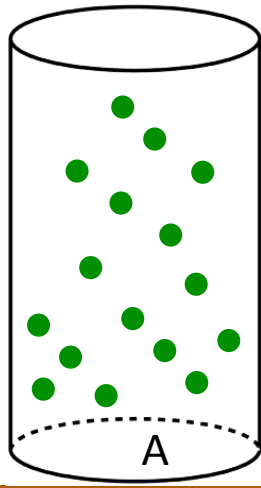
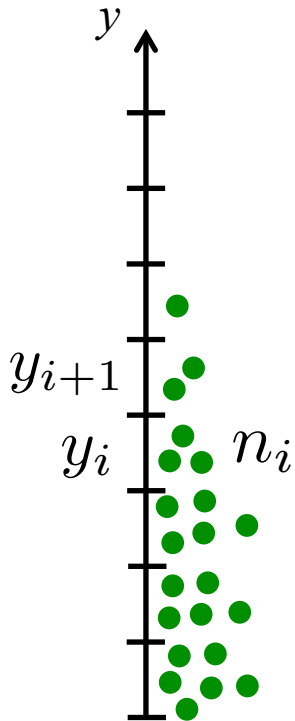


4300259 – Termo-estatística (DIURNO)

Funções de Distribuição de Probabilidade



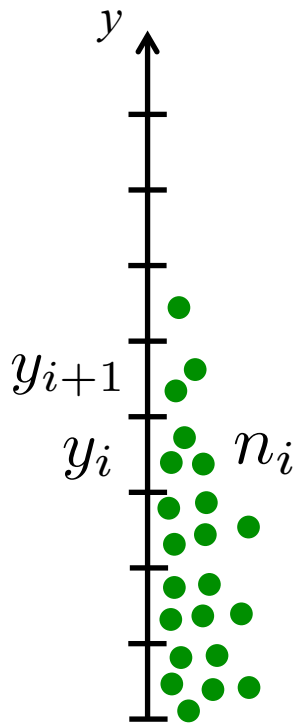
Vamos imaginar um cilindro (com área da base A) que se estenda a uma grande altura desde a superfície da Terra até o limite da atmosfera (altura = eixo y). Como a atmosfera se torna mais rarefeita, sabemos que o número de moléculas por unidade de comprimento no interior do cilindro irá diminuir em função da altura, $n(y)$.



– Vamos dividir a altura do cilindro em intervalos iguais (Δy). Assim, o meio do i -ésimo intervalo tem altura y_i entre $y - i\Delta y/2$ e $y + i\Delta y/2$. A quantidade de moléculas neste intervalo é $n_i = n(y_i)$

– Vamos definir a densidade de moléculas nesse intervalo:

$$\rho(y_i) = \frac{n_i}{\Delta y} \implies n_i = \rho(y_i) \Delta y$$



– Seja N o número total de moléculas contidas no cilindro, tal que

$$\sum_i n_i = N \implies \sum_i \rho(y_i) \Delta y = N$$

– A probabilidade (p_i) de encontrar uma molécula no i -ésimo intervalo é:

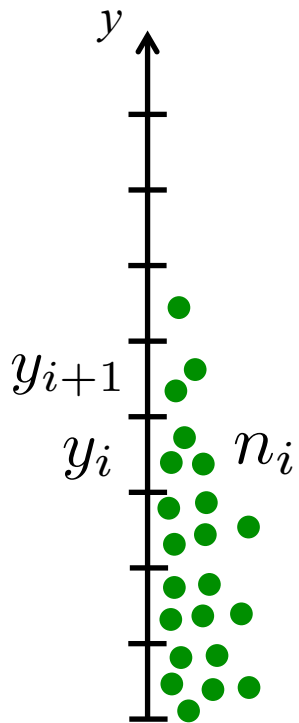
$$p_i = \frac{n_i}{N}$$

– Essa probabilidade também pode ser expressa em termos da densidade de moléculas (ρ_i):

$$p_i = \frac{n_i}{N} = \frac{\rho_i}{N} \Delta y = \left(\frac{\rho_i}{\sum_i \rho_i \Delta y} \right) \Delta y \equiv f(y) \Delta y$$

– Definimos assim a função de distribuição $f(y)$ relacionada à probabilidade de encontrar moléculas nos diferentes intervalos Δy :

$$p_i = f(y) \Delta y \implies f(y) = \frac{\rho_i}{N} = \left(\frac{\rho_i}{\sum_i \rho_i \Delta y} \right)$$



– No limite em que Δy é muito pequeno, temos que $\Delta y \rightarrow dy$, $n_i \rightarrow dn$, $p_i \rightarrow dp$ e $\Sigma_i \rightarrow \int$. Então

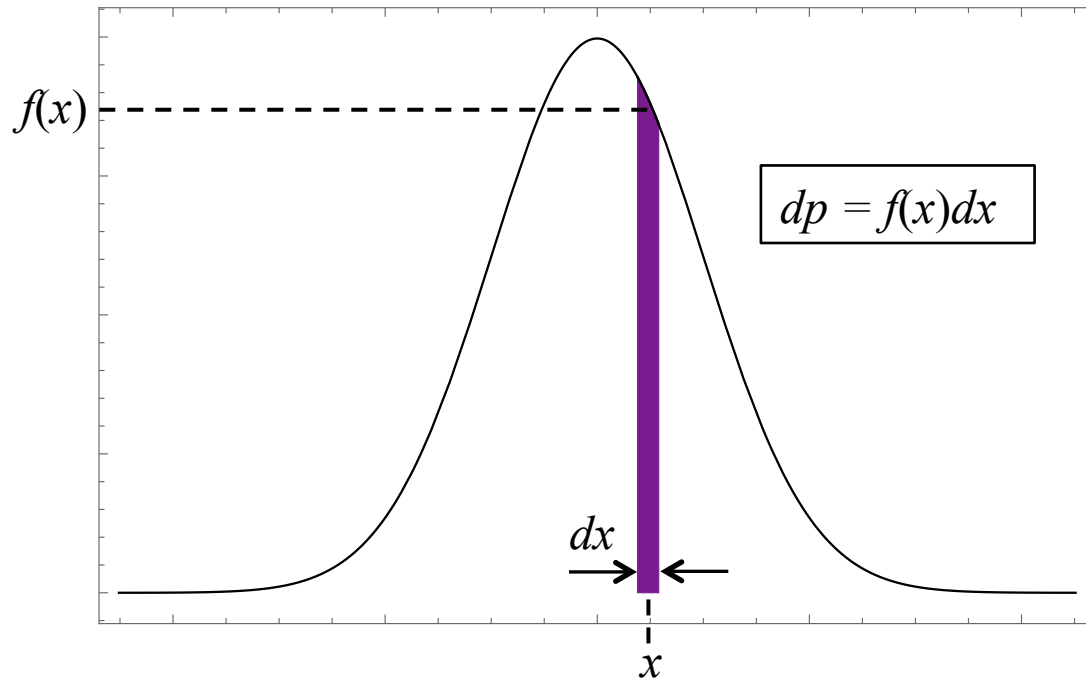
$$\int dn = N \implies \int \rho(y) dy = N$$

– A probabilidade infinitesimal (dp) de encontrar uma molécula num intervalo dy :

$$dp = \frac{dn}{N} = \frac{\rho(y)}{N} dy \equiv f(y) dy$$

– A função de distribuição $f(y)$ relacionada à probabilidade de encontrar moléculas nos diferentes intervalos dy :

$$dp = f(y) dy \implies f(y) = \frac{\rho(y)}{N} = \left(\frac{\rho(y)}{\int \rho(y) dy} \right)$$



Para uma função qualquer $\rho(x)$, sua integral representa a área ou fator de normalização:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx$$

Esta função normalizada $f(x)$ é uma distribuição de probabilidades:

$$f(x) = \rho(x)/A$$

- A função $f(x)$ é interpretada como uma *densidade de probabilidade* por unidade de comprimento.
- A probabilidade dp de encontrar uma molécula no intervalo dx em torno do ponto x é dada por:

$$dp = f(x)dx$$

- A função de densidade de probabilidade $f(x) = dp/dx$ **não** representa a probabilidade de encontrar uma molécula no ponto x (esta probabilidade é nula!).

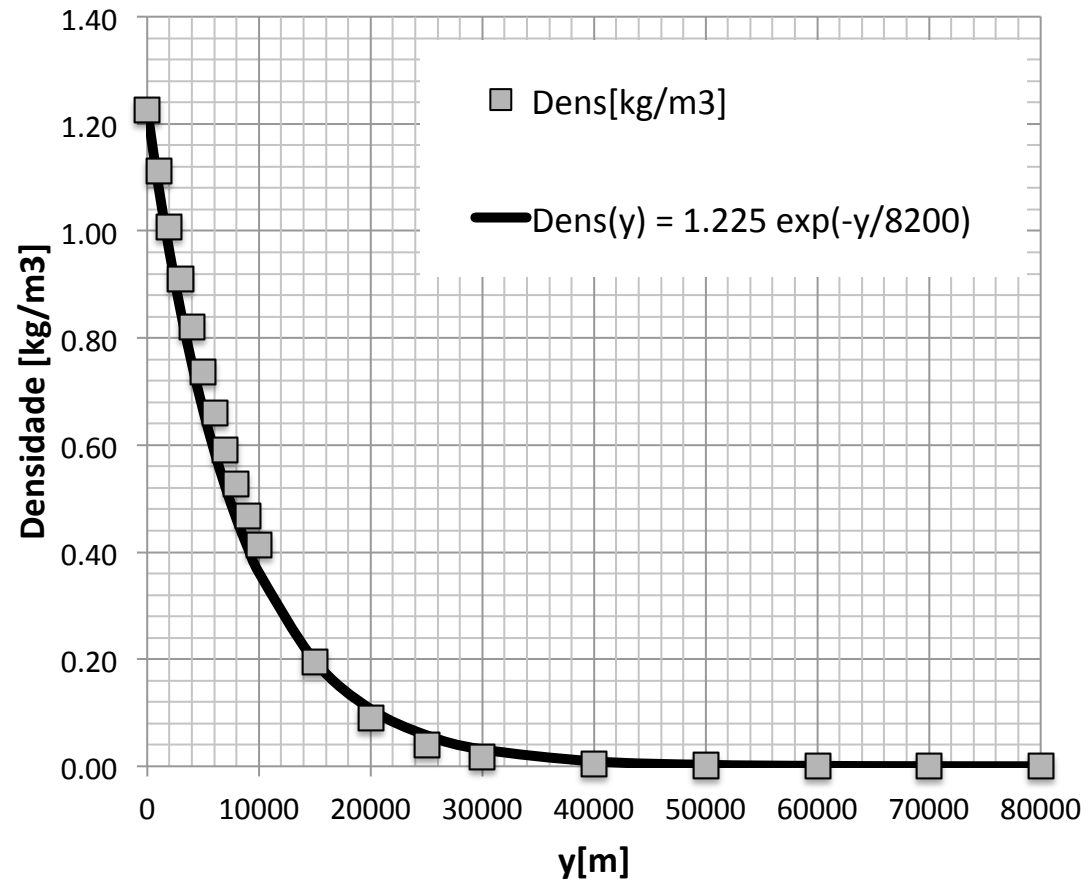
Exercício 1): A figura ao lado mostra dados experimentais da densidade da atmosfera $\rho(y)$ em kg/m^3 versus a altura em relação ao nível do mar, y em m. Os dados foram ajustados por uma função que descreve bem a densidade do ar em função da altura:

$$\rho(y) = 1,225 \exp(-y/8200).$$

Para um cilindro de área da base de 1 m^2 , e assumindo

que a massa das moléculas é de 28g/mol determine:

- a quantidade total de molécula do nível do mar até uma distância infinitamente grande (fator de normalização);
- a probabilidade de encontrar uma molécula numa intervalo dy ;
- a quantidade de moléculas no intervalo entre 0 e 3 km;
- altura média das moléculas $\langle y \rangle$.



S T Q Q S S D

$$A = 1 \text{ m}^2 \text{ e } m = 28 \text{ g/mol} = 0,028 \text{ kg/mol}$$

Exercício 1) $\rho(y) = 1,225 \exp(-y/8200)$ [kg/m³]

$$\rho(y) = \rho_0 \exp(-\alpha y) \quad \rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$$

a) $N = ?$

b) $dp = ? = f(y) dy$ $\rho_N = \frac{N}{A \cdot y}$ $\rho = \frac{Nm}{A \cdot y}$

c) $N(0 \rightarrow 3000) = ?$

d) $\langle y \rangle = ?$

$$\rho y = \frac{Nm}{A} \Rightarrow \rho dy = \frac{m}{A} dn$$

$$N = \int dn \Rightarrow N = \frac{A}{m} \int_0^\infty \rho dy \quad dn = \frac{A}{m} \rho dy$$

$$N = \frac{A}{m} \int_0^\infty \rho_0 e^{-\alpha y} dy = \frac{A \rho_0}{m} \int_0^\infty e^{-\alpha y} dy = \frac{A \rho_0}{m} \left(\frac{e^{-\alpha y}}{-\alpha} \right)_0^\infty$$

$$N = \frac{A \rho_0}{m} \left(0 + \frac{1}{\alpha} \right) \Rightarrow N = \frac{A \rho_0}{\alpha m} = \frac{1 \times 1,225}{\frac{1}{8200} \times 0,028} \left[\frac{\text{m}^2 \text{ kg m}}{\text{kg m}^3 \text{ mol}} \right]$$

$$N = \frac{1,225 \times 8200}{0,028} [\text{l/mol}] = 358750 \text{ l/mol} = 358750 \times 6,02 \times 10^{23}$$

$$N = 2,15 \times 10^{29} \text{ moléculas}$$

$$\rho_N = \frac{\rho}{m} = \frac{\rho_0}{m} e^{-\alpha y}$$

b) $N = \int_0^\infty \rho_N dy$ $dp = f(y) dy$ onde $f(y) = \frac{\rho_N}{N} = \frac{\rho_N}{\int_0^\infty \rho_N dy}$

$$f(y) = \frac{\rho_0}{Nm} e^{-\alpha y} \Rightarrow f(y) = \frac{1,225 \cdot 6,02 \times 10^{23}}{2,16 \times 10^{29} \times 0,028} e^{-(y/8200)}$$

$$f(y) = 1,22 \times 10^{-4} e^{-(y/8200)} \quad \int_0^\infty f(y) dy = 1 \text{ (teste)}$$

$$\int_0^\infty 1,22 \times 10^{-4} e^{-y/8200} dy = 1,22 \times 10^{-4} \times -8200 (e^{-y/8200})_0^\infty = 1 \quad \checkmark$$

$$dp = \frac{e^{-(y/8200)}}{8200} dy$$

$$c) N(0 \rightarrow 3000m) = \int_0^{3000} p_y dy = \frac{p_0}{m} \int_0^{y_f} e^{-\alpha y} dy$$

$$N(y_f) = \frac{p_0}{m} \left(\frac{e^{-\alpha y}}{-\alpha} \right)_0^{y_f} = \frac{p_0}{m} \left(\frac{e^{-\alpha y_f}}{-\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right)$$

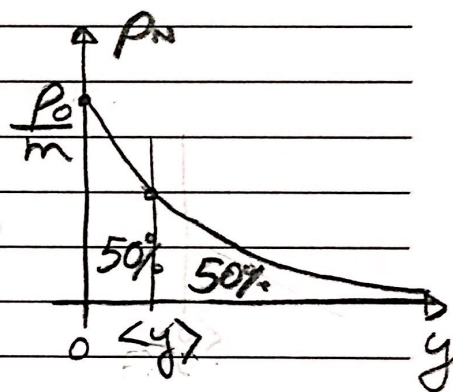
$$N(y_f=3000) = \frac{1,225 \times 6,02 \times 10^{23}}{0,028} \left(8200 - 8200 e^{-3000/8200} \right)$$

$$N(y_f=3000) = 2,16 \times 10^{29} (1 - 0,69) = 6,62 \times 10^{28} \text{ moléculas}$$

$$\boxed{N(y_f=3000) = 6,62 \times 10^{28} \text{ moléculas}}$$

$$d) \langle y \rangle = \int y dp = \int_0^{\infty} y f(y) dy$$

$$\langle y \rangle = \int_0^{\infty} y \frac{e^{-(y/8200)}}{8200} dy$$



$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} dy}$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} y^n e^{-\alpha y} dy}$$

Revisar p/
próxima aula.