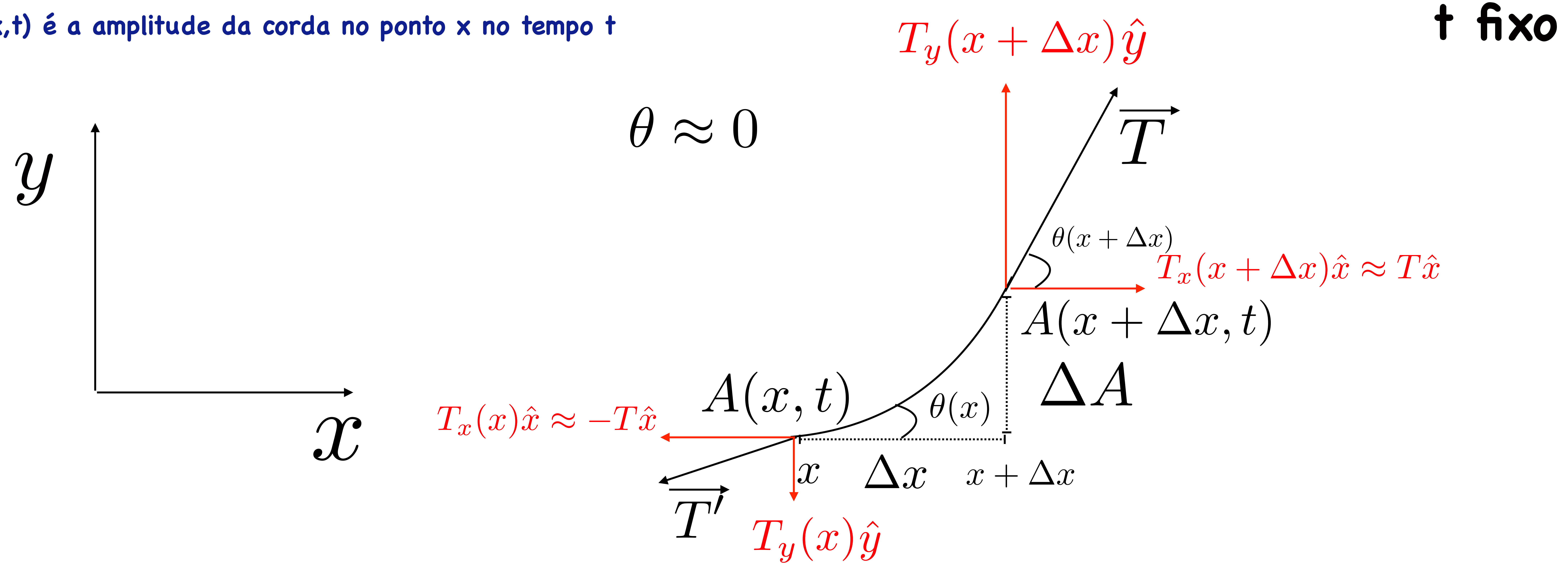
Ondas II

Física II - Módulo II - Fenômenos Ondulatórios

Ondas Transversais em uma Corda

Consideremos agora uma corda homogênea com tensão T

A(x,t) é a amplitude da corda no ponto x no tempo t



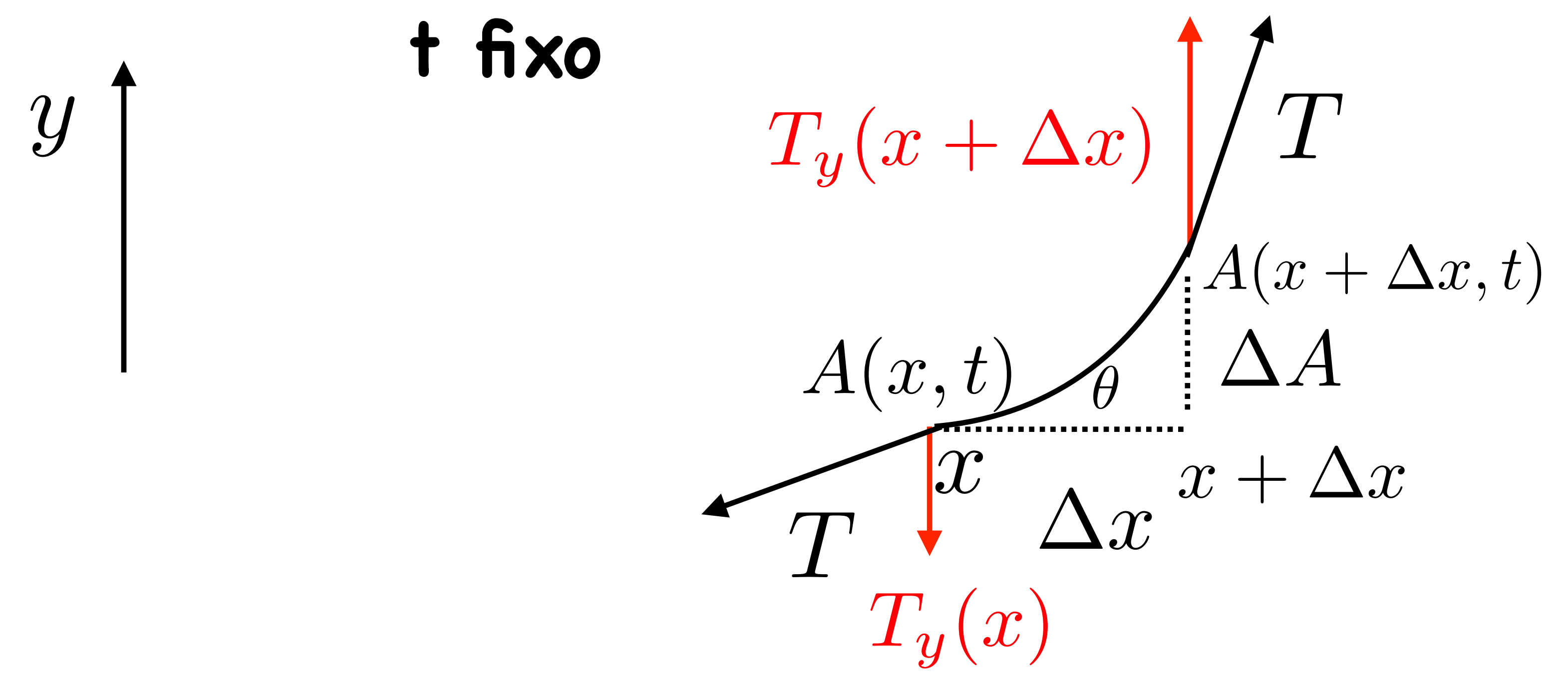
techo da corda

Ondas Transversais em uma Corda

Consideremos agora uma corda homogênea com tensão T

A(x,t) é a amplitude da corda no ponto x no tempo t

t fixo



a porção a direita da corda exerce uma tensão sobre o trecho Δx

$$T_y(x+\Delta x) \approx T_y(x) + \frac{\partial T_y(x)}{\partial x}\Delta x \qquad \Delta x \to 0$$

$$T_y = T\sin\theta \approx T\tan\theta \approx T\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} \qquad \lim_{\Delta x\to 0} T\frac{\Delta A}{\Delta x} = T\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}$$

a tensão resultante na vertical é então

$$T_y(x+\Delta x) - T_y(x) = \frac{\partial T_y(x)}{\partial x}\Delta x = T\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2}\Delta x \quad = \mu\Delta x\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2}$$

massa do techo de corda

$$\boxed{\mu}\Delta x = \Delta m$$

densidade linear de massa (uniforme)

Equação da Corda Vibrante

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(x,t) = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x,t) \qquad v^2 = \frac{T}{\mu}}$$

Solução Geral :

Depende de duas condições iniciais :

- deslocamento inicial $A(x,0)$
- velocidade inicial $\frac{\partial A}{\partial t}(x,0)$

duas funções de x que podem ser decompostas em série de Fourier

Ondas Estacionárias & Condições de Contorno

Vejamos a situação de ondas estacionárias

Vimos que soluções de freqüência fixa são da forma

$$\underset{k}{A}(x,t) = a_k \cos(\omega t)\cos(kx) + b_k \cos(\omega t)\sin(kx) + c_k \sin(\omega t)\cos(kx) + d_k \sin(\omega t)\sin(kx)$$

$\Rightarrow$ **Condições de Contorno de Dirichlet:** corda fixa na extremidade

$\Rightarrow$ **Condições de Contorno de Neumann:** corda livre na extremidade

Ondas Estacionárias & Condições de Contorno

Vejamos a situação de ondas estacionárias
Vimos que soluções de freqüência fixa são da forma

$$\underset{k}{A}(x,t) = a_k\ \cos(\omega t)\cos(kx) + b_k\ \cos(\omega t)\sin(kx) + c_k\ \sin(\omega t)\cos(kx) + d_k\ \sin(\omega t)\sin(kx)$$

■ Corda fixa nas duas extremidades

primeiro fixamos a corda em x=0, assim para qualquer seja t

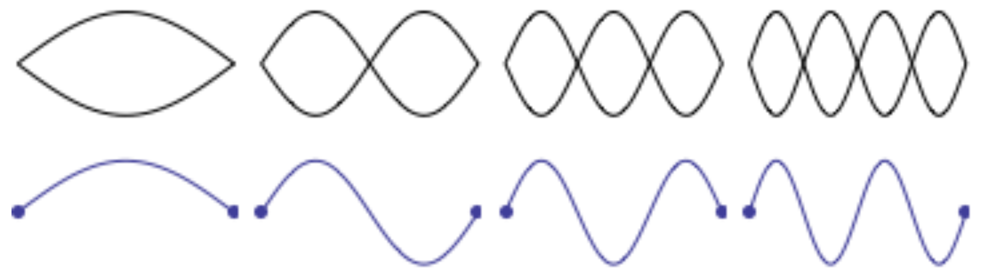
$$A(0,t) = a_k \cos\omega t + c_k \sin\omega t = 0 \qquad \rightarrow a_k = c_k = 0$$

$$A(x,t) = b_k \cos(\omega t)\sin(kx) + d_k \sin(\omega t)\sin(kx)$$

$$= B\sin(kx)(\sin(\omega t + \phi)) \quad = B\sin(kx)(\sin(\omega t)\cos(\phi) + \sin(\phi)\cos(\omega t))$$

$$b_k = B\sin(\phi) \qquad\qquad d_k = B\cos(\phi)$$

Ondas Estacionárias & Condições de Contorno



agora fixamos a corda também na outra extremidade, i.e. x=L, então

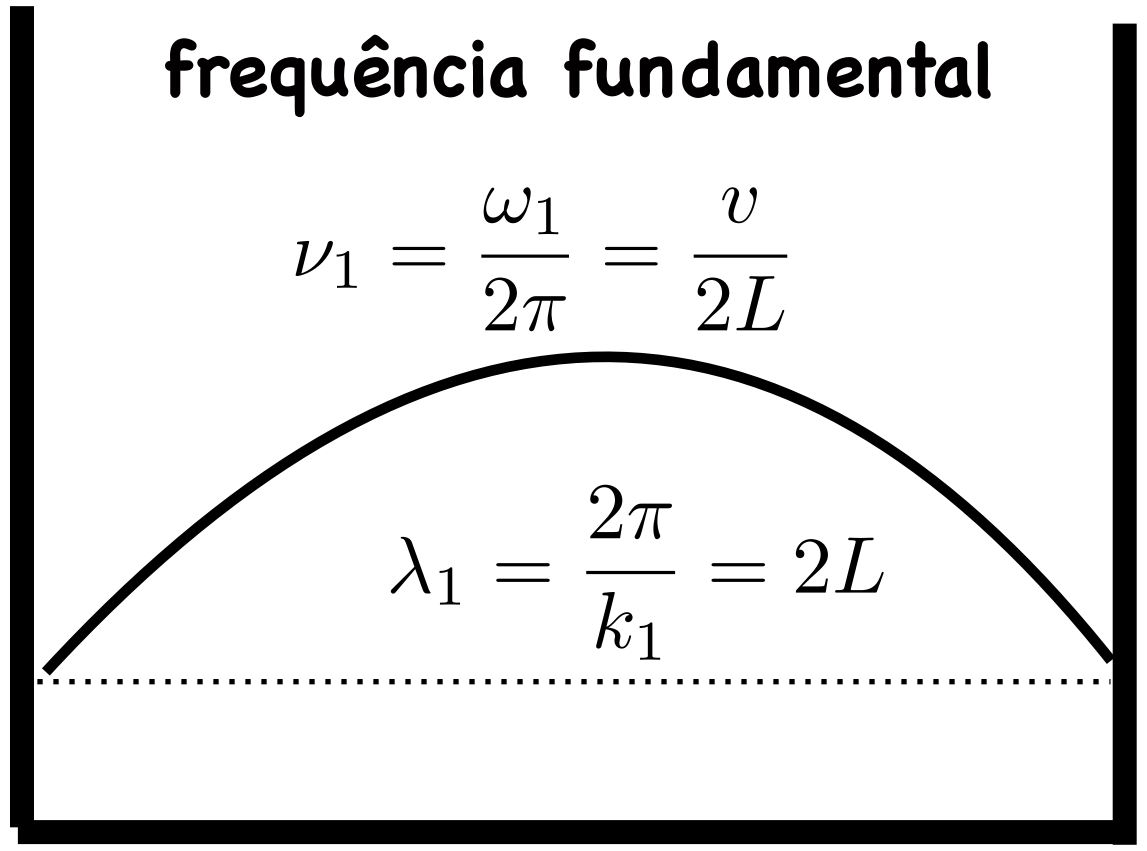
$$A(L,t) = B\sin(kL)(\sin(\omega t + \phi)) = 0 \qquad \forall t$$

$$\sin(kL) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k_n L = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{L} v}$$

modos normais de oscilação

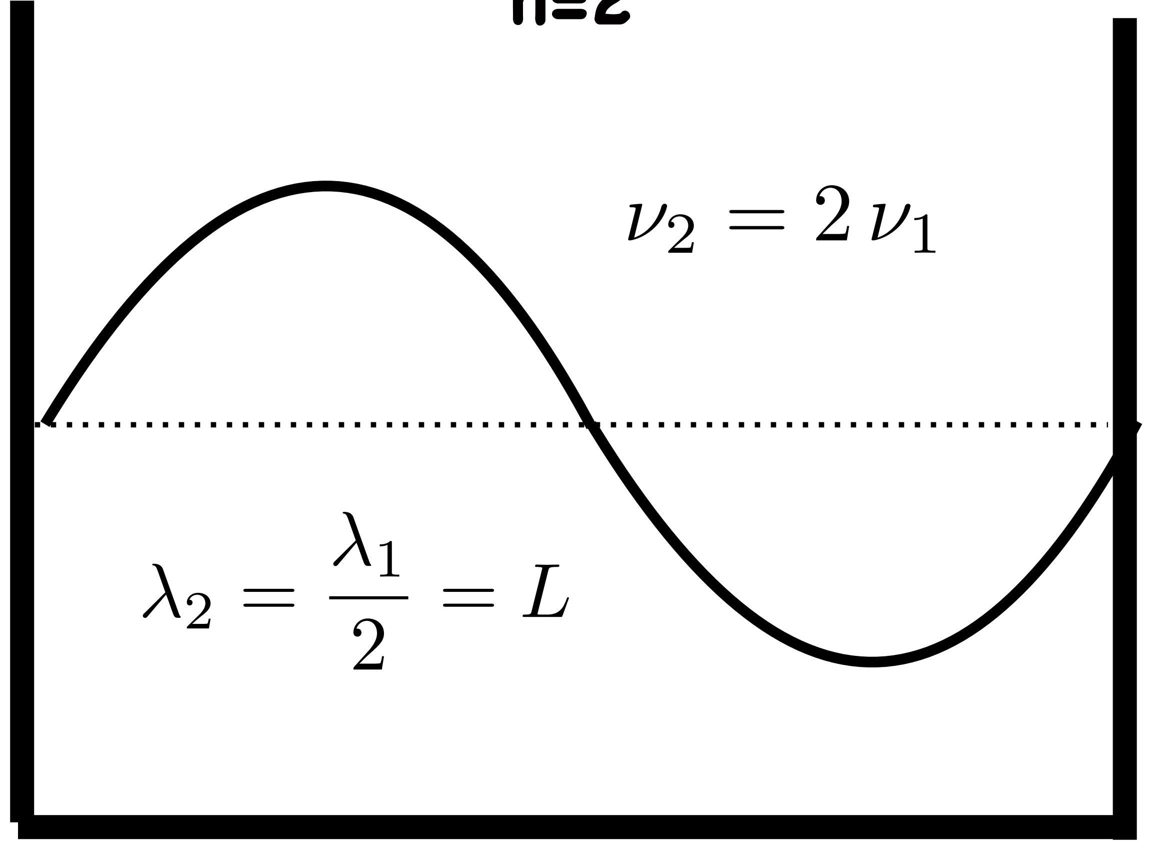
Esse é o espectro de frequência para duas condições de Dirichlet

n=1



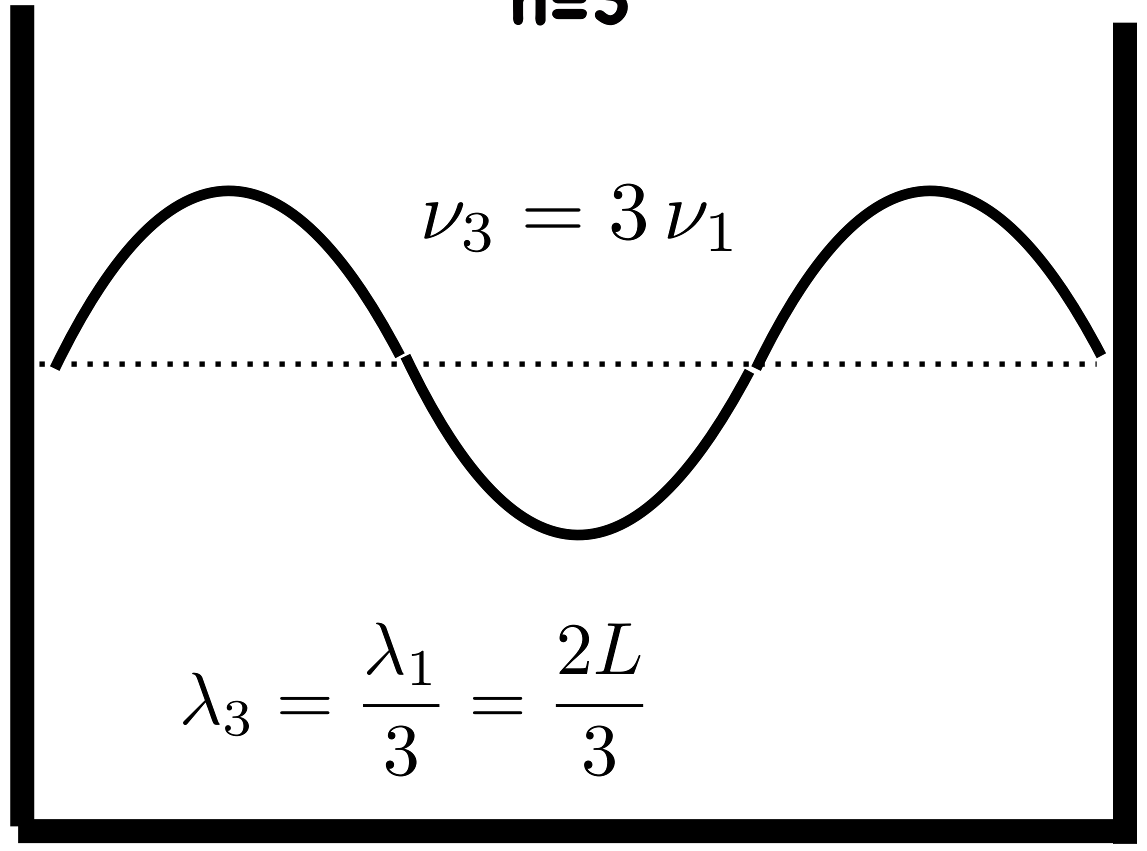
L

n=2



L

n=3



L

Ondas Estacionárias & Condições de Contorno

Ondas Estacionárias & Condições de Contorno

Corda fixa em uma das extremidades e livre na outra

modos normais de vibração

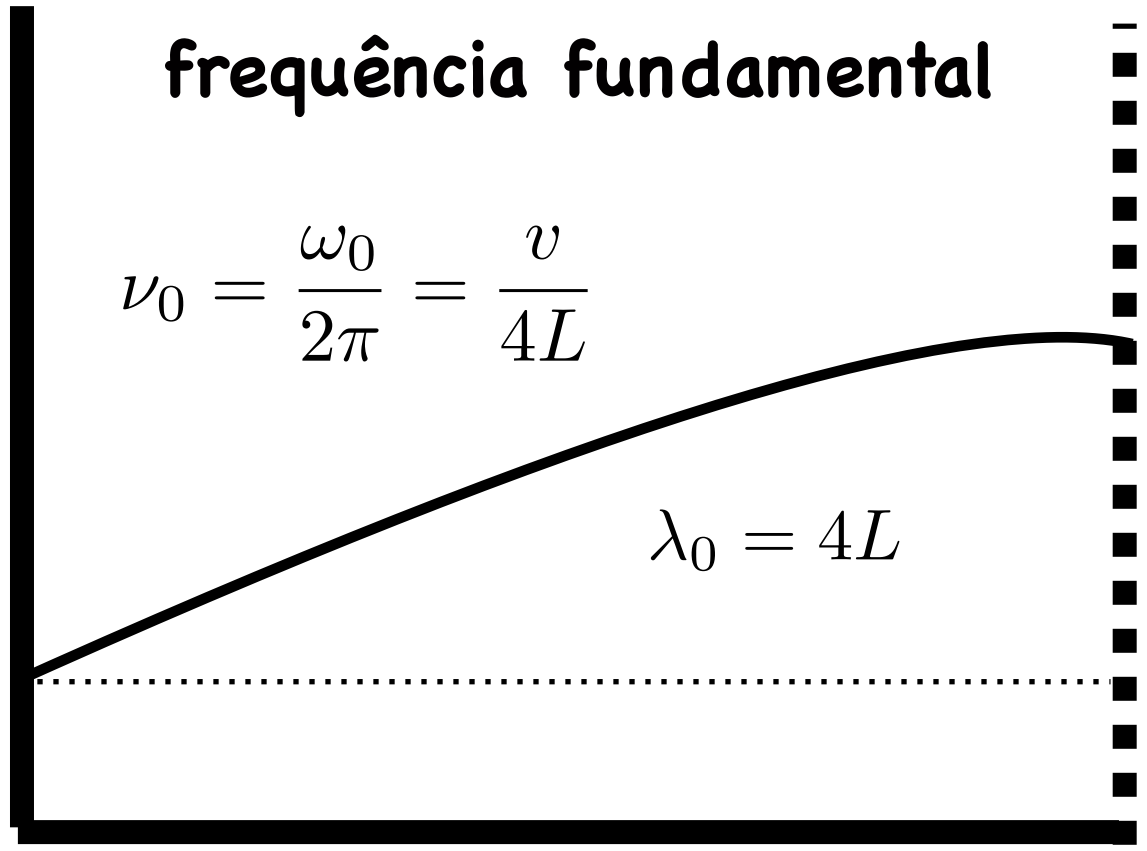
se a corda agora estiver livre na outra extremidade, i.e. x=L, então

$$\frac{\partial A(L,t)}{\partial x} = 0 \quad \forall t \quad \Longrightarrow \quad Bk\cos(kL)\sin(\omega t + \phi) = 0 \qquad \cos(kL) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_n &= \frac{(2n+1)\pi}{2L} \qquad n = 0, 1, 2.. \\ \omega_n &= k_n v = \frac{(2n+1)\pi}{2L} v \end{aligned}}$$

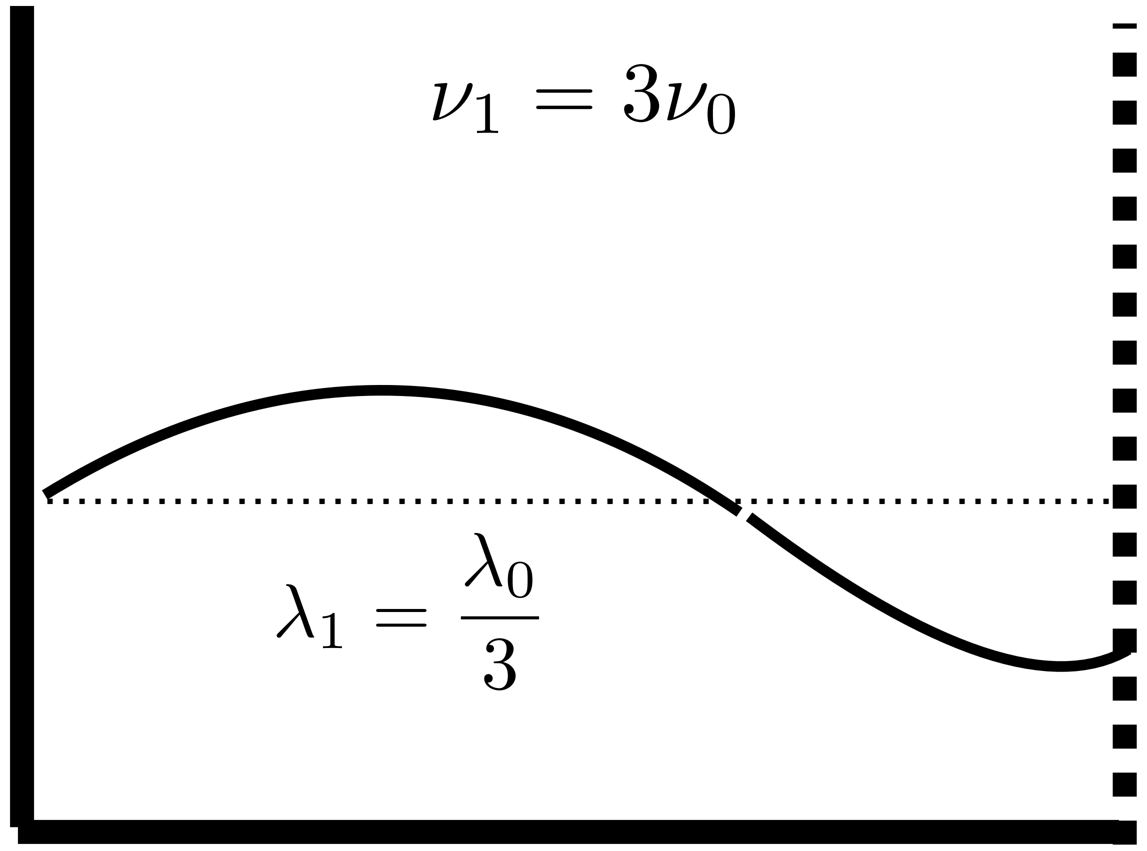
Esse é o espectro de frequência para uma extremidade fixa e uma livre

n=0



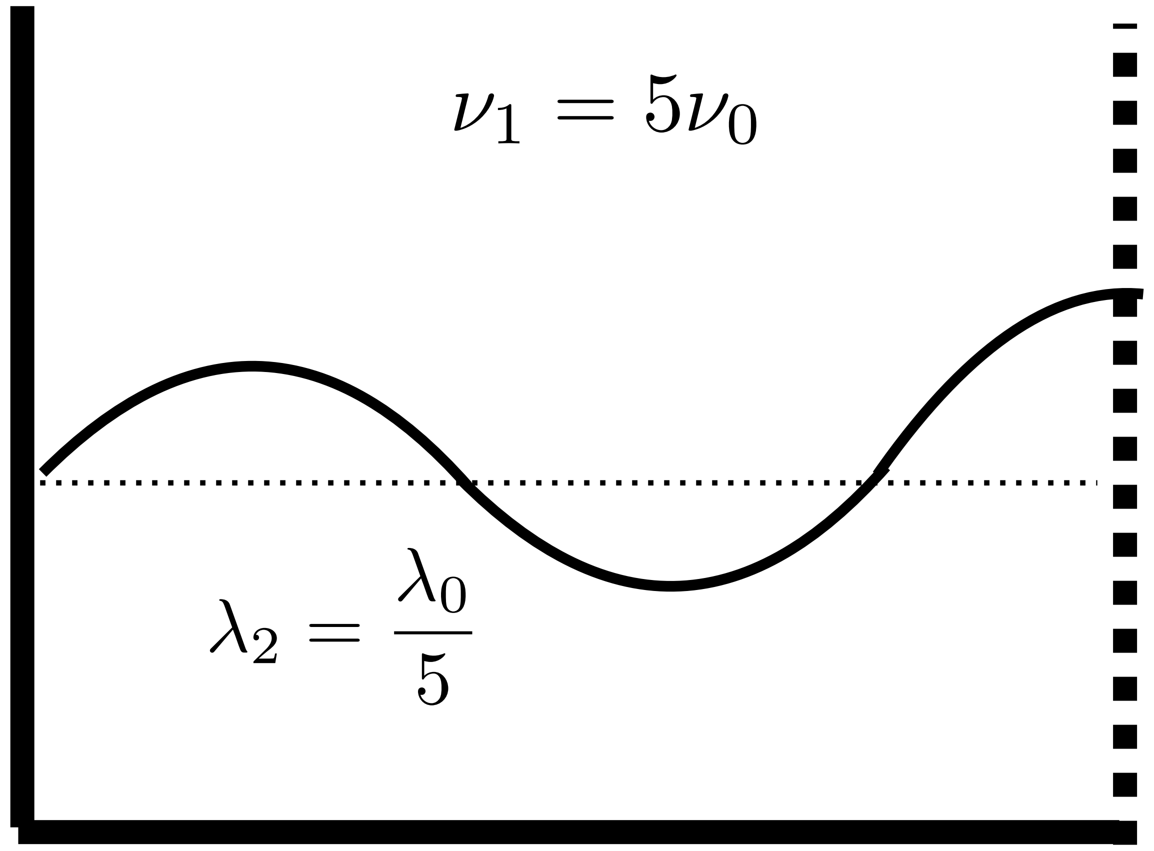
L

n=1



L

n=2



L

Ondas Estacionárias & Condições de Contorno

Corda livre em ambas extremidades

$$A(x,t) = a_k\,\cos(\omega t)\cos(kx) + b_k\,\cos(\omega t)\sin(kx) + c_k\,\sin(\omega t)\cos(kx) + d_k\,\sin(\omega t)\sin(kx)$$

se a corda agora estiver livre nas duas extremidade, i.e. x=0 & x=L, então

$$\frac{\partial A(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial A(L,t)}{\partial x} = 0 \quad \forall t \qquad \frac{\partial A(0,t)}{\partial x} = k\,b_k\cos(\omega t) + k\,d_k\sin(\omega t) = 0 \quad \rightarrow b_k = d_k = 0$$

$$A(x,t) = a_k\cos(kx)\cos(\omega t) + c_k\cos(kx)\sin(\omega t) = C\cos(kx)(\sin(\omega t+\varphi))$$

$$\frac{\partial A(L,t)}{\partial x} = -Ck\sin(kL)(\sin(\omega t+\varphi)) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sin(kL) = 0$$

modos normais de vibração

$$\boxed{k_n L = n\pi \quad n = 0,1,2\ldots \qquad \omega_n = \frac{n\pi}{L}v}$$

Esse é o espectro de frequência para ambas extremidade livres (duas condições de Neumann)

Ondas Estacionárias & Condições de Contorno

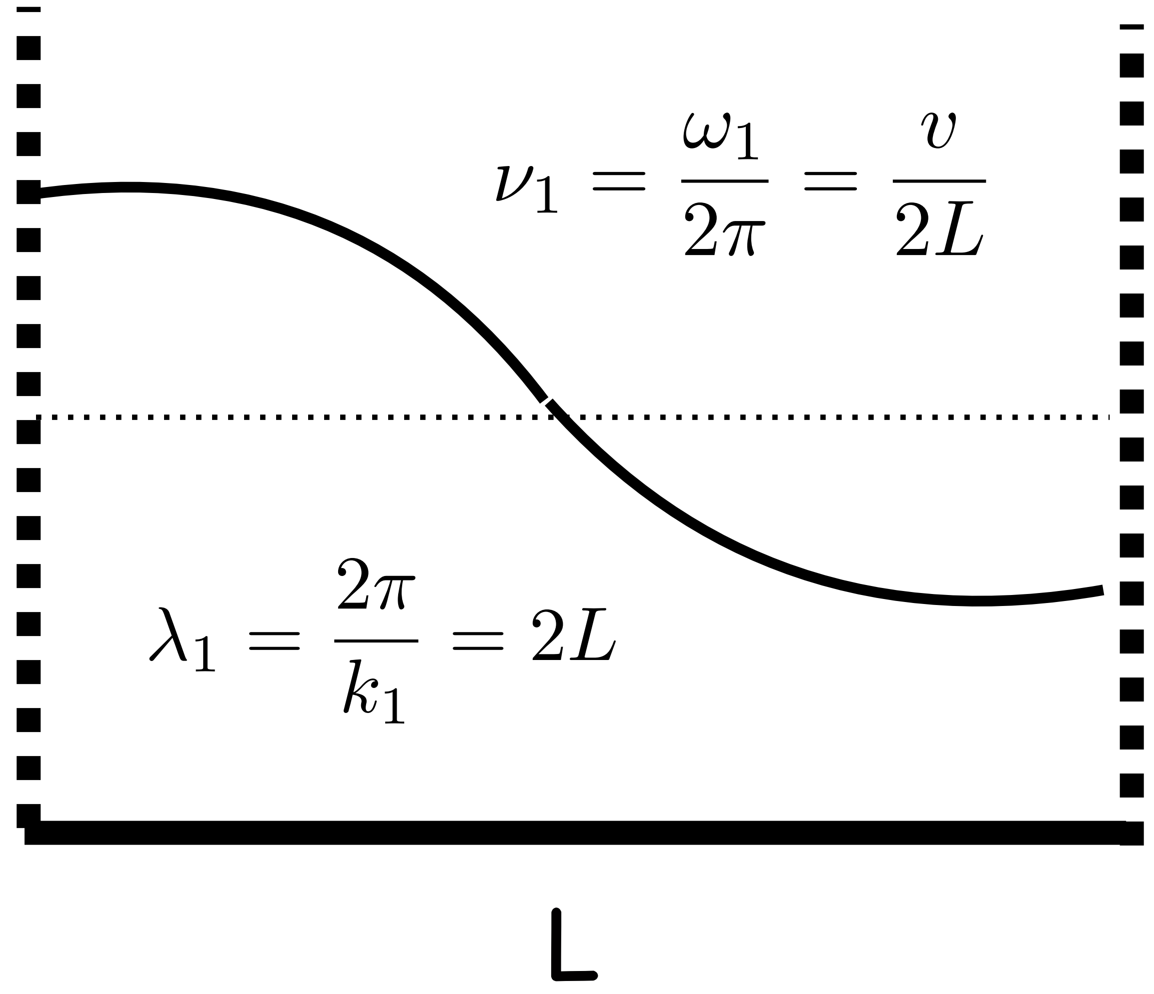
Corda livre em ambas extremidades

modos normais de vibração

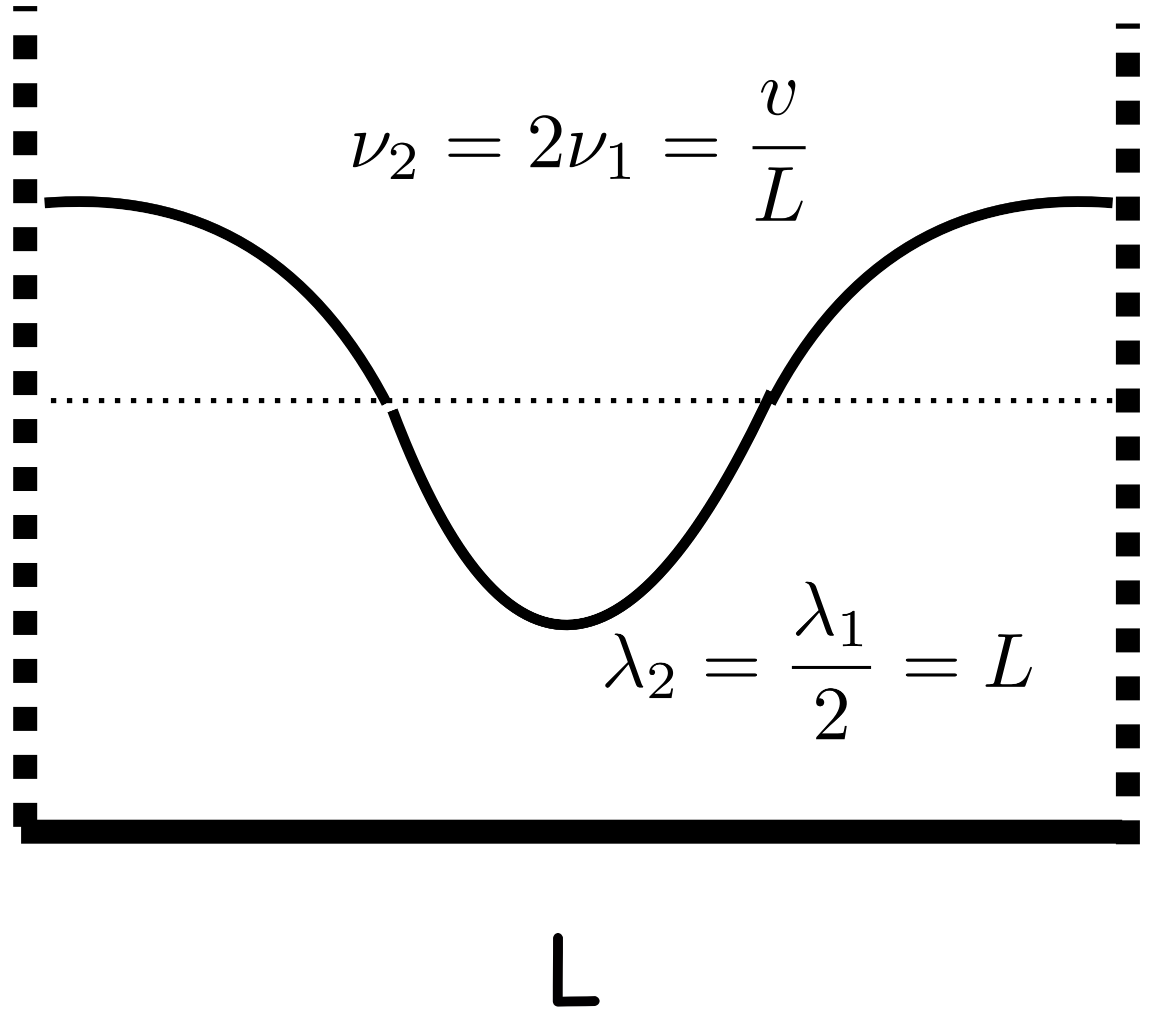
$$\boxed{\begin{aligned} &k_n L = n\pi \qquad n = 0, 1, 2... \\ &\omega_n = \frac{n\pi}{L} v \end{aligned}}$$

n=0 é permitido, mas é a solução constante i.e. k=0 A=(x,t) = não depende de x

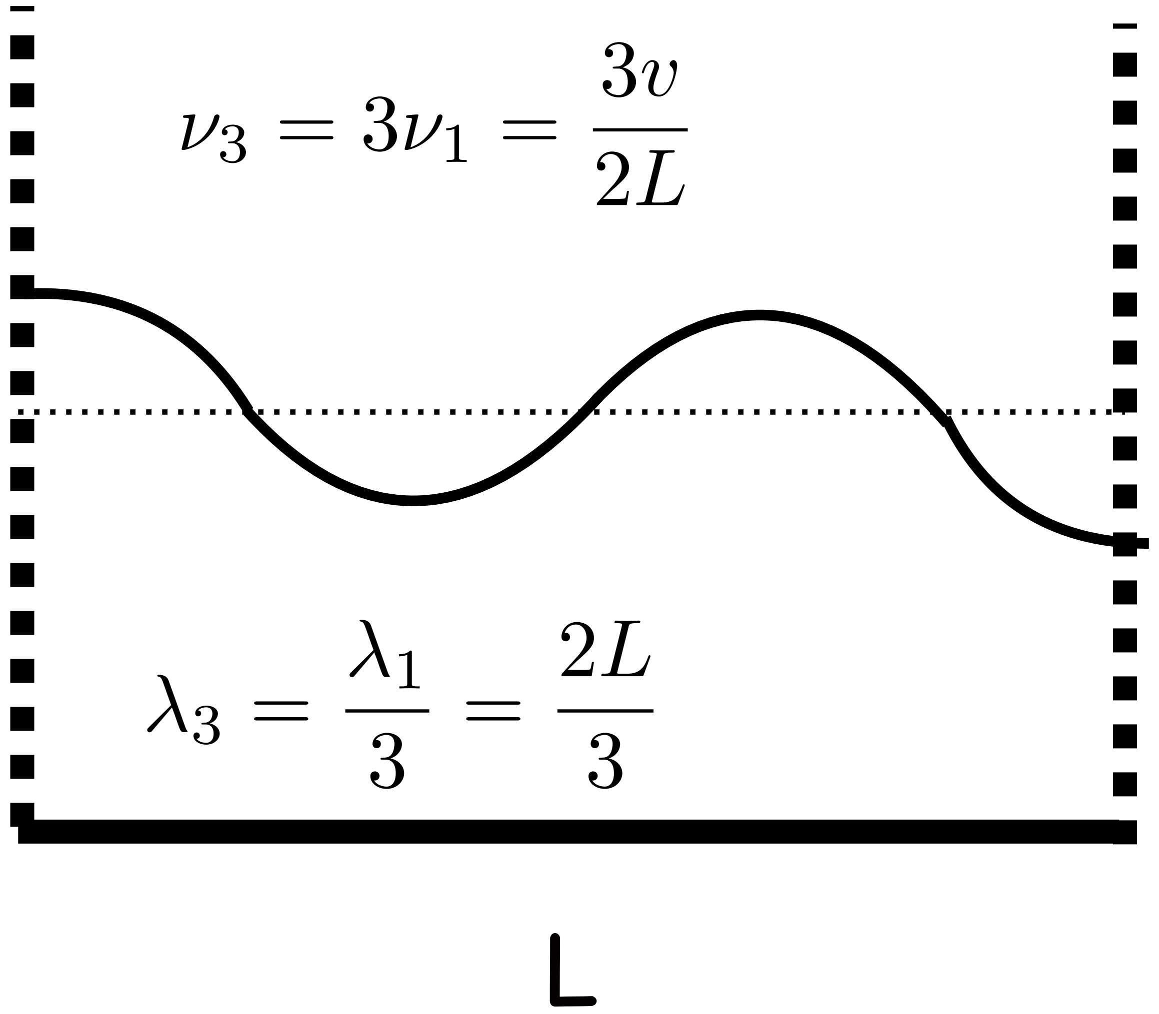
n=1



n=2

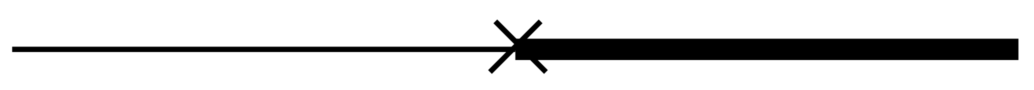


n=3



Condições de Contorno na Junção de 2 meios

Considere agora 2 cordas uma grossa e uma fina ligadas por um nó



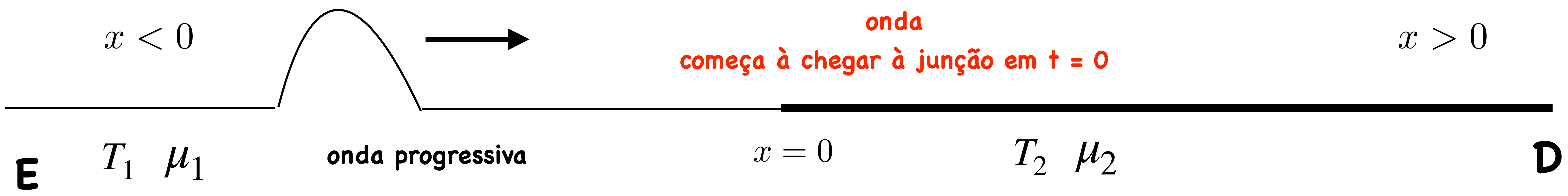
O que acontece com a onda quando passa pelo nó?

E se no lugar de mudar a densidade de massa mudássemos a tensão na corda?

O que acontece com ondas sonoras quando passam do ar para a água?

O que acontece com ondas de luz quando passam do ar para o vidro?

Vamos começar a responder essas perguntas tentando entender o que acontece com uma onda na seguinte situação:



Condições de Contorno na Junção de 2 meios

Vamos escrever a amplitude da onda como

$$A(x,t) = \begin{cases} A_E(x,t) & x < 0 \\ A_D(x,t) & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A_E(x,t) = v_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_E(x,t) \qquad v_1 = \sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}} \qquad \forall t \quad x < 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A_D(x,t) = v_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_D(x,t) \qquad v_2 = \sqrt{\frac{T_2}{\mu_2}} \qquad \forall t \quad x > 0$$

Condições de Contorno na Junção de 2 meios

A solução deve ser contínua em x=0 (junção)

$$\boxed{A_E(0,t) = A_D(0,t)}$$

Condições de Contorno na junção

Se Δm é uma porção infinitesimal da corda perto de x=0 então, como vimos

$$\Delta m \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(0,t) = T_1 \frac{\partial}{\partial x} A_E(0,t) - T_2 \frac{\partial}{\partial x} A_D(0,t)$$

mas $\Delta m = \mu \Delta x$ e no limite $\Delta x \to 0$

$$\boxed{T_1 \frac{\partial}{\partial x} A_E(0,t) = T_2 \frac{\partial}{\partial x} A_D(0,t)}$$

Reflexão & Transmissão

Suponha agora que a onda progressiva antes de chegar a junção tenha a forma

onda incidente

$$A_E(x,t) = f_i(t - \frac{x}{v_1}) \quad t < 0$$

antes de chega à junção

onda refletida

$$A_E(x,t) = f_i(t - \frac{x}{v_1}) + f_r(t + \frac{x}{v_1}) \quad t \approx 0$$

depois que chegou à junção

onda transmitida

$$A_D(x,t) = f_t(t - \frac{x}{v_2}) \quad t > 0$$

no outro lado da junção

Reflexão & Transmissão

Vamos impor agora as condições de contorno em x=0

continuidade da função

$$A_E(0,t) = A_D(0,t) \quad \rightarrow \quad f_i(t) + f_r(t) = f_t(t) \qquad \textbf{(1)}$$

ausência de força $\perp$

$$T_1 \frac{\partial}{\partial x} A_E(0,t) = T_2 \frac{\partial}{\partial x} A_D(0,t)$$

$$T_1 \frac{\partial}{\partial x}\left[f_i(t-\frac{x}{v_1}) + f_r(t+\frac{x}{v1}) \right]\Big|_{x=0} = \frac{T_1}{v_1}\left[-f_i'(t) + f_r'(t)\right] \qquad T_2 \frac{\partial}{\partial x}\left[f_t(t-\frac{x}{v_2}) \right]\Big|_{x=0} = -\frac{T_2}{v_2} f_t'(t)$$

$$\rightarrow \quad \frac{T_1}{v_1}\left[-f_i'(t) + f_r'(t)\right] = -\frac{T_2}{v_2} f_t'(t) \qquad \textbf{(2)}$$

Reflexão & Transmissão

Assim usando (2)
$$\frac{T_1}{v_1}\left[-f_i'(t)+f_r'(t)\right]+\frac{T_2}{v_2}f_t'(t)=0$$

$$\frac{T_1}{v_1}\left[-f_i(t)+f_r(t)\right]+\frac{T_2}{v_2}f_t(t)=\cancelto{0}{\text{const.}}$$

se não fosse nulo isso significaria que o lado direito tem um deslocamento em todos os instantes, isso é irrelevante

e usando (1)

$$\frac{T_1}{v_1}\left[-f_i(t)+f_r(t)\right]=-\frac{T_2}{v_2}f_t(t)=-\frac{T_2}{v_2}\left[f_i(t)+f_r(t)\right]$$

$$\left(\frac{T_1}{v_1}+\frac{T_2}{v_2}\right)f_r(t)=\left(\frac{T_1}{v_1}-\frac{T_2}{v_2}\right)f_i(t)$$

$$\boxed{f_r(t)=\frac{\left(\frac{T_1}{v_1}-\frac{T_2}{v_2}\right)}{\left(\frac{T_1}{v_1}+\frac{T_2}{v_2}\right)}f_i(t)}$$

Impedância

$$f_r(t) = \frac{\left(\frac{T_1}{v_1} - \frac{T_2}{v_2}\right)}{\left(\frac{T_1}{v_1} + \frac{T_2}{v_2}\right)} f_i(t)$$

Note que:
1) a onda refletida tem a mesma forma que a incidente (mesma função), apenas sua amplitude é modificada
2) a onda transmitida também tem a mesma forma

é uma medida de rigidez do meio

Definimos agora as impedâncias dos meios 1 e 2:

$$Z_1 \equiv \frac{T_1}{v_1} = \sqrt{T_1\,\mu_1} \qquad Z_2 \equiv \frac{T_2}{v_2} = \sqrt{T_2\,\mu_2}$$

$$f_r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\, f_i$$

$$f_t = f_i + f_r = \frac{2\,Z_1}{Z_1 + Z_2}\, f_i$$

Coeficiêntes de Reflexão & Transmissão

$$Z_1 \equiv \frac{T_1}{v_1} = \sqrt{T_1\,\mu_1} \qquad Z_2 \equiv \frac{T_2}{v_2} = \sqrt{T_2\,\mu_2}$$

$$f_r = \boxed{\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}} f_i \quad = \boxed{R}\, f_i$$

coeficiente de reflexão

se $Z_1 = Z_2 = Z$ não haverá reflexão (R=0, T=1) & a transmissão é completa

Se quisermos que isso ocorra precisamos de um "casamento de impedâncias"

$$T_1\,\mu_1 = T_2\,\mu_2$$

coeficiente de transmissão

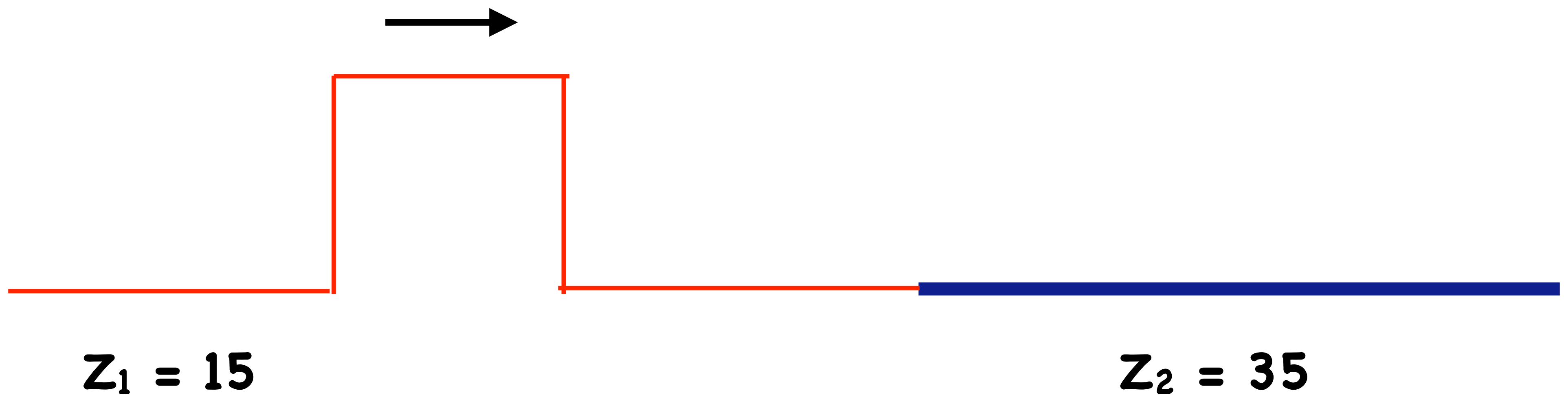
$$f_t = \boxed{\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}} f_i \quad = \boxed{T}\, f_i$$

se $Z_2 < Z_1$ então T>1, isso significa que a amplitude aumenta quando a onda muda de um meio de impedância alta para um meio de impedância baixa

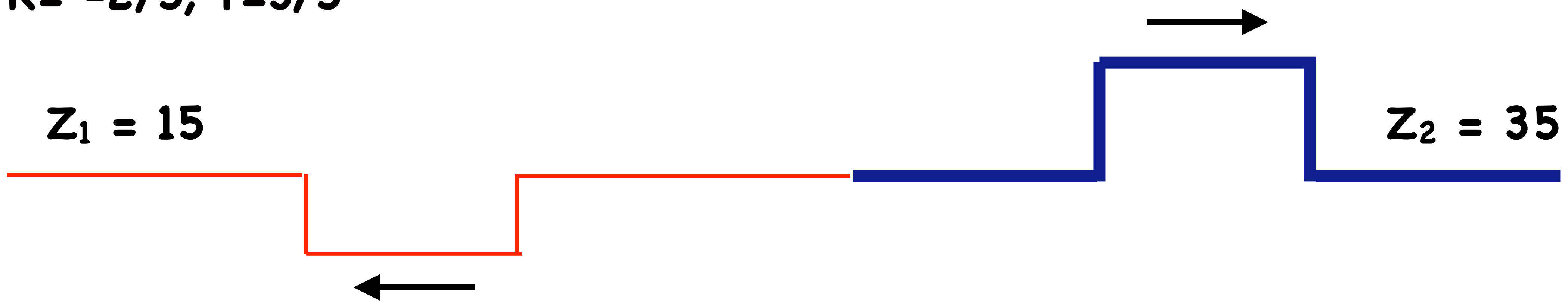
Z, R & T e Mudança de Fase

- $Z_2 > Z_1$ então $R < 0$ $\rightarrow$ há mudança de sinal entre f_i e f_r (mudança de fase i.e. $e^{i\pi}$ =-1)

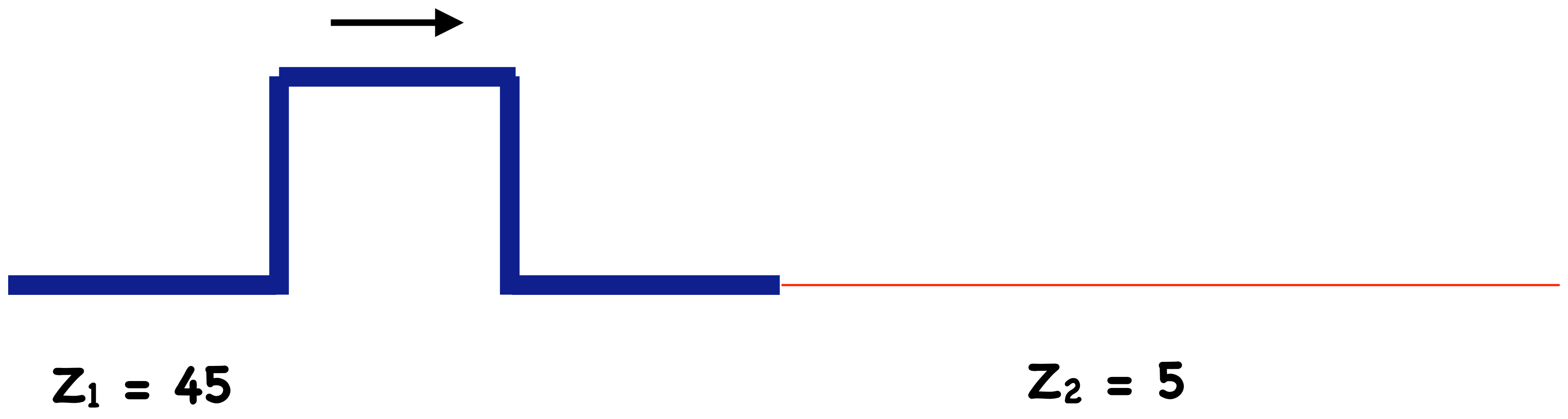
essa troca de sinal ocorre, em particular, se a onda atingir uma parede i.e. $\mu \rightarrow \infty$

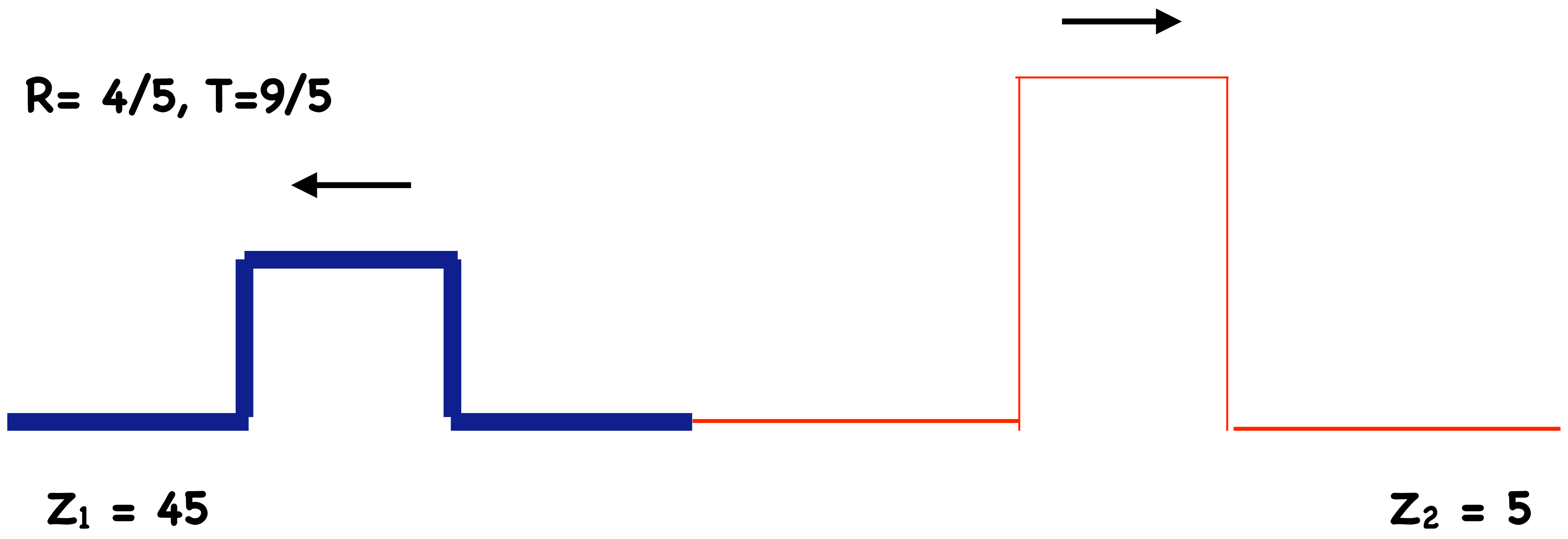


R= -2/5, T=3/5



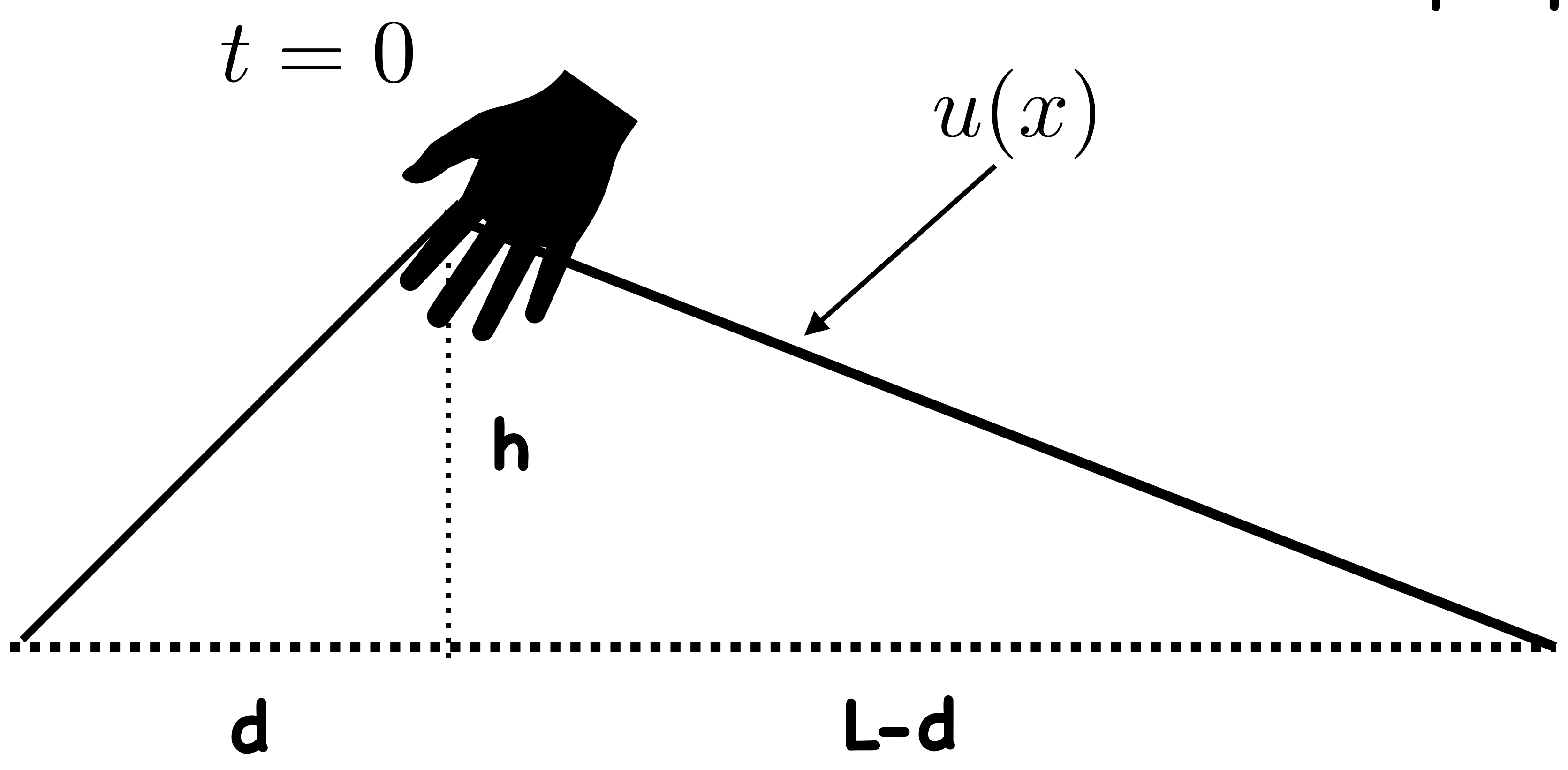
- $Z_2 < Z_1$ então $R > 0$ $\rightarrow$ não há mudança de sinal





Aplicação

Puxando uma Corda



Vimos que para uma corda presa nos 2 lados apenas entram certas frequências:

$$n = 1, 2, 3...$$

$$A(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L} t\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

b_n e d_n são obtidos das condições iniciais:

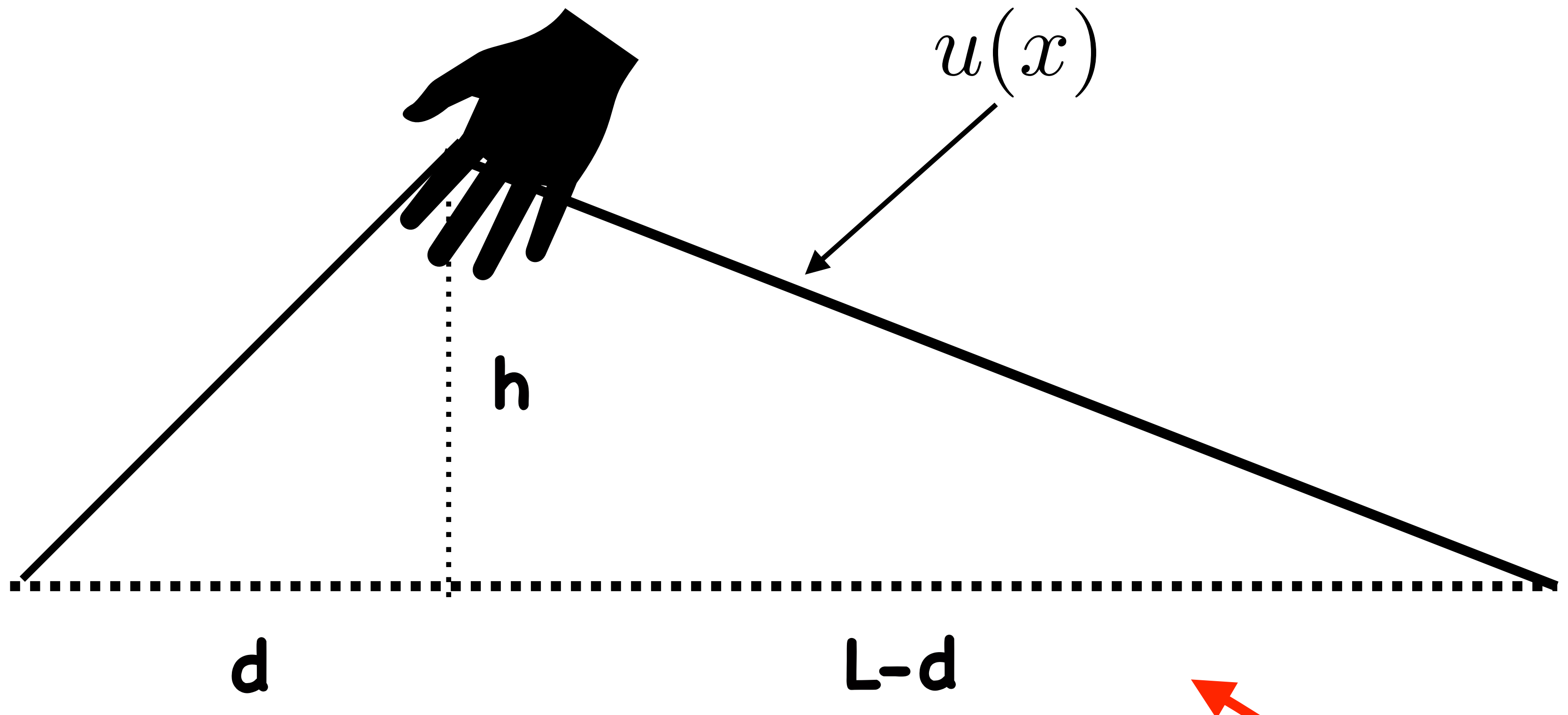
Série de Fourier

$$A(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = u(x)$$ **deslocamento inicial** $\forall x \longrightarrow b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$

$$\frac{\partial}{\partial t} A(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} d_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$ **velocidade inicial - corda inicialmente em repouso** $\forall x \longrightarrow d_n = 0$

Aplicação

Puxando uma Corda



$$u(x) = \begin{cases} \frac{h}{d}x & 0 \leq x \leq d \\ \frac{h}{d-L}x - \frac{hL}{d-L} & d < x \leq L \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2hL^2}{d(L-d)} \frac{1}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{dn\pi}{L}\right)$$

coeficiente de Fourier

$$A(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2hL^2}{d(L-d)} \frac{1}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{dn\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Aplicação

Puxando uma Corda

movimento da corda para qualquer t

$$A(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2hL^2}{d(L-d)} \frac{1}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{dn\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}vt\right)$$

Motion of Plucked String

https://www.youtube.com/watch?v=_X72on6CSL0

Potência

Ondas transmitem energia (som, luz, energia em um fio elétrico etc.)

Queremos saber a taxa com que trabalho pode ser realizado usando a onda

força que tira a corda do equilíbrio

$$P \equiv \underbrace{T \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)} \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) = Tv \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 = \mu v \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$$

onda progressiva para esquerda
potência vai para esquerda
onda progressiva para direita
potência vai para a direita

$$P_I = Z_1 \left(\frac{\partial A_I}{\partial t}\right)^2 \qquad P_R = Z_1 \left(\frac{\partial A_R}{\partial t}\right)^2 = Z_1 \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\frac{\partial A_I}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 P_I$$

$$P_T = Z_2 \left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\frac{\partial A_I}{\partial t}\right)^2 = \frac{Z_2}{Z_1}\left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 P_I$$

$$P_I = P_R + P_T$$

a potência é conservada !