S T Q Q S S D 31/08/20

Continuação do exercício da aula anterior: 4 dados

Já tínhamos que $\Omega(\text{total}) = 6^4 = 1296$ (nº total de sequências)
$\Omega(4 \text{ iguais}) = 6$ e $\Omega(0 \text{ iguais ou } 4 \text{dif}) = 360 = 6\times5\times4\times3$
Outros conjuntos:
$\Omega(3 \text{ iguais})$; $\Omega(2 \text{iguais} + 2 \text{ iguais})$ e $\Omega(2 \text{iguais} + 2 \text{dif.})$

* $\Omega(3 \text{iguais}) = \underbrace{6\times1\times1\times5}_{\times 4} = 30\times4$ → 1114 exemplo de sequencia
↳ ou 1141 ou 1411 ou 4111

$\Omega(3 \text{ iguais}) = 120$

* $\Omega(2 \text{iguais } 2 \text{dif}) = 6\times1\times5\times4 = 120$ → 1145
$+6\times5\times2\times4 = 240$ → 1415 ou 1445
$+6\times5\times4\times3 = 360$ → 1451 ou 1454 ou 1455
$= 720$

$\Omega(2 \text{iguais } 2 \text{dif}) = 720$

* $\Omega(2 \text{iguais } 2 \text{iguais}) = 6\times1\times5\times1 = 30$ → 1144
$6\times5\times1\times1 = 30$ → 1414
$6\times5\times1\times1 = 30$ → 1441
$= 90$

$\Omega(2 \text{iguais } 2 \text{iguais}) = 90$

Conferindo se não esquecemos nenhuma sequência
$\Omega(\text{total}) = \Omega(4ig) + \Omega(3ig) + \Omega(2ig\ 2ig) + \Omega(2ig\ 2dif) + \Omega(0ig)$
$= 6 + 120 + 90 + 720 + 360 = 1296$

$P(2 \text{iguais em } 4 \text{dados}) = \Omega(3ig)P_i + \Omega(2ig\ 2ig)P_i + \Omega(2ig\ 2dif)P_i$
$= (120 + 90 + 720)\, 1/6^4 = 930/1296 = 0{,}72$
$\Omega(2 \text{iguais em } 2 \text{dados}) = 1$ $\quad \Omega(\text{total } 2 \text{dados}) = 6\times6 = 36 \Rightarrow P_i = 1/36$
$P(2 \text{iguais em } 2 \text{dados}) = \Omega(2ig)\times P_i = 1/36 = 0{,}03$
$P(4 \text{iguais em } 2 \text{jog.}) = P(2ig \text{ em } \underbrace{4 \text{dados}}_{1^\circ \text{jog.}}) \times P(2ig \text{ em } \underbrace{2 \text{dado}}_{2^\circ \text{jog.}}) = 0{,}72\times0{,}03$

S T Q Q S S D __/__/__

$P(4 \text{ iguais em } 2 \text{ jog}) = 0{,}72 \times 0{,}03 = 0{,}02 \Rightarrow 2\%$

Resposta: A probabilidade de obter 4 números iguais em 2 jogadas (1º com 4 dados reservando 2 dados com números iguais e depois 2º com apenas 2 dados) é de 2%.

g) (a) $P(4 \text{ iguais única jog}) = 6/1296 = 0{,}005 \Rightarrow 0{,}5\%$
(f) $P(4 \text{ iguais com } 2 \text{ jog}) = 0{,}02 \Rightarrow 2\%$
Significa que a chance de obter os 4 números iguais aumentou em 4 vezes sendo em 2 jogadas.

Exercício de sala: bolinhas de cores (energias) diferentes

Urna de 10 bolas: 2 brancas, 5 vermelhas e 3 azuis
a) $\Omega$ (10 bolas)
b) $P(bvva)$
c) $P(2b\,e\,2a)$
d) $b \to \varepsilon_1 = 1\,kcal/m$ $v \to \varepsilon_2 = 2\,kcal/mol$ $a \to \varepsilon_3 = 3\,kcal/mol$
sortear 4 (com reposição = reservatório infinito de bolinhas, Fazer tabela e gráfico $P(E) \times E$ considerando os mesmos %)
e) $E_{mp}$
f) $\langle E \rangle, \langle E^2 \rangle, \sigma$ e $\sigma^2$

a) $\Omega\,(10 \text{ bolas}) = P_{10}^{2,5,3} = \dfrac{10!}{2!\,5!\,3!} = \dfrac{10 \times 9 \times \cancel{8}^{4} \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}{\cancel{2 \times 3 \times 2}\ \cancel{5!}} = 2520$

Resposta: Um total de 2520 sequênciais diferentes.

b) $P(bvva) = P(b) \times P(v) \times P(v) \times P(a)$
$P(b) = 2/10 = 0{,}2$ $P(v) = 5/10 = 0{,}5$ $P(a) = 3/10 = 0{,}3$
$P(bvva) = 0{,}2 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}2 \times 0{,}5^2 \times 0{,}3 = 0{,}015$
$P(bvva) = 1{,}5\%$

c) $P(2b\ e\ 2a) = \Omega(2b\ e\ 2a)\, P(b)^2\, P(a)^2$

$\Omega(2b\ e\ 2a) = P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{\cancel{4}^2 \times 3 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{2}} = 6$

$P(2b\ e\ 2a) = 6 \times 0{,}2^2 \times 0{,}3^2 = 0{,}0216 \Rightarrow P(2b\ e\ 2a) = 2{,}2\%$

d) $P(b \Rightarrow \varepsilon = 1) = 0{,}2$; $P(v \Rightarrow \varepsilon = 2) = 0{,}5$ e $P(a \Rightarrow \varepsilon = 3) = 0{,}3$     $E = \varepsilon(1) + \varepsilon(2) + \varepsilon(3) + \varepsilon(4)$

$\varepsilon = 1, 2$ ou $3$ kcal/mol

menor $E = 1+1+1+1 = 4$ kcal/mol     $4 \leq E \leq 12$ kcal/mol

maior $E = 3+3+3+3 = 12$ kcal/mol

| E | Ω(E) | P(E) |
|---|---|---|
| 4 | 1 | $0{,}2^4 = 0{,}0016$ |
| 5 | 4 | $4 \times 0{,}2^3 \times 0{,}5 = 0{,}016$ |
| 6 | 4 6 | $4 \times 0{,}2^3 \times 0{,}3 + 6 \times 0{,}2^2 \times 0{,}5^2 = 0{,}0696$ |
| 7 | 12 4 | $12 \times 0{,}2^2 \times 0{,}5 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}2 \times 0{,}5^3 = 0{,}1720$ |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |

$E = 4 = 1+1+1+1 \Rightarrow \Omega(4b) = 1 \Rightarrow P(4b) = 0{,}2^4$

$E = 5 = 1+1+1+2 \Rightarrow \Omega(3b\ e\ 1v) = P_4^3 = 4$

$P(3b\ e\ 1v) = \Omega(3b\ e\ 1v)\, P(b)^3\, P(v)^1 = 4 \times 0{,}2^3 \times 0{,}5$

$E = 6 = 1+1+1+3 \Rightarrow \Omega(3b\ e\ a) = P_4^3 = 4 \Rightarrow P(3b\ e\ a) = \Omega(3b\ e\ a)\, P(b)^3\, P(a)^1$

$1+1+2+2 \Rightarrow \Omega(2b\ e\ 2v) = P_4^{2,2} = 6 \Rightarrow P(2b\ e\ 2v) = \Omega(2b\ e\ 2v)\, P(b)^2\, P(v)^2$

$E = 7 = 1+1+2+3 \Rightarrow \Omega(2b\ e\ 1v\ e\ 1a) = P_4^2 = 12 \Rightarrow P(2b1v1a) = \Omega(2b1v1a)\, P(b)^2\, P(v)\, P(a)$

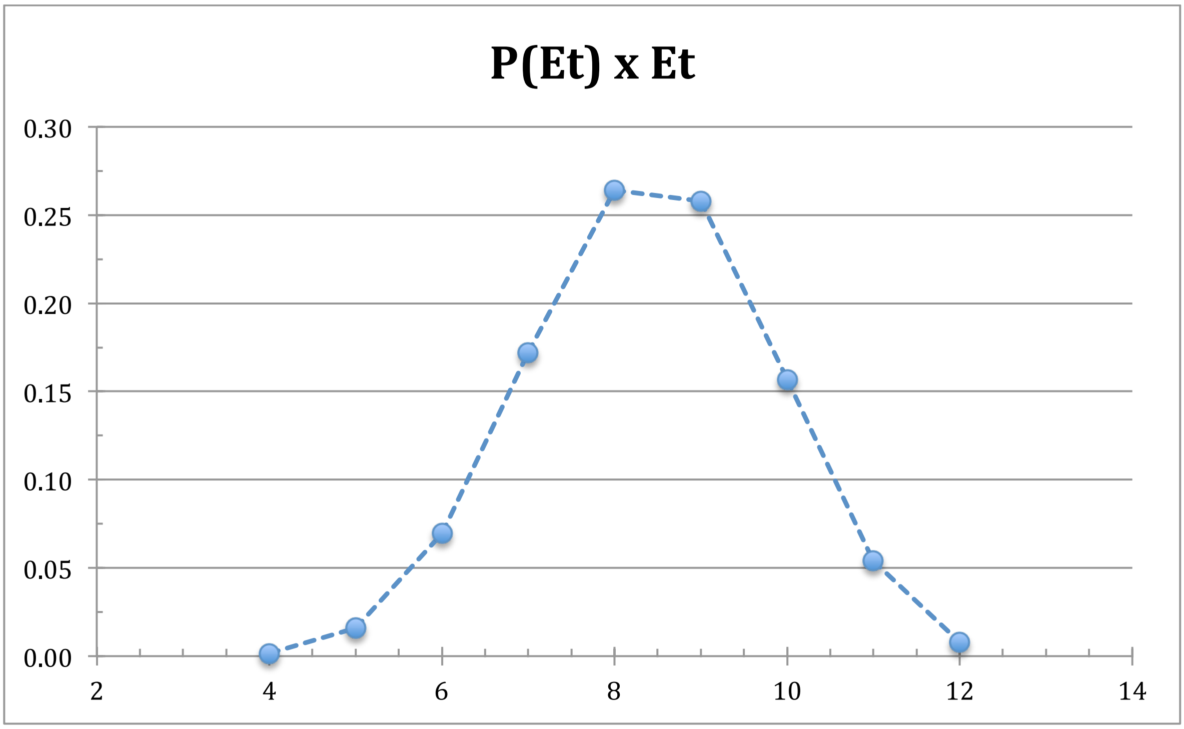
$1+2+2+2 \Rightarrow \Omega(1b\ e\ 3v) = P_4^3 = 4 \Rightarrow P(1b3v) = \Omega(1b3v)\, P(b)\, P(v)^3$

2) Numa urna existem 10 bolas: 2 brancas (b) , 5 vermelhas (v) e 3 azuis (a).
(a) Determine a multiplicidade de sequências que existem com estas 10 bolas;
(b) Determine a probabilidade de sortear 4 bolas e obter a sequência bvva, P(bvva);
(c) Determine a probabilidade de sortear 4 bolas e obter 2b e 2a, P(2b e 2a);
(d) Assumindo que as bolas de cores diferentes são partículas de energias diferentes (brancas ➔ $\varepsilon_1$ = 1 kcal/mol; vermelhas ➔ $\varepsilon_2$ = 2 kcal/mol e azuis ➔ $\varepsilon_3$ = 3 kcal/mol), e que existe agora um reservatório infinito destas partículas mantendo a mesma proporção (20% brancas, 50% vermelhas e 30% azuis) determine a distribuição de energia total, $E$, que se obtém para um sistema de 4 partículas sorteadas do reservatório (construa a tabela e gráfico e discuta se é uma distribuição simétrica);
Para esta distribuição de energia:
(e) Determine a energia total mais provável, $E_{mp}$;
(f) Determine os valores: da média $\langle E \rangle$, da média quadrática $\langle E^2 \rangle$, do desvio padrão $\sigma$ e da variância $\sigma^2$;

Resposta:
Nesta disciplina, nos problemas se não houver comentários explícitos sobre o sorteio ser com ou sem reposição, vamos adotar sempre com reposição, pois este é o caso que se aplica a descrição de sistemas com partículas. P(b)=2/10; P(v)=5/10 e P(a)=3/10
(a) Permutação com repetições: 10!/2!5!3! = 10x9x8x7x6/2x3x2= 2520
(b) Os sorteios são independentes. Então P(bvva)= (2/10)x(5/10)x(5/10)x(3/10)=150/$(10)^4$=0,0150
(c) Em qualquer ordem: P(2b e 2a)=ΩxP(bbaa)=4!/(2!2!)x$(2/10)^2$x$(3/10)^2$ = 6x4x9/$(10)^4$=0,0216
(d)

$$P(\varepsilon_1 = 1) = 2/10;\;\; P(\varepsilon_2 = 2) = 5/10;\;\; P(\varepsilon_3 = 3) = 3/10;$$

| $E_T$ | Seq. | $\Omega(E_T)$ | $P_i(E_T)$ | $P(E_T)$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1+1+1+1 | 4!/4!=1 | $(2/10)^4$ | $1x(2/10)^4$=0,0016 |
| 5 | 1+1+1+2 | 4!/3!=4 | $(2/10)^3(5/10)^1$ | $4x(2/10)^3(5/10)^1$=0,0160 |
| 6 | 1+1+1+3<br>1+1+2+2 | 4!/3!=4<br>4!/2!2!=6 | $(2/10)^3(3/10)^1$<br>$(2/10)^2(5/10)^2$ | $4x(2/10)^3(3/10)^1$+<br>$6x(2/10)^2(5/10)^2$=0,0696 |
| 7 | 1+1+2+3<br>1+2+2+2 | 4!/2!=12<br>4!/3!=4 | $(2/10)^2(5/10)^1(3/10)^1$<br>$(2/10)^1(5/10)^3$ | $12x(2/10)^2(5/10)^1(3/10)^1$+<br>$4x(2/10)^1(5/10)^3$=0,1720 |
| 8 | 2+2+2+2<br>1+2+2+3<br>1+1+3+3 | 4!/4!=1<br>4!/2!=12<br>4!/2!2!=6 | $(5/10)^4$<br>$(2/10)^1(5/10)^2(3/10)^1$<br>$(2/10)^2(3/10)^2$ | $1x(5/10)^4$+<br>$12x(2/10)^1(5/10)^2(3/10)^1$+<br>$6x(2/10)^2(3/10)^2$=0,2641 |
| 9 | 2+2+2+3<br>1+2+3+3 | 4!/3!=4<br>4!/2!=12 | $(5/10)^3(3/10)^1$<br>$(2/10)^1(5/10)^1(3/10)^2$ | $4x(5/10)^3(3/10)^1$+<br>$12x(2/10)^1(5/10)^1(3/10)^2$=0,2580 |
| 10 | 2+2+3+3<br>1+3+3+3 | 4!/2!2!=6<br>4!/3!=4 | $(5/10)^2(3/10)^2$<br>$(1/10)^1(3/10)^3$ | $6x(5/10)^2(3/10)^2$+<br>$4x(1/10)^1(3/10)^3$=0,1566 |
| 11 | 2+3+3+3 | 4!/3!=4 | $(5/10)^1(3/10)^3$ | $4x(5/10)^1(3/10)^3$=0,0540 |
| 12 | 3+3+3+3 | 4!/4!=1 | $(3/10)^4$ | $1x(3/10)^4$=0,0081 |




(e) Pela tabela ou gráfico podemos ver que 8 kcal/mol é a energia mais provável. $E_{mp}$ = 8 kcal/mol

(f) Usando os valores da tabela:

$$\langle E_T \rangle = \sum_{E_T=4}^{12} E_T P(E_T)$$

$\langle E_T \rangle$ = 4x0,0016 + 5x0,0160 + 6x0,0696 + 7x0,1720 + 8x0,2641 + 9x0,2580 + 10x0,1566 + 11x0,0540 + 12x0,0081 = 8,4 kcal/mol

$$\langle E_T^2 \rangle = \sum_{E_T=4}^{12} E_T^2 P(E_T)$$

$\langle E_T^2 \rangle$ = $4^2$x0,0016 + $5^2$x0,0160 + $6^2$x0,0696 + $7^2$x0,1720 + $8^2$x0,2641 + $9^2$x0,2580 + $10^2$x0,1566 + $11^2$x0,0540 + $12^2$x0,0081 = 72,52 (kcal/mol)$^2$

$\sigma^2 = \langle E_T^2 \rangle - \langle E_T \rangle^2$ = 72,52 – 70,56 = 1,96 (kcal/mol)$^2$ e $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ 1,40 kcal/mol