Exercícios resolvidos em sala: Probabilidades

1) Um jogo de dados consiste em jogar simultaneamente 4 dados.

(a) Determine a probabilidade de obter todos os 4 dados com o mesmo número numa única jogada;

(b) Determine a probabilidade de obter todos os 4 dados com números diferentes numa única jogada;

(c) Construa a tabela e o gráfico de $P(s)$ onde s= soma;

(d) Determine a s mais provável;

(e) Determine os valores: da média $\langle s \rangle$, da média quadrática $\langle s^2 \rangle$, do desvio padrão σ e da variância σ^2;

(f) Se após uma jogada, o jogador reservou 2 dados com mesmo número e jogou os outros 2 novamente, determine a probabilidade de obter os 4 dados com o mesmo número;

(g) Discuta o resultado de (a) e (f).

Resposta:

A probabilidade de qualquer face é igual: P(?)=1/6 (estamos assumindo a equiprobabilidade)

(a) Sabendo que cada dado é **independente** do outro, a probabilidade de obter uma sequência qualquer de 4 dados é igual ao produto da probabilidades:

P(?,?,?,?)=P(?) x P(?) x P(?) x P(?)= $(1/6)^4$

Então cada sequência tem a mesma probabilidade $P_i = (1/6)^4$ independentemente dos 4 valores das faces sorteadas.

Mas quando queremos a probabilidade de um conjunto específico (exemplo: 4 número iguais ou 4 números diferentes ou uma sequência crescente de números) temos que determinar a multiplicidade deste conjunto, e a probabilidade final de um conjunto A será $P(A) = \Sigma_i^{i \in A} \Omega_i \times P_i$. Neste caso como todos os P_i são iguais, então $P(A) = P_i \times \Sigma_i^{i \in A} \Omega_i = P_i \times \Omega(A) \Rightarrow$ $\mathbf{P(A) = \Omega(A) \times P_i}$.

No caso dos 4 dados serem iguais, a multiplicidade de sequências é a permutação de 4 elementos com 4 repetições, $P_N^n = \frac{N!}{n!}$ (ver notas de aula: Conceitos Importantes de Probabilidade)

$\Omega(1,1,1,1)= \Omega(2,2,2,2)= \Omega(3,3,3,3)= \Omega(4,4,4,4)= \Omega(5,5,5,5)= \Omega(6,6,6,6)= 4!/4! = 1$.

Sendo assim, a probabilidade de sortear uma sequencia específica com os 4 números iguais é:

$P(1,1,1,1)= P(2,2,2,2)= P(3,3,3,3)= P(4,4,4,4)= P(5,5,5,5)= P(6,6,6,6)= 1 \times (1/6)^4 = 0{,}0008 = 0{,}08\%$.

e a probabilidade de sortear uma sequência qualquer com os 4 números iguais é um conjunto com as sequências 1,1,1,1 ou 2,2,2,2 ou 3,3,3,3 ou 4,4,4,4 ou 5,5,5,5 ou 6,6,6,6. Então:

$P(4\ \text{iguais}) = P(1,1,1,1) + P(2,2,2,2) + P(3,3,3,3)+ P(4,4,4,4)+ P(5,5,5,5)+ P(6,6,6,6) = 6 \times (1/6)^4 = 0{,}0046 = 0{,}46\%$

Resposta: P(4 iguais) = 0,0046 ou 0,46%

(b) Neste caso temos que achar a multiplicidade de 6 elementos diferentes (1, 2, 3, 4, 5 ou 6) para colocar em 4 posições onde um número sorteado na primeira posição tem que ser retirado para o sorteio da segunda posição e assim por diante. Então $\Omega(4\ \text{diferentes}) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 6!/2! = 360$

Este tipo de sorteio é o arranjo sem repetição $A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$ (ver notas de aula).

Então a probabilidade é $P(4\ \text{diferentes}) = \Omega(4\ \text{diferentes}) \times P_i = 360 \times (1/6)^4 = 360/1296 = 0{,}278 = 27{,}8\%$

Resposta: P(4 diferentes) = 0,278 ou 27,8%

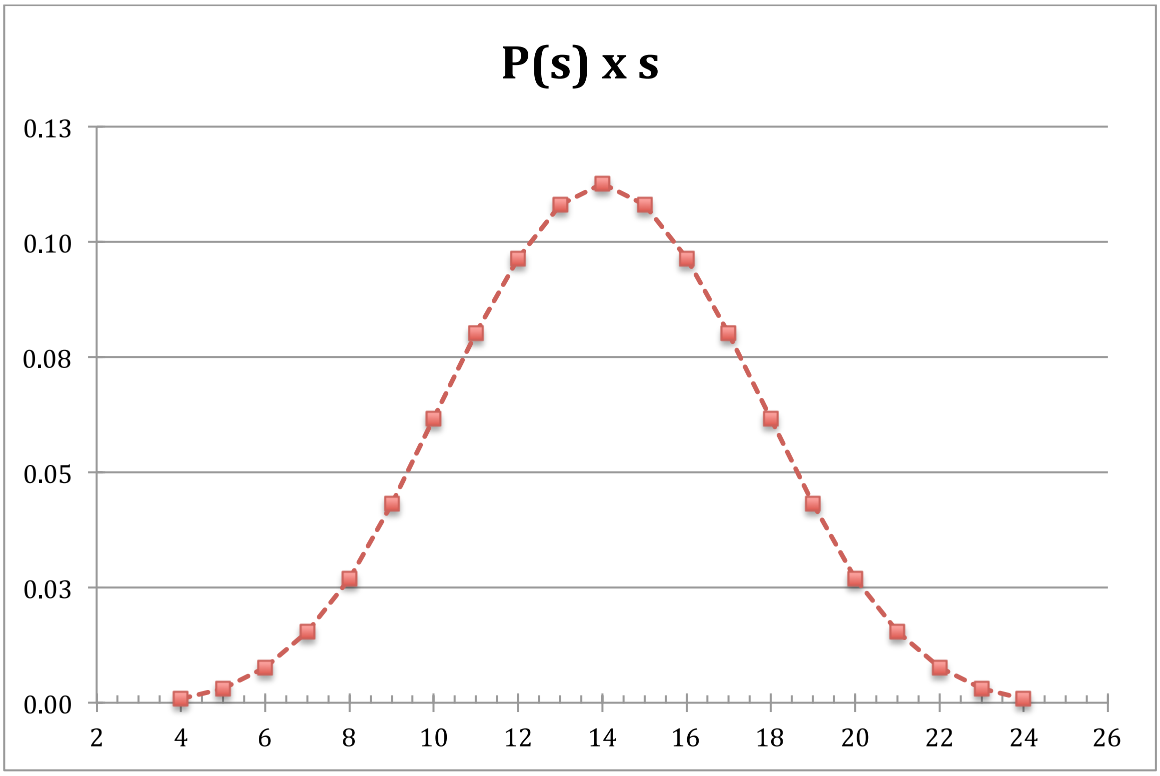
(c) A soma dos valores dos 4 dados tem um valor mínimo de 4=1+1+1+1 e um valor máximo de 24=6+6+6+6. Assim, vamos analisar todos os valores de $4 \leq s \leq 24$. Serão 21 valores da soma e como visto no exercício da aula anterior como a quantidade dos valores das faces é finito (só 6 valores) teremos uma distribuição simétrica de $\Omega(s)$ com formato de sino, ou seja, o valor do meio é o máximo e os demais vão aumentando das extremidades para o meios Ω(4)= Ω(24) < Ω(5)= Ω(23) < Ω(6)= Ω(22)< Ω(7)= Ω(21) < Ω(8)= Ω(20) < Ω(9)= Ω(19) < Ω(10)= Ω(18) < Ω(11)= Ω(17) < Ω(12)= Ω(16) < Ω(13)= Ω(15) < Ω(14). Então o máximo valor de multiplicidade é no meio dos valores de soma que vão de 4 a 24, portanto em 14. Sendo assim, vamos escrever as sequências de 4 até 14.

S	Seq.	Ω(s)	$P_i(s)$	P(s)
4	1+1+1+1	4!/4!=1	$(1/6)^4$	$1x(1/6)^4$=0,0008
5	1+1+1+2	4!/3!=4	$(1/6)^4$	$4x(1/6)^4$=0,0030
6	1+1+1+3 1+1+2+2	4!/3!=4 + 4!/2!2!=6 =10	$(1/6)^4$	$10x(1/6)^4$=0,0077
7	1+1+1+4 1+1+2+3 1+2+2+2	4!/3!=4 + 4!/2!=12 + 4!/3!=4 = 20	$(1/6)^4$	$20x(1/6)^4$=0,0154
8	1+1+1+5 1+1+2+4 1+2+2+3 1+1+3+3 2+2+2+2	4!/3!=4 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!2!=6 + 4!/4!=1 = 35	$(1/6)^4$	$35x(1/6)^4$= 0,0270
9	1+1+1+6 1+1+2+5 1+1+3+4 1+2+2+4 1+2+3+3 2+2+2+3	4!/3!=4 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/3!=4 = 56	$(1/6)^4$	$56x(1/6)^4$=0,0432
10	1+1+2+6 1+1+3+5 1+1+4+4 1+2+2+5 1+2+3+4 1+3+3+3 2+2+2+4 2+2+3+3	4!/2!=12 4!/2!=12 4!/2!2!=6 4!/2!=12 4!=24 4!/3!=4 4!/3!=4 4!/2!2!=6 = 80	$(1/6)^4$	$80x(1/6)^4$=0,0617
11	1+1+3+6 1+1+4+5 1+2+3+5 1+2+4+4 1+3+3+4 1+3+4+4 2+2+2+5 2+2+3+4 2+3+3+3	4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!=24 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/3!=4 + 4!/2!=12 + 4!/3!=4 = 104	$(1/6)^4$	$104x(1/6)^4$=0,0802
12	1+1+4+6 1+1+5+5 1+2+3+6	4!/2!=12 + 4!/2!2!=6 + 4!=24 +	$(1/6)^4$	$125x(1/6)^4$=0,0964

	1+2+4+5 1+3+3+5 1+3+4+4 2+2+2+6 2+2+3+5 2+2+4+4 2+3+3+4 3+3+3+3	4!=24 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/3!=4 + 4!/2!=12 + 4!/2!2!=6 + 4!/2!=12 + 4!/4!=1 = 125		
13	1+1+5+6 1+2+4+6 1+2+5+5 1+3+3+6 1+3+4+5 1+4+4+4 2+2+3+6 2+2+4+5 2+3+3+5 2+3+4+4 3+3+3+4	4!/2!=12 + 4!=24 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!=24 + 4!/3!=4 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/3!=4 = 140	$(1/6)^4$	$140x(1/6)^4$=0,1080
14	1+1+6+6 1+2+5+6 1+3+4+6 1+3+5+5 1+4+4+5 2+2+4+6 2+2+5+5 2+3+3+6 2+3+4+5 2+4+4+4 3+3+3+5 3+3+4+4	4!/2!2!=6 + 4!=24 + 4!=24 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!2!=6 + 4!/2!=12 + 4!=24 + 4!/3!=4 + 4!/3!=4 + 4!/2!2!=6 = 146	$(1/6)^4$	$146x(1/6)^4$=0,1126
15	1+2+6+6 1+3+5+6 1+4+4+6 1+4+5+5 2+2+5+6 2+3+4+6 2+3+5+5 2+4+4+5 3+3+3+6 3+3+4+5 3+4+4+4	4!/2!=12 + 4!=24 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!=24 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/3!=4 + 4!/2!=12 + 4!/3!=4 = 140	$(1/6)^4$	$140x(1/6)^4$=0,1080
16	1+3+6+6 1+4+5+6	4!/2!=12 + 4!=24 +	$(1/6)^4$	$125x(1/6)^4$=0,0964

	1+5+5+5 2+2+6+6 2+3+5+6 2+4+4+6 2+4+5+5 3+3+4+6 3+3+5+5 3+4+4+5 4+4+4+4	4!/3!=4 + 4!/2!2!=6 + 4!=24 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!2!=6 + 4!/2!=12 + 4!/4!=1 = 125		
17	1+4+6+6 1+5+5+6 2+3+6+6 2+4+5+6 2+5+5+5 3+3+5+6 3+4+4+6 3+4+5+5 4+4+4+5	4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!=24 + 4!/3!=4 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/3!=4 = 104	$(1/6)^4$	$104x(1/6)^4=0{,}0802$
18	1+5+6+6 2+4+6+6 2+5+5+6 3+3+6+6 3+4+5+6 3+5+5+5 4+4+4+6 4+4+5+5	4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!2!=6 + 4!=24 + 4!/3!=4 + 4!/3!=4 + 4!/2!2!=6 = 80	$(1/6)^4$	$80x(1/6)^4=0{,}0617$
19	1+6+6+6 2+5+6+6 3+4+6+6 3+5+5+6 4+4+5+6 4+5+5+5	4!/3!=4 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/2!=12 + 4!/3!=4 = 56	$(1/6)^4$	$56x(1/6)^4=0{,}0432$
20	2+6+6+6 3+5+6+6 4+4+6+6 4+5+5+6 5+5+5+5	4!/3!=4 + 4!/2!=12 + 4!/2!2!=6 + 4!/2!=12 + 4!/4!=1 = 35	$(1/6)^4$	$35x(1/6)^4=0{,}0270$
21	3+6+6+6 4+5+6+6 5+5+5+6	4!/3!=4 + 4!/2!=12 + 4!/3!=4 = 20	$(1/6)^4$	$20x(1/6)^4=0{,}0154$
22	4+6+6+6 5+5+6+6	4!/3!=4 + 4!/2!2!=6	$(1/6)^4$	$10x(1/6)^4=0{,}0077$

		= 10		
23	5+6+6+6	4!/3!=4	$(1/6)^4$	$4x(1/6)^4$=0,0030
24	6+6+6+6	4!/4!=1	$(1/6)^4$	$1x(1/6)^4$=0,0008



(d)
Resposta: Analisando a tabela e o gráfico, verificamos que o valor mais provável da soma é 14.

(e) Usando os valores da tabela:

$$\langle s\rangle = \sum_{s=4}^{24} s\,P(s)$$

$\langle s\rangle$ = 4x0,0008 + 5x0,0030 + 6x0,0077 + 7x0,0154 + 8x0,0270 + 9x0,0432 + 10x0,0617 + 11x0,0802 + 12x0,0964 + 13x0,1080 + 14x0,1126 + 15x0,1080 +16x0,0964 + 17x0,0802 + 18x0,0617 + 19x0,0432 + 20x0,0270 + 21x0,0154 + 22x0,0077 + 23x0,0030 + 24x0,0008 = 14

$$\langle s^2\rangle = \sum_{s=4}^{24} s^2\,P(s)$$

$\langle s^2\rangle$ = 4^2x0,0008 + 5^2x0,0030 + 6^2x0,0077 + 7^2x0,0154 + 8^2x0,0270 + 9^2x0,0432 + 10^2x0,0617 + 11^2x0,0802 + 12^2x0,0964 + 13^2x0,1080 + 14^2x0,1126 + 15^2x0,1080 +16^2x0,0964 + 17^2x0,0802 + 18^2x0,0617 + 19^2x0,0432 + 20^2x0,0270 + 21^2x0,0154 + 22^2x0,0077 + 23^2x0,0030 + 24^2x0,0008 = 207,5

$\sigma^2 = \langle s^2\rangle - \langle s\rangle^2$ = 207.5 – 196 = 11,5 e σ = 3,4

Resposta: $\langle s \rangle = 14$; $\langle s^2 \rangle = 207{,}5$; $\sigma = 3{,}4$; $\sigma^2 = 11{,}5$

(f) As multiplicidades dos diferentes tipos de conjunto são:
Ω(4 iguais) = 6x1x1x1 = 6

Ω(3 iguais) = (6x1x1x5) + (6x1x5x1) + (6x5x1x1) + (5x6x1x1) = 6x5x4 = 120

6 possibilidades	=1º	=1º	5 possibilidades	30 sequências
6 possibilidades	=1º	5 possibilidades	=1º	30 sequências
6 possibilidades	5 possibilidades	=1º	=1º	30 sequências
5 possibilidades	6 possibilidades	=1º	=1º	30 sequências

Ω(2 iguais e 2 diferentes) = 6x[(1x5x4)+(5x2x4)+(5x4x3)] = 6x(20+40+60) = 6x120 = 720

6 possibilidades	=1º	5 possibilidades	4 possibilidades	120 sequências
6 possibilidades	5 possibilidades	2 possibilidades (=1º ou =2º)	4 possibilidades	240 sequências
6 possibilidades	5 possibilidades	4 possibilidades	3 possibilidades (=1º ou =2º ou =3º)	360 sequências

Ω(2 iguais e 2 iguais) = 6x(1x5x1+5x2x1)= 6x15 = 90

6 possibilidades	=1º	5 possibilidades	=2º	30 sequências
6 possibilidades	5 possibilidades	=1º	=2º	30 sequências
6 possibilidades	5 possibilidades	=2º	=1º	30 sequências

Ω(0 iguais ou 4 diferentes) = 6x5x4x3 = 360

Ω(total) = 6^4 = 1296 ou
Ω(total) =Ω(4 iguais)+ Ω(3 iguais)+ Ω(2 iguais e 2 diferentes)+ Ω(2 iguais e 2 iguais)+ Ω(0 iguais ou 4 diferentes) = 6+120+720+90+360 = 1296

Para separar 2 dados na 1ª jogada temos o conjunto: 3 iguais ou 2 iguais e 2 diferentes ou 2 iguais e 2 iguais. Então a multiplicidade da 1ª jogada Ω(1ª) = Ω(3 iguais)+ Ω(2 iguais e 2 diferentes)+ Ω(2 iguais e 2 iguais) = 120+720+90 = 930
A probabilidade da 1ª jogada com 4 dados é P(1ª)= 930x$(1/6)^4$ = 0,7176.

Uma vez os dois números da primeira jogada estejam definidos, qual é a probabilidade de sortear 2 números iguais a um específico obtido da primeira jogada: Ω(2ª) = 1.
A probabilidade da 2ª jogada com 2 dados é P(2ª)= $(1/6)^2$ = 0,0278.

A probabilidade total é o produto das duas considerando que a primeira jogada é independente da segunda jogada, portanto é P(4 iguais em 2 jogadas: 4 dados e 2 dados) = 930x$(1/6)^4$x$(1/6)^2$= 930x$(1/6)^6$= 0,0199 ou 2%

Resposta: A probabilidade de tirar 4 números iguais em duas jogadas (4 dados + 2 dados) é 0,0199 ou ~2%.

g)
A probabilidade de tirar os 4 números numa jogada só é 0,0046 ou ~0,5% e de tirar 4 números iguais em duas jogadas (4 dados + 2 dados) é 0,0199 ou ~2%. Portanto é muito mais fácil em duas jogadas, pois a probabilidade é cerca de 4 vezes maior que em uma jogada.

S T Q Q S S D 27/08/20

Hoje: Solução do exercício dos 4 dados

a) P(4 iguais)? — 6 faces = 1 a 6

b) P(4 dif)? — menor valor $s = 4 = 1+1+1+1$

c) $P(s) \times s$ — maior valor $s = 24 = 6+6+6+6$; $4 \leq s \leq 24$

tabela e gráfico

d) s mais provavel

e) $\langle s \rangle$, $\langle s^2 \rangle$, σ e σ^2

f) P(4 iguais em 2 jogadas: 4+2)?

g) Comparar (a) e (f)

Assumir a equiprobabilidade $P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6=1$

$\sum P_i = 1$; $\to P_1=P_2=P_3=P_4=P_5=P_6=P_i$; $6P_i=1$

$P_i = 1/6$ 4 dados com eventos independentes

4 dados $\boxed{?}\boxed{?}\boxed{?}\boxed{?}$ $P(????) = P(?)P(?)P(?)P(?) = \left(\frac{1}{6}\right)^4$

Qualquer sequência de 4 faces dos dados tem a mesma probabilidade $(1/6)^4 = 1/6^4$

Nº total sequênciais $\Rightarrow \Omega$(total) = 6 × 6 × 6 × 6 = 6^4 = 1296 possibilidade

Quais as sequências com 4 iguais: 1111 ou 2222 ou 3333 ou 4444 ou 5555 ou 6666 ; Ω(4 iguais) = 6

$P(4\text{ iguais}) = 6/6^4$; Ω(4 iguais) = 6×1×1×1 = 6

P(4 iguais) = 0,0046 = 0,46% ou ~0,5%

$\boxed{P(4\text{ iguais}) \cong 0{,}5\%}$

$P(A) = \sum \Omega_i P_i$

P_i = iguais $P(A) = P_i \sum \Omega_i$

$P(A) = \Omega(A) P_i$

b) P(4 dif) $\Rightarrow \Omega(4\text{ dif.}) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

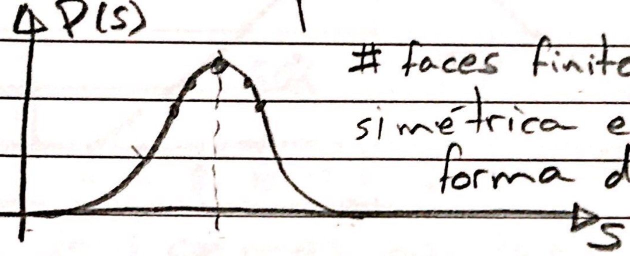
$A_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 360$; $P(4\text{dif}) = \Omega(4\text{dif}) P_i$

$P(4\text{dif}) = 360/6^4 = 360/1296 = 0{,}278 = 27{,}8\%$

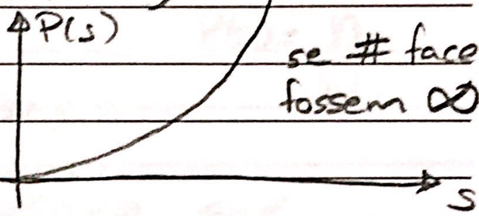
$\boxed{P(4\text{ dif.}) \cong 28\%}$

c) Tabela e gráfico $P(s) \times s$ $4 \leq s \leq 24$

Quando a quantidade de elementos é pequena → (faces)



\# faces finito e pequeno simétrica e em forma de sino



se \# faces fossem ∞

s	$\Omega(s)$	$P(s)$
4 (=24)	1	$1/6^4 = 0{,}0008$
5 (=23)	4	$4/6^4 = 0{,}0030$
6 (=22)	10	$10/6^4 = 0{,}0077$
7 (=21)	20	$20/6^4 = 0{,}0154$
8 (=20)	35	$35/6^4 = 0{,}0270$
9 (=19)	56	$56/6^4 = 0{,}0432$
10 (=18)	80	$80/6^4 = 0{,}0617$
11 (=17)	104	$104/6^4 = 0{,}0802$
12 (=16)	125	$125/6^4 = 0{,}0964$
13 (=15)	140	$140/6^4 = 0{,}1080$
14	146	$146/6^4 = 0{,}1126$

$P_4^3 = 4!/3! = 4$

$P_4^{2,2} = 4!/2!2! = 6$

$P_4^2 = 4!/2! = 12$

$P_4^4 = 4!/4! = 1$

$s = 4 = 1+1+1+1$ $\quad \Omega(4) = 1$

$s = 5 = 1+1+1+2 \Rightarrow P_4^3 = 4!/3! = 4 \Rightarrow \Omega(5) = 4$

$s = 6 = 1+1+1+3$ ou $1+1+2+2 \Rightarrow P_4^3 + P_4^{2,2} \Rightarrow \Omega(6) = 4+6 = 10$

$s = 7 = 1+1+1+4$ ou $1+1+2+3$ ou $1+2+2+2 \Rightarrow P_4^3 + P_4^2 + P_4^3 = 4+12+4 = 20$

$s = 8 = 1+1+1+5$ ou $1+1+2+4$ ou $1+1+3+3$ ou $1+2+2+3$ ou $2+2+2+2$

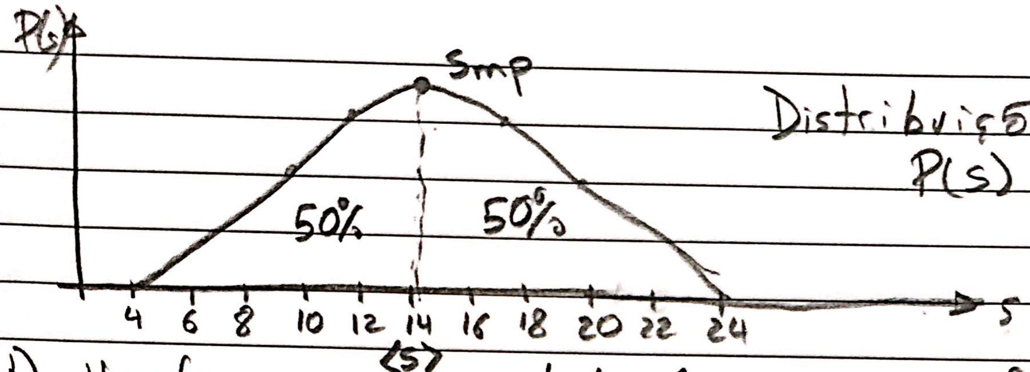
$\Rightarrow P_4^3 + P_4^2 + P_4^{2,2} + P_4^2 + P_4^4 = 4+12+6+12+1 = 35$

$s = 9 = 1+1+1+6$ ou $1+1+2+5$ ou $1+1+3+4$ ou $1+2+2+4$ ou $1+2+3+3$ ou

$2+2+2+3 \Rightarrow P_4^3 + P_4^2 + P_4^2 + P_4^2 + P_4^2 + P_4^3 \Rightarrow \Omega(9) = 56$

$s = 10$ ... (fazer em casa)

S T Q Q S S D ___/___/___



Distribuição de probabilidades
$P(s) \times s$

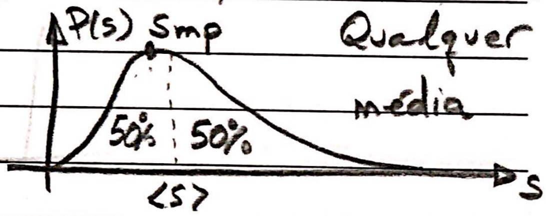
$P(s) = \frac{n_s}{N}$

d) Verificamos na tabela e no gráfico que $s=14$ é o mais provável (Smp)

e) médio $\langle s \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s_i$

$\langle s \rangle = \sum_{s=4}^{24} s_i P(s_i) = 4 \times 0{,}008 + 5 \times 0{,}0030 + 6 \times 0{,}0077 + \dots$
$+ \dots + 23 \times 0{,}0030 + 24 \times 0{,}0008 =$

$\langle s \rangle = \sum_{s=4}^{24} s_i \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum s_i n_i$



Qualquer média

$\langle s^2 \rangle = \sum_{s=4}^{24} s_i^2 P(s_i) = 4^2 \times 0{,}008 + 5^2 \times 0{,}0030 + 6^2 \times 0{,}0077 \dots$
$+ \dots + 23^2 \times 0{,}0030 + 24^2 \times 0{,}0008 =$

$\sigma^2 = \langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2$ variância

$\sigma = \sqrt{\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2} = \sqrt{\sigma^2}$ desvio padrão.

Resposta: $\langle s \rangle = 14$ $\langle s^2 \rangle = 207{,}5$ $\sigma^2 = 11.8$ $\sigma = 3.4$

f) 1º jogada 2 dados iguais $\Rightarrow \Omega(1^o) = \Omega(B) + \Omega(C) + \Omega(D)$
todos os conjuntos:

A = 4 iguais x
B = 3 iguais
C = 2 iguais + 2 diferentes
D = 2 iguais + 2 iguais
E = 0 iguais = 4 dif.

$\Omega(A) + \Omega(B) + \Omega(C) + \Omega(D) + \Omega(E) = \Omega_{total}$
$\Omega(A) = 6$ (a)
$\Omega(E) = 360$ (b)

$\Omega(2^o) =$