço isotrópico (3D)

$dxdydz = 8\pi r^2 dr$

— // — // — // — // — // —

Exemplo onde o espaço é isotrópico: $f(x,y,z) = K\dfrac{q_i q_j}{r_{ij}^2} = K\dfrac{q_i q_j}{x_{ij}^2+y_{ij}^2+z_{ij}^2}$

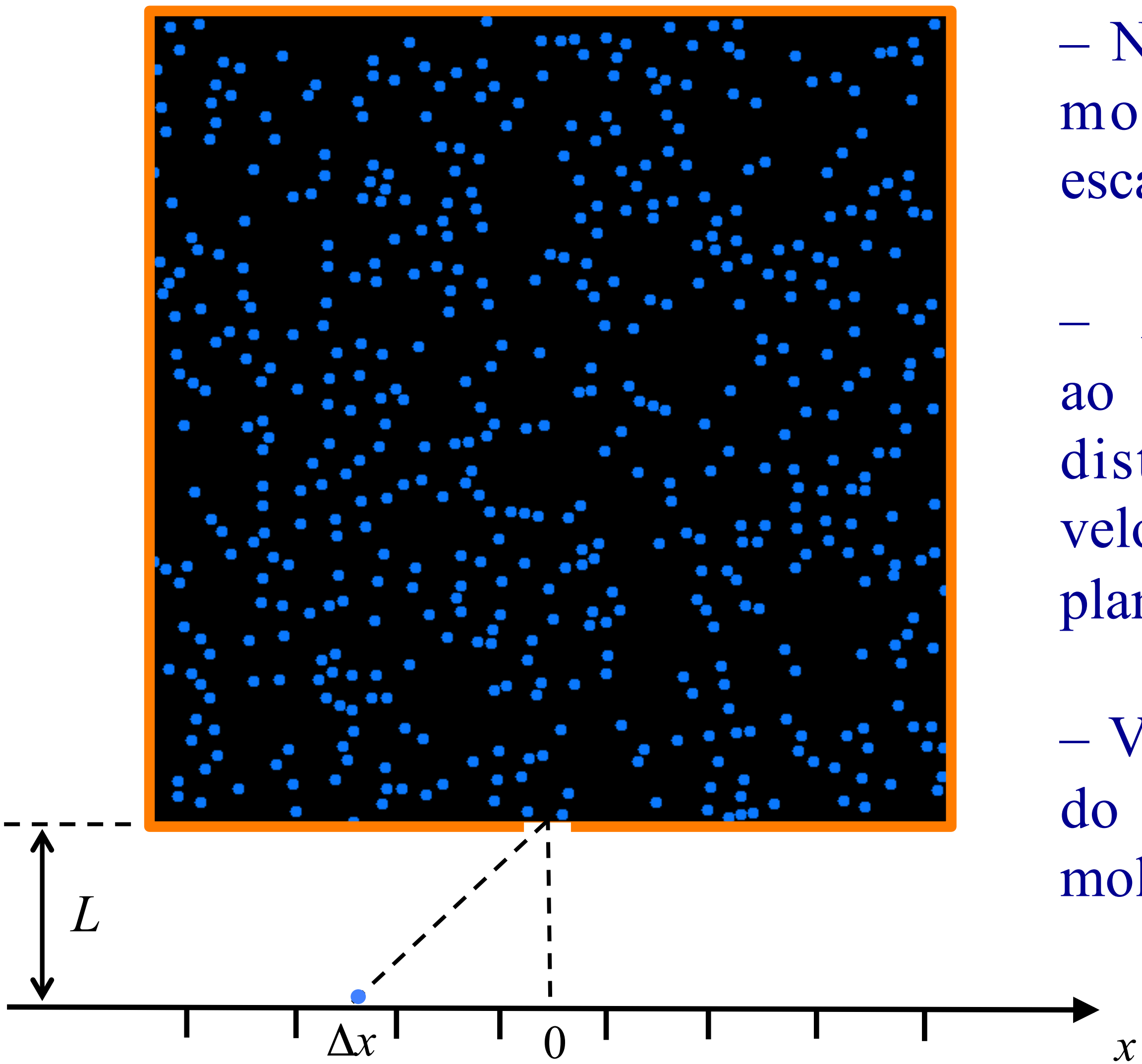
Interação coulombiana



$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint \underbrace{f(x,y,z)}_{f(r)}\,r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K q_1 q_2}{(x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz = \underbrace{\int_0^{\infty} f(r)\,r^2\,dr}\;\underbrace{\int_0^{2\pi}\text{sen}\,\theta\,d\theta\int_0^{\pi}d\varphi}_{8\pi}$$

Exemplo de função de distribuição



– No experimento indicado, as moléculas do gás podem escapar pelo pequeno orifício.

– A distribuição das posições ao longo do eixo $0x$ indica a distribuição direcional das velocidades das moléculas no plano $0xy$, pois $x/L = v_x/v_y$.

– Vamos consideras os eventos do tipo: "detecção de uma molécula em um intervalo Δx".

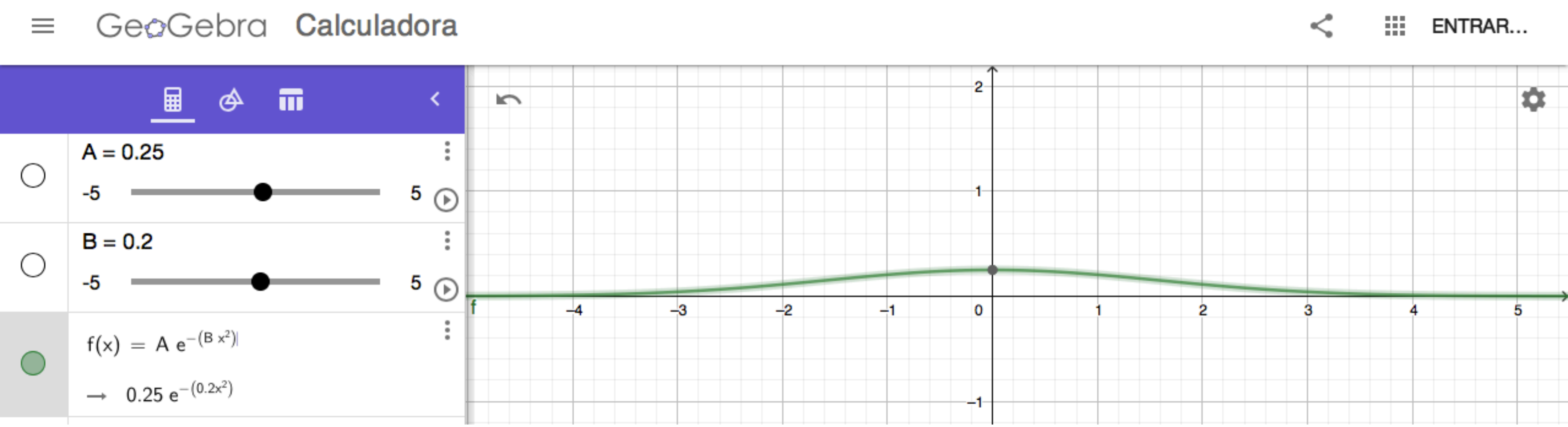
A tabela abaixo mostra o resultado obtido para a detecção de 10 partículas em um experimento. Obtenha $\langle x \rangle$, $\langle x \rangle^2$, $\langle x^2 \rangle$ e σ^2.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x(mm)	1.0	2.5	–3.0	–0.5	0.3	–1.2	0.8	1.8	–1.7	–0.9

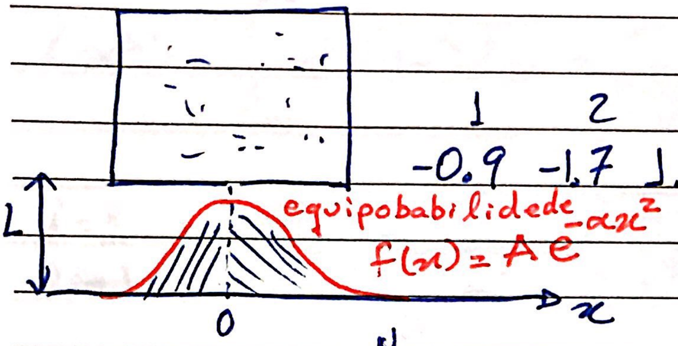
Ajuste a seguinte função de densidade de probabilidade para descrever os valores médios obtidos

$$f(x) = Ae^{-\alpha x^2}$$

Resposta: A = 0,25 mm^2 e α = 0,2 mm^{-2}



Exercício da detecção de partículas



10 medidas de x[mm]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-0.9	-1.7	1.8	1.0	2.5	-3.0	-0.5	0.3	-1.2	0.8

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = -0.09\,\text{mm} \approx 0$$

devido a interpretação conceitual

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 2.56\ \text{mm}^2$$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 2.56 - (-0.09)^2 = 2.55\ \text{mm}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1.6\ \text{mm.}$$

Se queremos que $dP = f(x)dx$ então $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx \underset{\text{par}}{=} 2\int_{0}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{0}^{\infty} Ae^{-\alpha x^2}dx = A\underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx}_{G_0 \Rightarrow G_{2i} \text{ onde } i=0} = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$2i-1 = -1$ $\qquad G_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$$\frac{A}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2}$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dP \Rightarrow \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2}dx$$

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\underbrace{x}_{\text{ímpar}}\,\underbrace{e^{-\alpha x^2}}_{\text{par}}}^{\text{ímpar}}\,dx = 0$$

S T Q Q S S D

__/__/__

$$\langle x^2\rangle = 2.56\ mm^2$$

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\underbrace{x^2}_{par}\,\underbrace{e^{-\alpha x^2}}_{par}}^{par}\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,2\underbrace{\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,dx}_{= G_2}$$

$i=1$ e $G_2 = \dfrac{1}{2^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha^3}}$

$2i-1=1$

$$\langle x^2\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,2\,G_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,\cancel{2}\,\frac{1}{2^{\cancel{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\cancel{\pi}}\,\frac{\cancel{\pi}}{\alpha^3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}}$$

$$\boxed{\langle x^2\rangle = \frac{1}{2\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{2\alpha} = 2.56 \;\therefore\; \alpha = \frac{1}{2\times 2.56} = 0,2\ mm^{-2}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} = \sqrt{\frac{0,2}{3,14}} = 0,25$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha x^2}$$

$$\boxed{f(x) = 0,25\,e^{-0,2x^2}} \qquad \boxed{dP = 0,25\,e^{-0,2x^2}\,dx}$$

Esta função é conhecida com função Normal ou Gaussiana.