Modelo de Solow - III

Mauro Rodrigues (USP)

2020

Progresso Técnico

- Modelo de Solow até aqui incapaz de gerar crescimento de longo prazo
- Capital tem retornos marginais decrescentes
  - Possível crescer de maneira apenas temporária via acumulação de capital
- Introduzir progresso técnico exógeno
  - Economia consegue produzir, com a mesma quantidade de insumos, cada vez mais produto
- Modelo de crescimento exógeno
  - Modelo gera crescimento de longo prazo, como função do progresso técnico
  - Progresso técnico, no entanto, não resulta dos mecanismos do modelo

Progresso técnico

- Tecnologia

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t)$$

- $A_t L_t$: número de trabalhadores efetivos
  - Número de trabalhadores (L_t) ajustados pela produtividade (A_t)
  - Progresso técnico = produtividade cada vez mais alta no tempo
    - ★ Cada trabalhador capaz de produzir cada vez mais, para dado estoque de capital K_t

- Progresso técnico: A_t cresce à taxa g:

$$\frac{\dot{A}_t}{A_t} = g$$

Tecnologia

- Resto do modelo permanece como antes
- F satisfaz retornos constantes de escala com relação a K e AL

$$\lambda Y_t = F(\lambda K_t, \lambda A_t L_t), \forall \lambda > 0$$

- Em particular, para $\lambda = 1/(A_t L_t)$:

$$\frac{Y_t}{A_t L_t} = F\left(\frac{K_t}{A_t L_t}, 1\right)$$

$$\widetilde{y}_t = F(\widetilde{k}_t, 1)$$

  - $\widetilde{y}_t$: produto por trabalhador efetivo
  - $\widetilde{k}_t$: capital por trabalhador efetivo
- Defina $F(\widetilde{k}_t, 1) = f(\widetilde{k}_t)$. Produto por trabalhador efetivo é então:

$$\widetilde{y}_t = f(\widetilde{k}_t)$$

Tecnologia

F satisfaz também as **condições de Inada**:

1. $\frac{\partial Y}{\partial (AL)} > 0, \frac{\partial Y}{\partial K} > 0$
2. $\frac{\partial^2 Y}{\partial (AL)^2} < 0, \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$
3. $\lim_{AL \to 0} \frac{\partial Y}{\partial (AL)} = \lim_{K \to 0} \frac{\partial Y}{\partial K} = \infty$
4. $\lim_{AL \to \infty} \frac{\partial Y}{\partial (AL)} = \lim_{K \to \infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = 0$
5. $F(K, 0) = F(0, AL) = 0$

Tecnologia

- Produto marginal do capital:

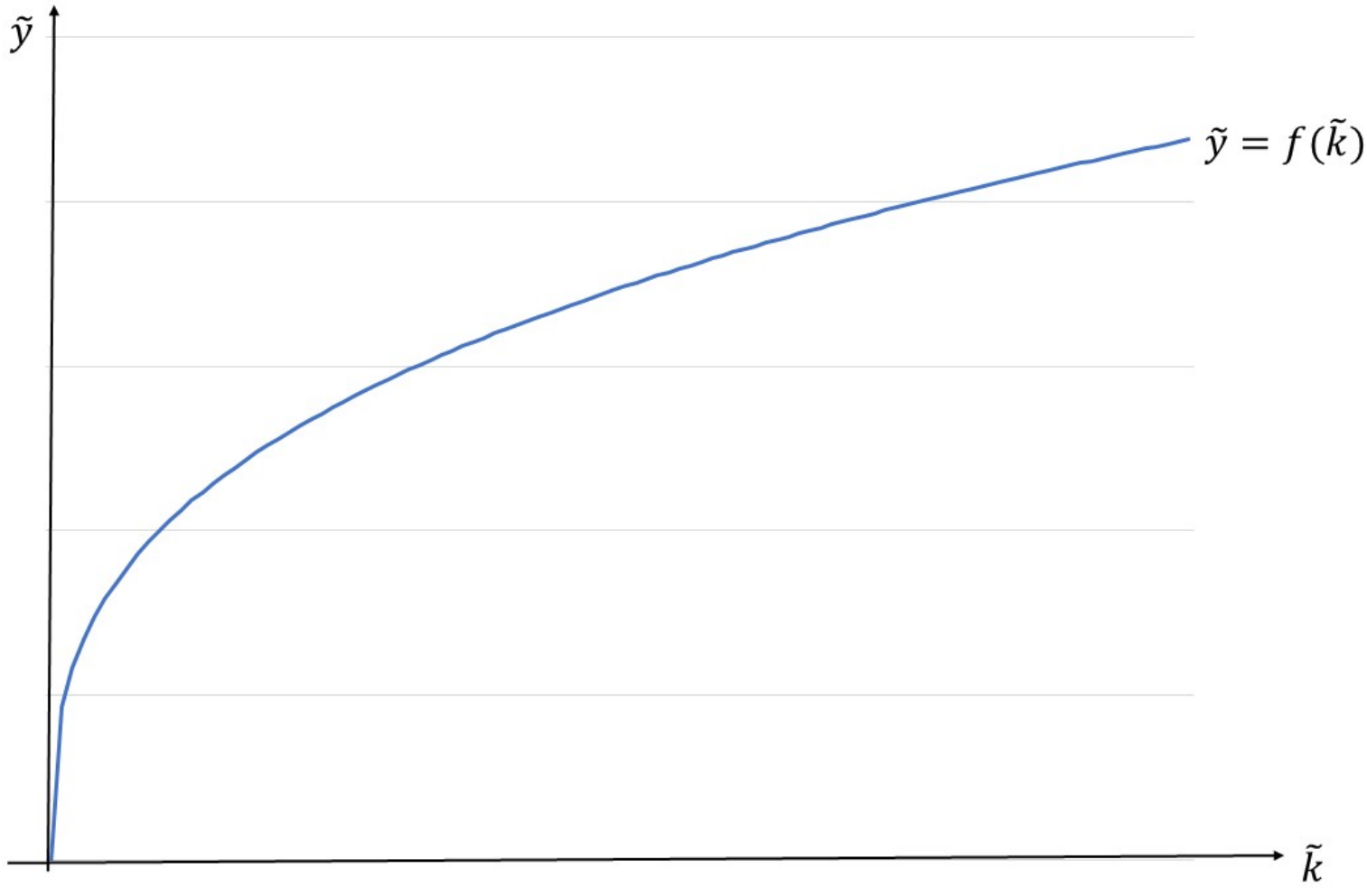
$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(\widetilde{k})$$

- Dadas as hipóteses sobre a função de produção:

$$f'(\widetilde{k}) > 0$$
$$f''(\widetilde{k}) < 0$$
$$f'(0) = \infty$$
$$f'(\infty) = 0$$
$$f(0) = 0$$

Tecnologia

Figure: Função de produção (por trabalhador efetivo)



Modelo de Solow

- Função de produção neoclássica (com as propriedades que acabamos de discutir):

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t)$$

$$\widetilde{y}_t = f(\widetilde{k}_t)$$

- Economia fechada, sem governo:

$$Y_t = C_t + I_t$$

- Fração exógena s da renda é poupada/investida:

$$S_t = I_t = sY_t$$

  - Fração $(1-s)$ é usada para consumo

$$C_t = (1-s)Y_t$$

  - $s \in (0,1)$: taxa de poupança

Modelo de Solow

- Acumulação de capital
  - Capital aumenta ao longo do tempo com investimento
  - Capital diminui ao longo do tempo por conta de depreciação

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$$

- Crescimento populacional:
  - População (e número de trabalhadores) cresce à taxa exógena n:

$$\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n$$

- Progresso técnico:

$$\frac{\dot{A}_t}{A_t} = g$$

Lei de movimento

- Lembrando que $\widetilde{k}_t = K_t/(A_t L_t)$ e $\widetilde{y}_t = Y_t/(A_t L_t) = f(\widetilde{k}_t)$
- Dividindo a equação de acumulação de capital por $A_t L_t$:

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t$$

$$\frac{\dot{K}_t}{A_t L_t} = s\frac{Y_t}{A_t L_t} - \delta\frac{K_t}{A_t L_t} = sf(\widetilde{k}_t) - \delta\widetilde{k}_t \quad (*)$$

- Note que:

$$\dot{\widetilde{k}}_t = \frac{d[K_t/(A_t L_t)]}{dt} = \frac{\dot{K}_t(A_t L_t) - K_t(\dot{A}_t L_t + A_t \dot{L}_t)}{(A_t L_t)^2}$$

$$= \frac{\dot{K}_t}{A_t L_t} - \frac{K_t}{A_t L_t}\left[\frac{\dot{A}_t L_t}{A_t L_t} + \frac{A_t \dot{L}_t}{A_t L_t}\right] = \frac{\dot{K}_t}{A_t L_t} - (g+n)\widetilde{k}_t$$

- Logo:

$$\frac{\dot{K}_t}{A_t L_t} = \dot{\widetilde{k}}_t + (n+g)\widetilde{k}_t \ (**)$$

Lei de movimento

- Combinando (*) e (**):

$$sf(\widetilde{k}_t) - \delta\widetilde{k}_t = \dot{\widetilde{k}}_t + (n+g)\widetilde{k}_t$$

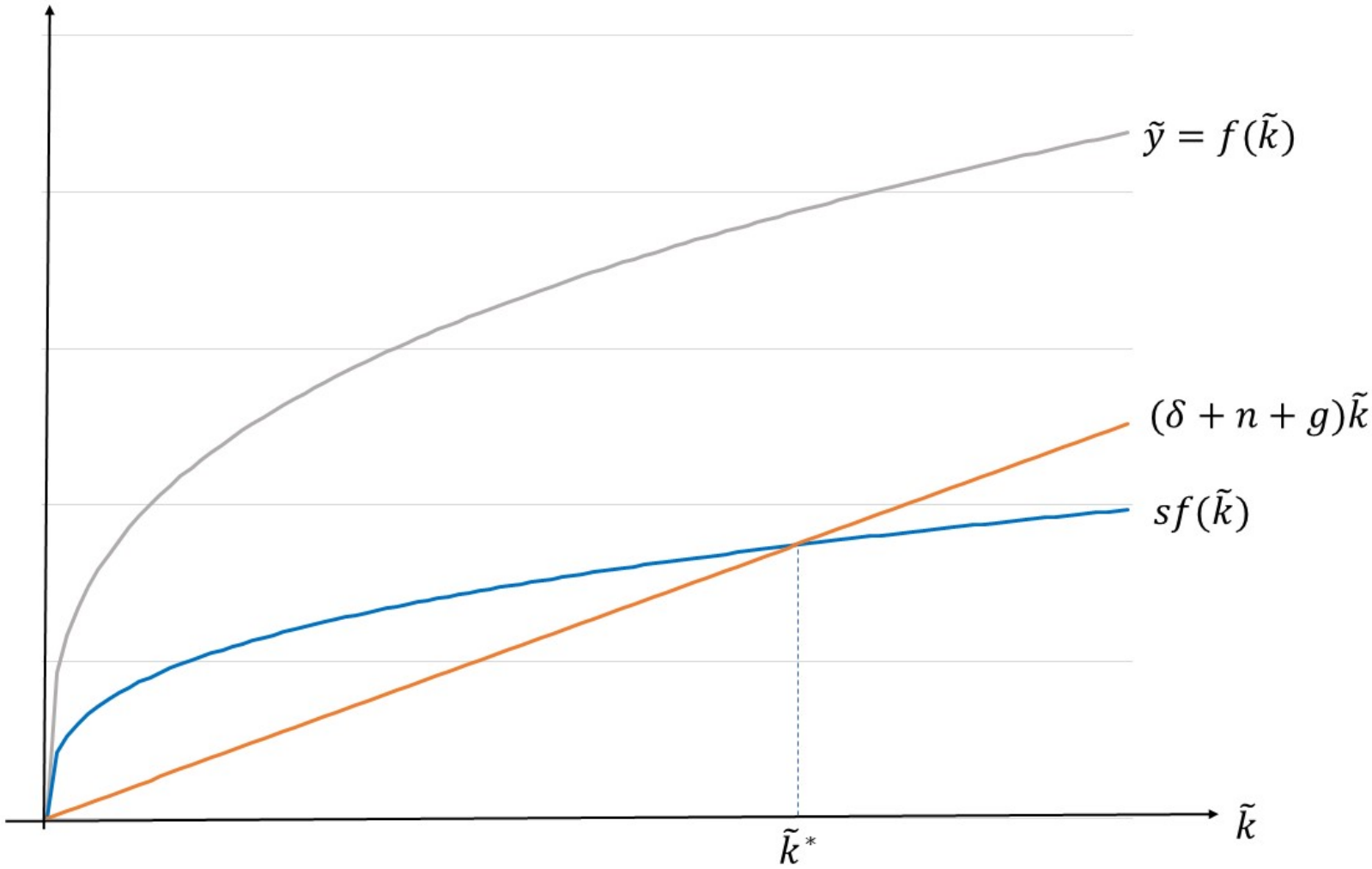
- Podemos então obter a **lei de movimento do capital por trabalhador efetivo**:

$$\dot{\widetilde{k}}_t = sf(\widetilde{k}_t) - (\delta + n + g)\widetilde{k}_t$$

- Com base nessa equação, para dada condição inicial $\widetilde{k}_0$, é possível obter toda a trajetória futura de $\widetilde{k}_t$ e das demais variáveis endógenas do modelo.

Lei de movimento

Figure: Lei de movimento e estado estacionário



Estado estacionário

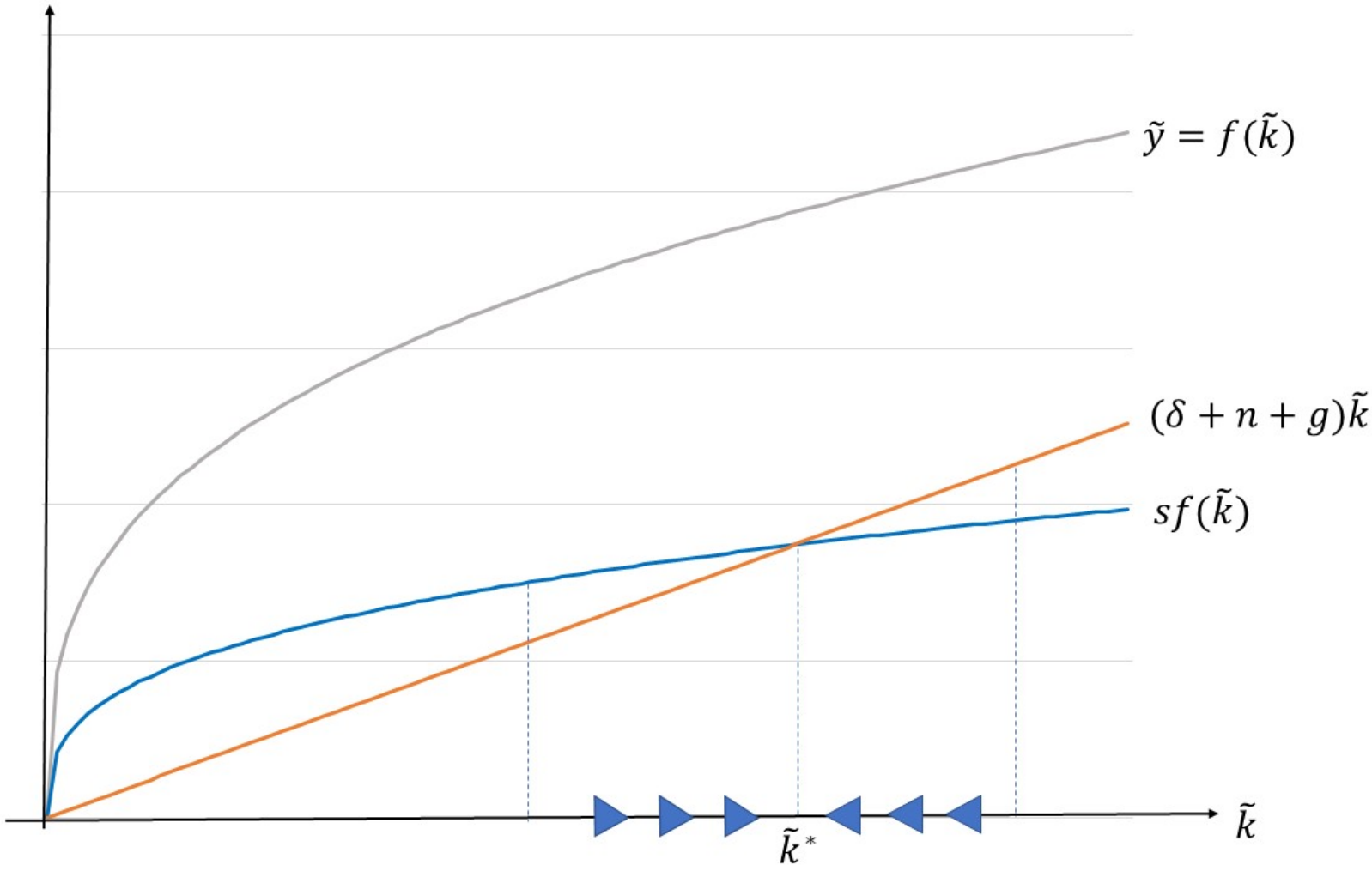
- Em **estado estacionário**:

$$sf(\widetilde{k}^*) = (\delta + n + g)\widetilde{k}^*$$

  - $\widetilde{k}^*$: capital por trabalhador efetivo de estado estacionário
  - Investimento por trabalhador efetivo = depreciação por trabalhador efetivo (ajustando pelo crescimento populacional e progresso técnico)
- Se $\widetilde{k} = \widetilde{k}^*$, então $\dot{\widetilde{k}}_t = 0$:
  - Nessa situação, capital por trabalhador efetivo se mantém constante ao longo do tempo (a não ser que algum choque ocorra)
  - Outras variável também se mantém constantes no tempo: $\widetilde{y}^* = f(\widetilde{k}^*)$, $\widetilde{i}^* = s\widetilde{y}^*$, $\widetilde{c}^* = (1-s)\widetilde{y}^*$
- Tendência de longo prazo da economia

Lei de movimento

Figure: Lei de movimento e estado estacionário



Longo prazo

- Lembrando que $\widetilde{k}_t = K_t/(A_t L_t)$ e $\widetilde{y}_t = Y_t/(A_t L_t) = f(\widetilde{k}_t)$
- Capital e produto **por trabalhador**:

$$k_t = \frac{K_t}{L_t} = A_t \widetilde{k}_t$$

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = A_t f(\widetilde{k}_t)$$

- No longo prazo, $\widetilde{k}_t = \widetilde{k}^*$:

$$k_t = A_t \widetilde{k}^*$$

$$y_t = A_t f(\widetilde{k}^*)$$

- Portanto, no longo prazo, capital e renda por trabalhador crescem à taxa de progresso técnico g
  - O mesmo vale para outras variáveis por trabalhador
- Com a introdução de progresso técnico, modelo é capaz de gerar crescimento de longo prazo
  - Processo exógeno

Dinâmica

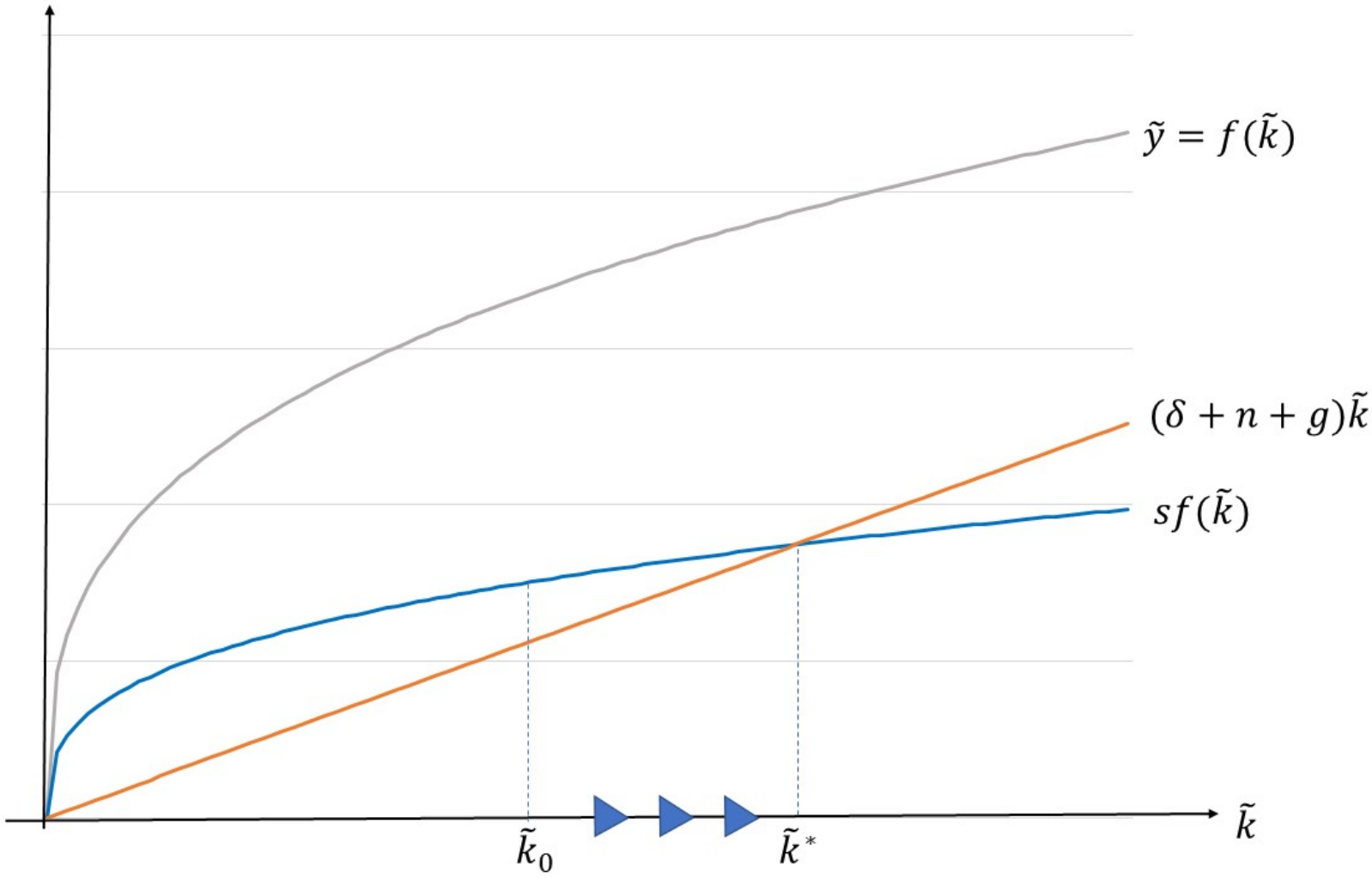
- Suponha capital por trabalhador efetivo inicial abaixo do nível de estado estacionário:

$$\widetilde{k}_0 < \widetilde{k}^*$$

- Nessa situação, investimento $>$ depreciação (por trabalhador efetivo)
  - Capital por trabalhador efetivo cresce ao longo do tempo ($\dot{\widetilde{k}}_t > 0$)
  - Inicialmente crescimento é elevado, pois $\widetilde{k}$ é baixo e $PMgK$ é alta
  - À medida que o capital acumula, $PMgK$ diminui e taxa de crescimento se reduz
  - No longo prazo, $\widetilde{k}_t \to \widetilde{k}^*$

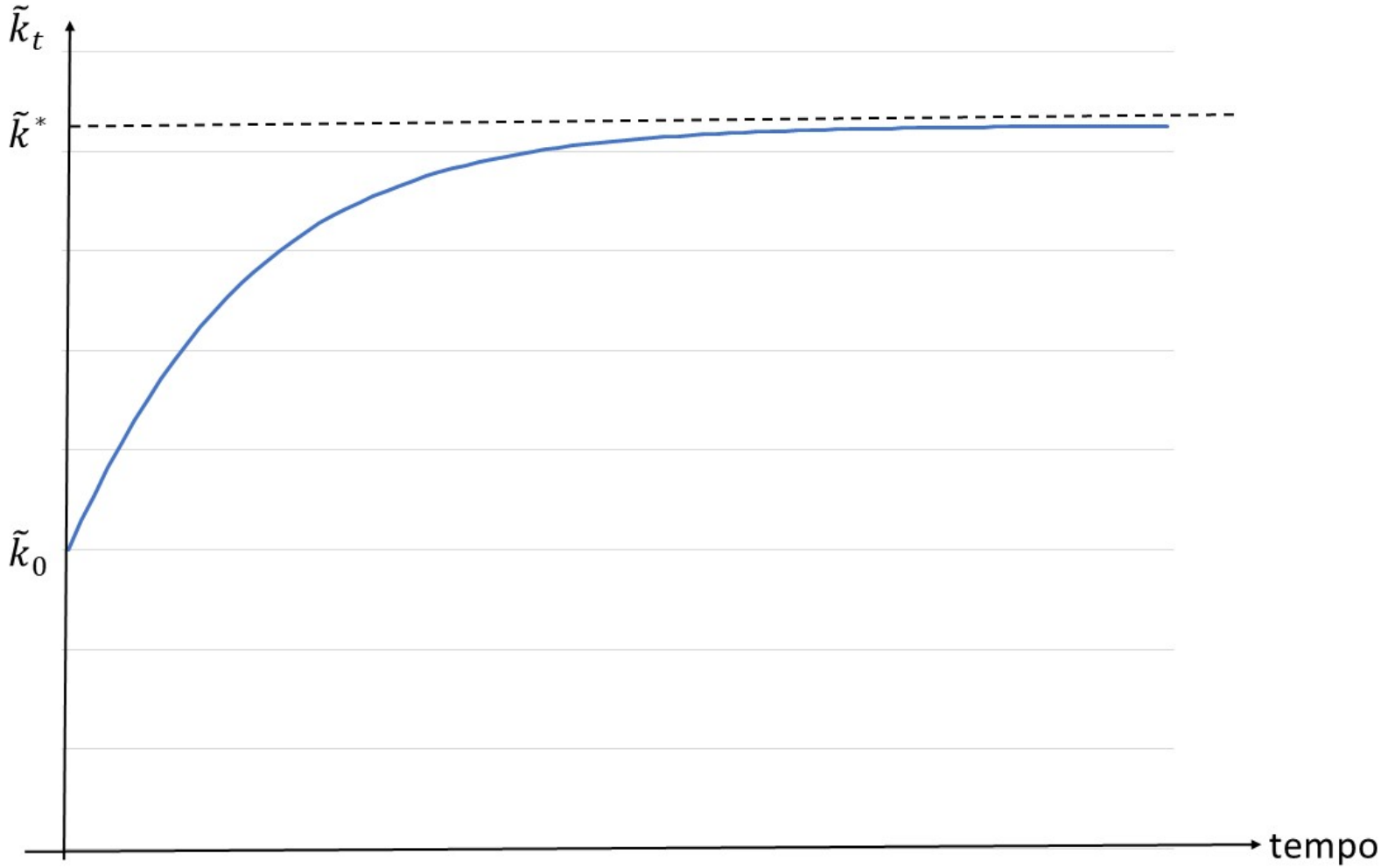
Dinâmica

Figure: $\widetilde{k}_0 < \widetilde{k}^*$



Dinâmica

Figure: Trajetória do capital por trabalhador efetivo ($\widetilde{k}_0 < \widetilde{k}^*$)



Dinâmica

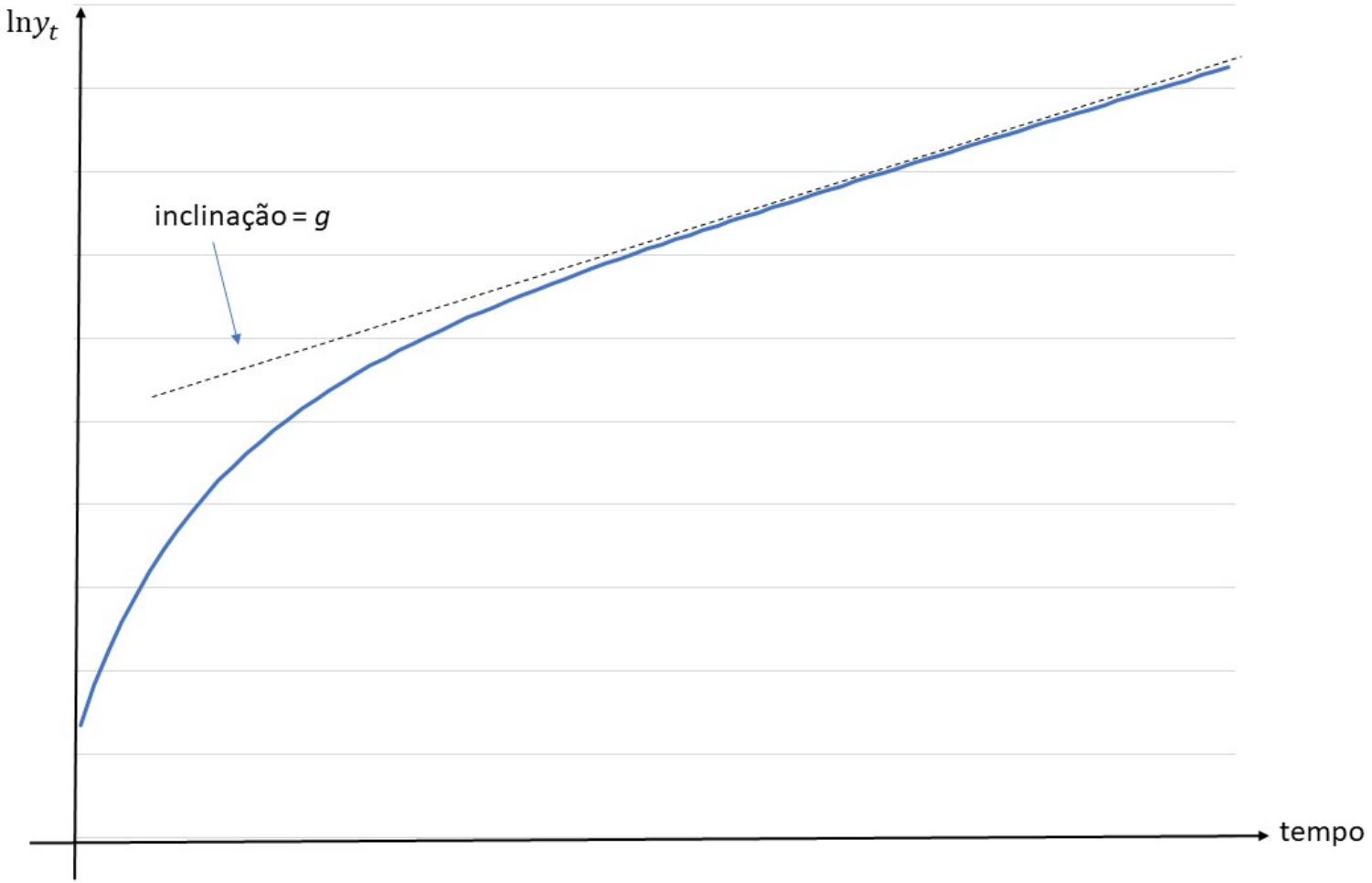
- Produto por trabalhador efetivo segue trajetória semelhante
- Produto por trabalhador:

$$y_t = A_t f(\widetilde{k}_t)$$

  - Cresce a uma taxa superior a g na transição
  - Essa taxa diminui ao longo do tempo, à medida que $PMgK$ se reduz
  - No longo prazo, taxa de crescimento tende a g

Dinâmica

Figure: Trajetória da renda por trabalhador ($\widetilde{k}_0 < \widetilde{k}^*$)



Dinâmica

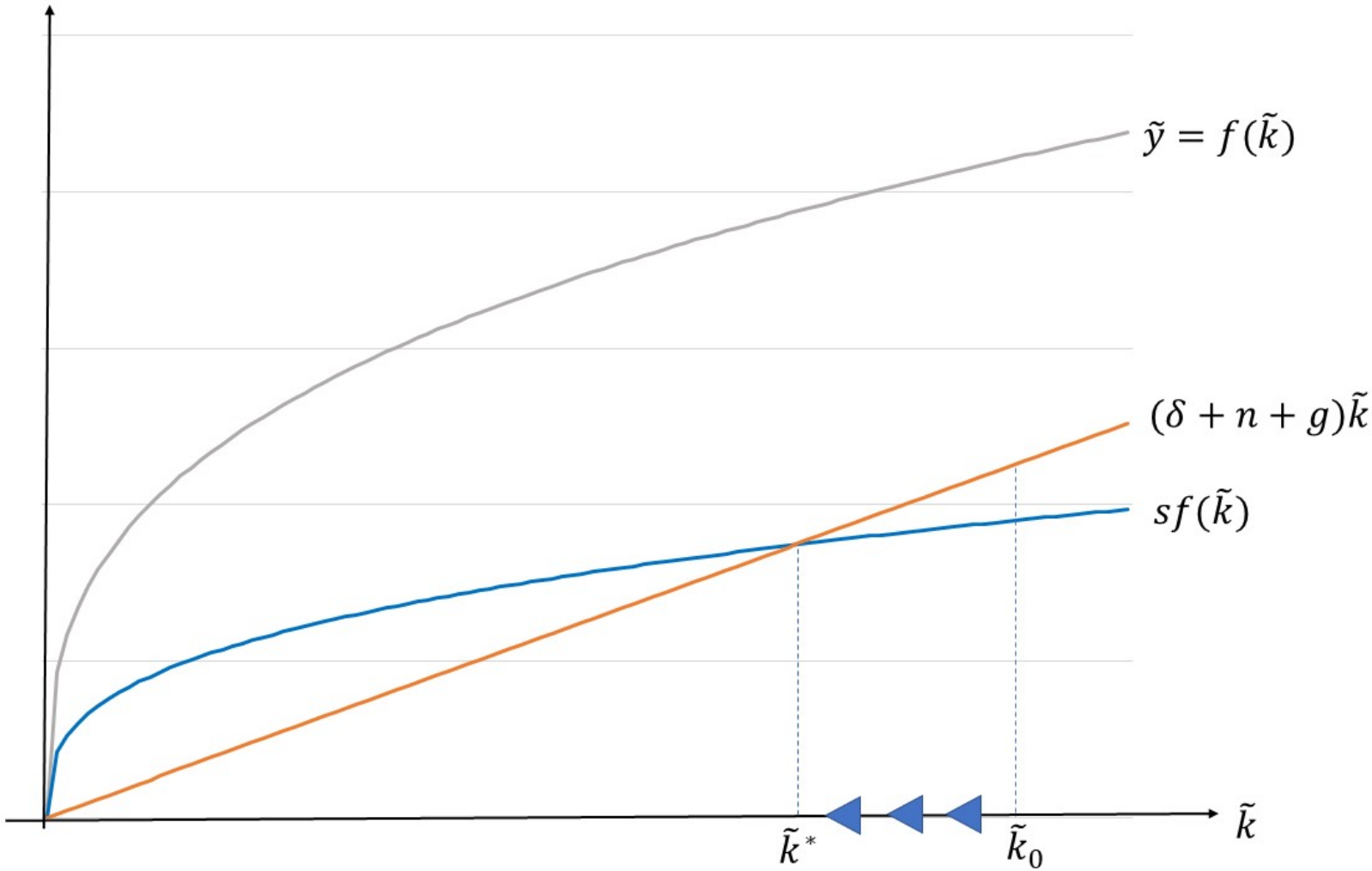
- Suponha capital por trabalhador inicial abaixo do nível de estado estacionário:

$$\widetilde{k}_0 > \widetilde{k}^*$$

- Nessa situação, investimento $<$ depreciação (por trabalhador efetivo)
  - Capital por trabalhador decresce ao longo do tempo ($\dot{\widetilde{k}}_t < 0$)
  - Inicialmente crescimento é elevado, pois $\widetilde{k}$ é elevado e $PMgK$ é baixa
  - À medida que o capital desacumula, $PMgK$ aumenta e taxa de decrescimento se reduz
  - No longo prazo, $\widetilde{k}_t \to \widetilde{k}^*$

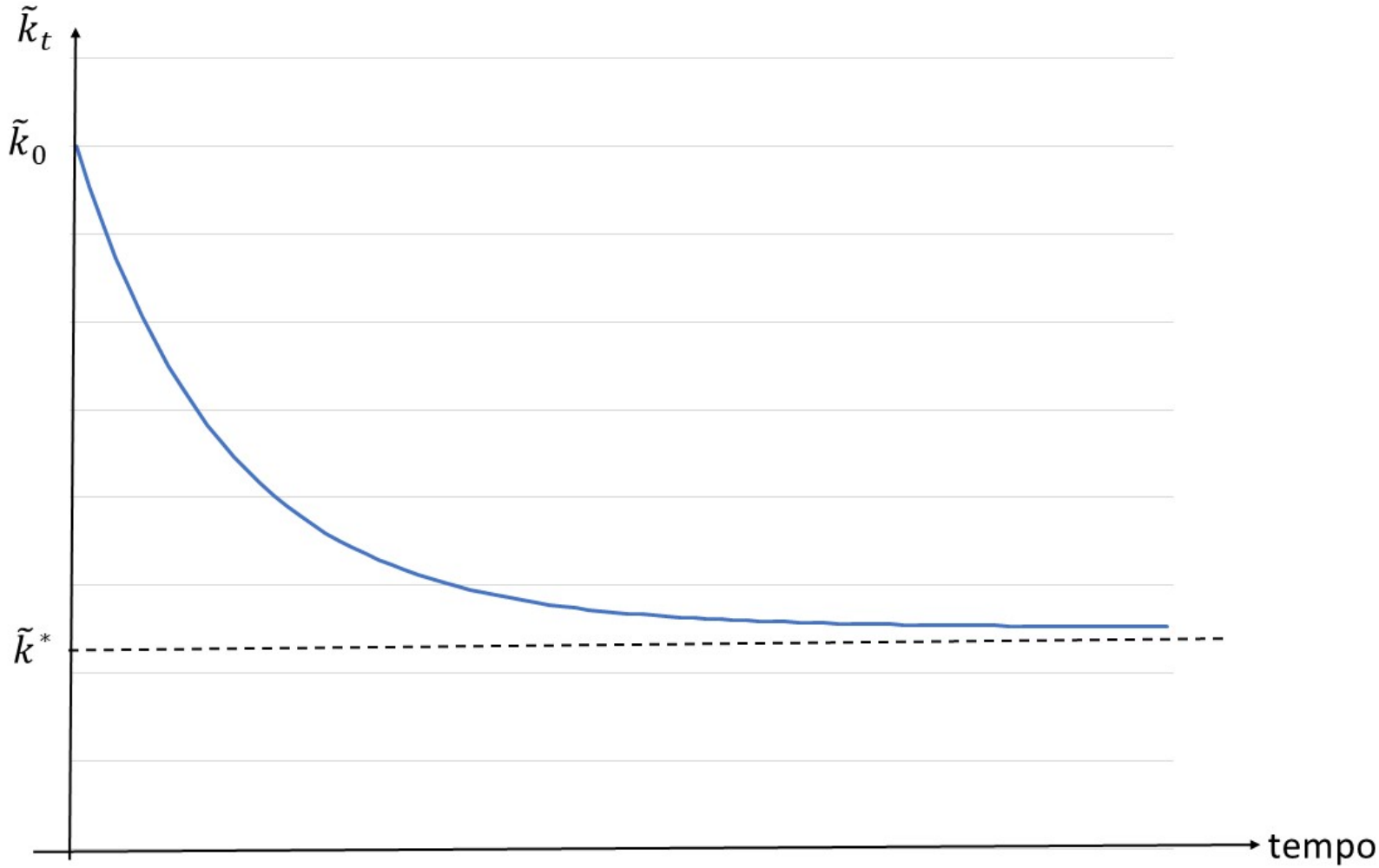
Dinâmica

Figure: $\widetilde{k}_0 > \widetilde{k}^*$



Dinâmica

Figure: Trajetória do capital por trabalhador efetivo ($\widetilde{k}_0 > \widetilde{k}^*$)



Dinâmica

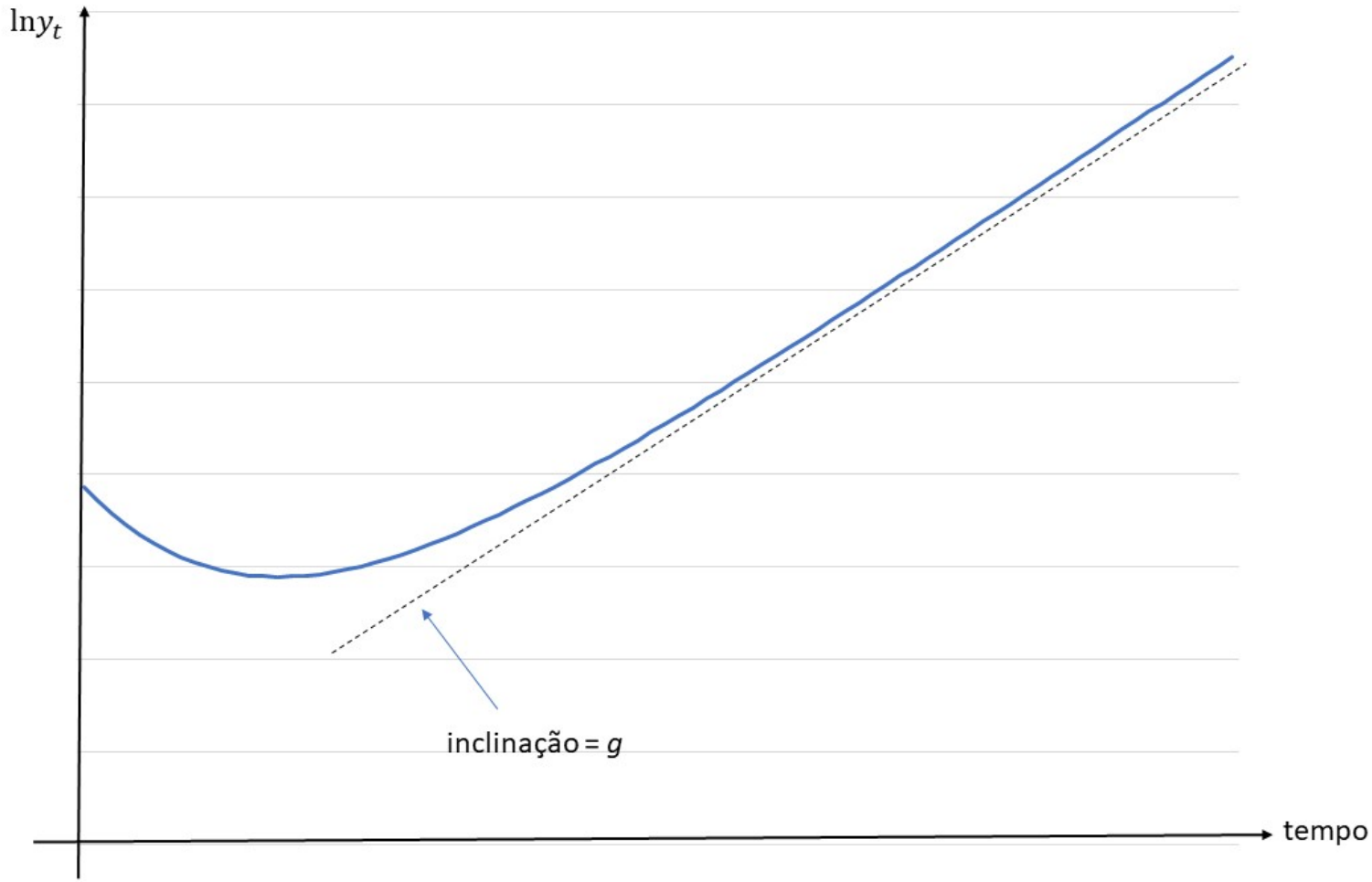
- Produto por trabalhador efetivo segue trajetória semelhante
- Produto por trabalhador:

$$y_t = A_t f(\widetilde{k}_t)$$

  - Cresce a uma taxa inferior a g na transição
  - Essa taxa aumenta ao longo do tempo, à medida que $PMgK$ cresce
  - No longo prazo, taxa de crescimento tende a g

Dinâmica

Figure: Trajetória da renda por trabalhador ($\widetilde{k}_0 > \widetilde{k}^*$)



Caso Cobb-Douglas

- $F(K,L) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$; $f(\widetilde{k}) = \widetilde{k}^{\alpha}$
- Em estado estacionário

$$sf(\widetilde{k}^*) = (\delta + n + g)\widetilde{k}^*$$
$$s(\widetilde{k}^*)^{\alpha} = (\delta + n + g)\widetilde{k}^*$$

- Logo:

$$\frac{\widetilde{k}^*}{(\widetilde{k}^*)^{\alpha}} = (\widetilde{k}^*)^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta + n + g}$$

- Capital por trabalhador efetivo de estado estacionário:

$$\widetilde{k}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- Produto por trabalhador efetivo de estado estacionário:

$$\widetilde{y}^* = (\widetilde{k}^*)^{\alpha} = \left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Caso Cobb-Douglas

- Produto por trabalhador de estado estacionário:

$$y_t = A_t \widetilde{y}^*$$

- Dado que $\frac{\dot{A}_t}{A_t} = g$:

$$A_t = A_0 e^{gt}$$

- Portanto:

$$y_t = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_0 e^{gt}$$

  - Nível da renda por trabalhador: $\left(\frac{s}{\delta+n+g} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_0$
  - Taxa de crescimento: g

Mudança de estado estacionário

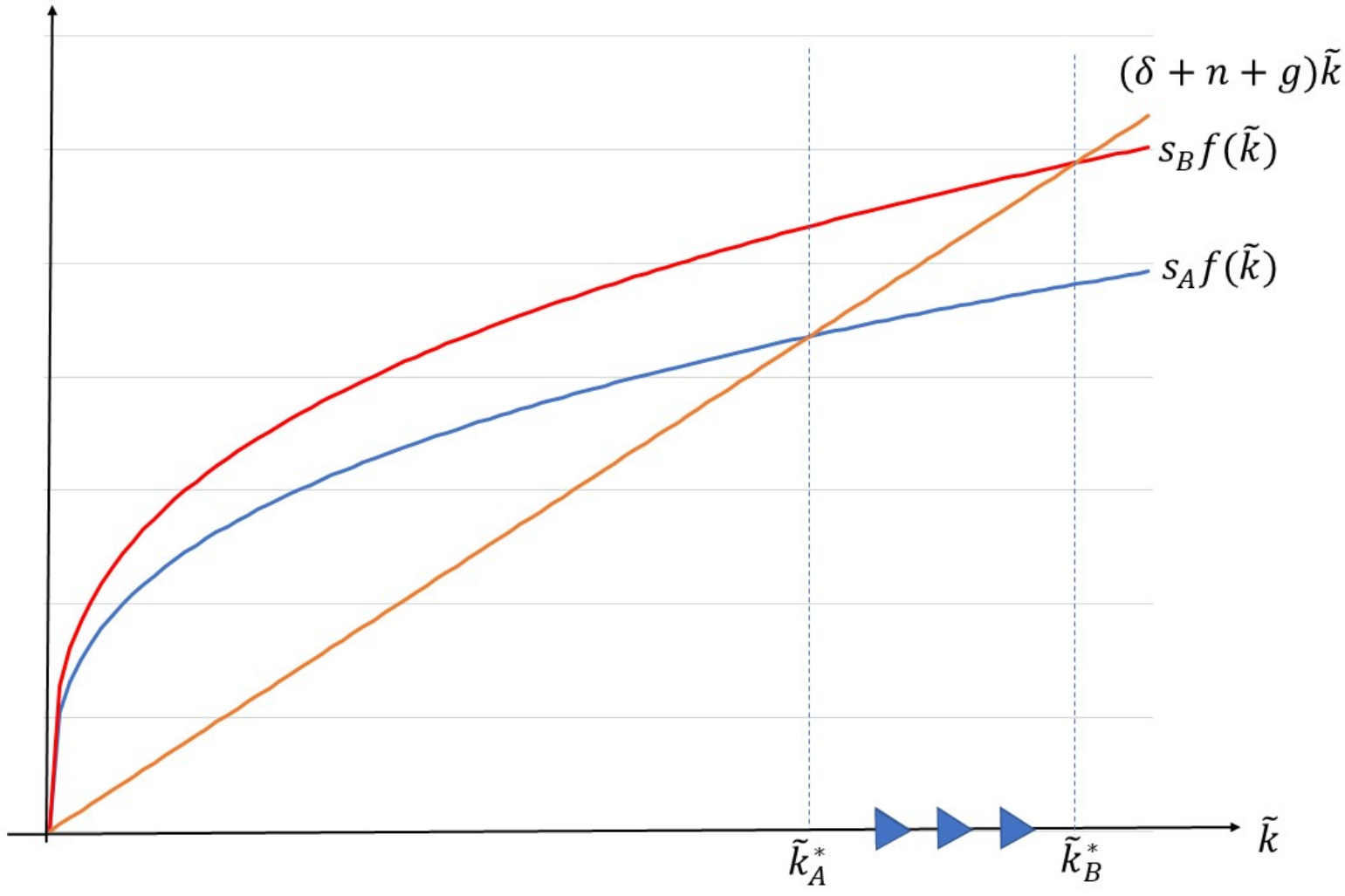
- Alterar algum parâmetro do modelo ajuda a entender a diferença entre efeitos de nível e de taxa
  - Revistaremos o caso de mudança na taxa de poupança
- Suponha a economia inicialmente em estado estacionário com taxa de poupança s_A
  - Capital por trabalhador efetivo $\widetilde{k}_A^*$; produto por trabalhador efetivo $\widetilde{y}_A^* = f(\widetilde{k}_A^*)$
  - Produto por trabalhador cresce à taxa g
- No instante t_0, a taxa de poupança aumenta permanentemente para s_B

Mudança de estado estacionário

- Nível do produto por trabalhador aumenta permanentemente
- Taxa de crescimento eleva-se temporariamente
  - Mas diminui à medida que economia se aproxima do estado estacionário
  - Retorna a g no longo prazo.

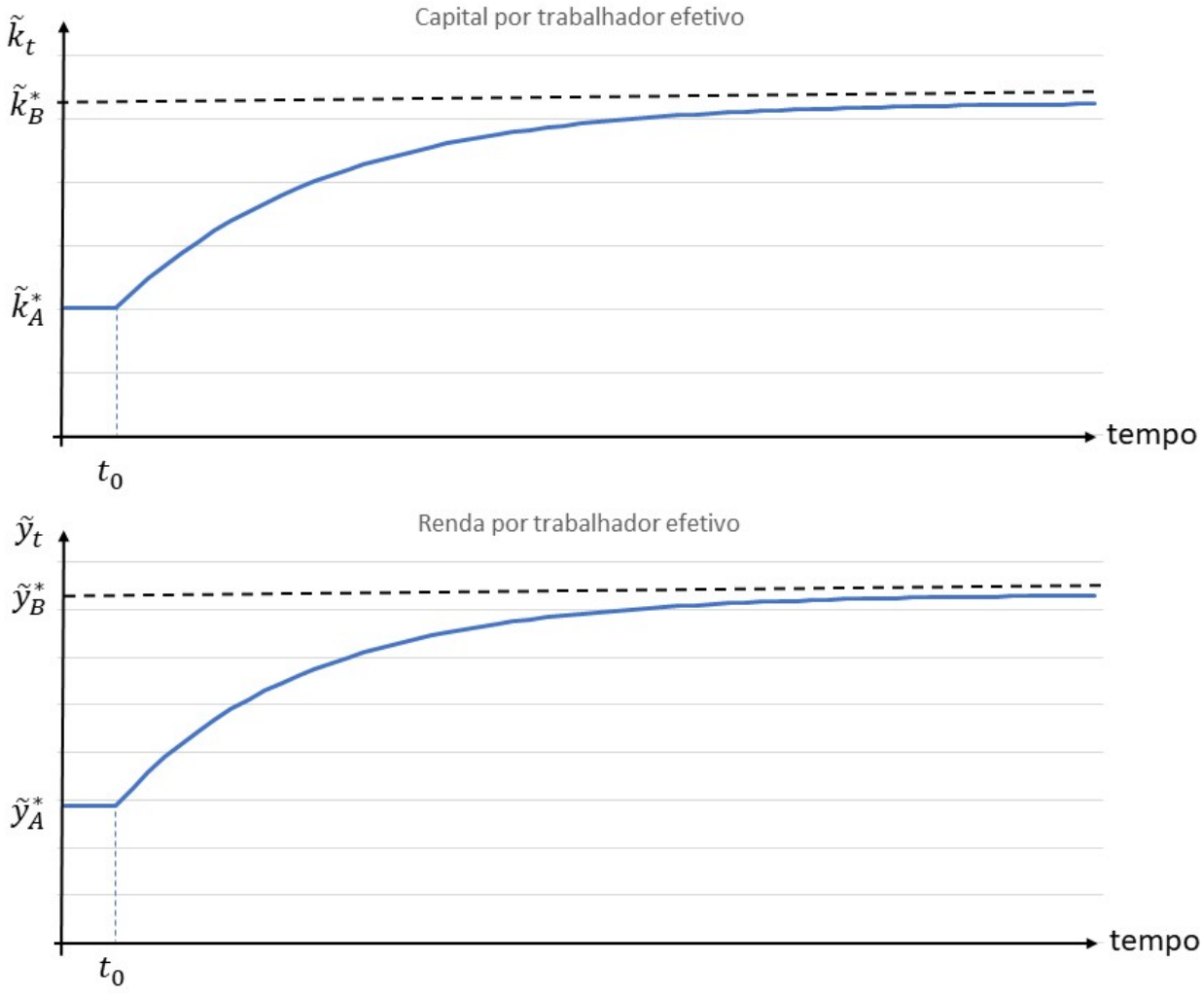
Aumento na taxa de poupança

Figure: Aumento na taxa de poupança



Aumento na taxa de poupança

Figure: Capital e renda por trabalhador efetivo



Aumento na taxa de poupança

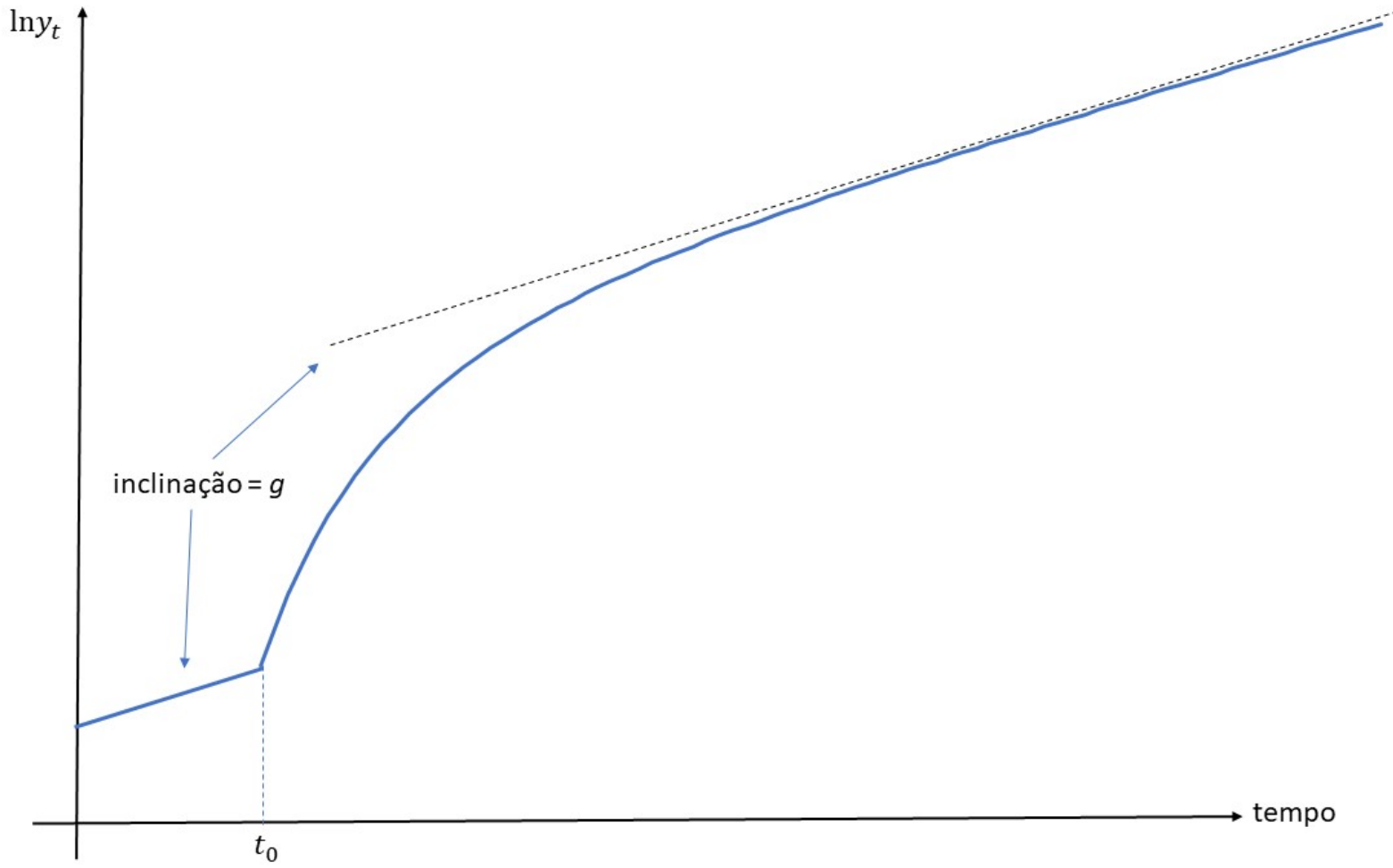



Figure: Renda por trabalhador