

5^a Lista de exercícios

Intr. à Relatividade — Data de entrega: 08/06

- ① [1.5] Nas minhas notas de aula eu discuti como uma onda gravitacional se propagando na direção z possui amplitudes $\epsilon_{\mu\nu}$, com:

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^+ & h^\times & 0 \\ 0 & h^\times & -h^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma transformação de coordenadas $x \rightarrow x'$ que é simplesmente uma rotação em torno do eixo z por um ângulo φ é dada pela matriz:

$$R^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que as perturbações da métrica se transformam como $h'_{\mu\nu} = R^\alpha_\mu R^\beta_\nu h_{\alpha\beta}$, mostre que as amplitudes no novo referencial, $\epsilon'_{\mu\nu}$, são tais que $h'^+ = h^+ \cos 2\varphi - h^\times \sin 2\varphi$ e $h'^\times = h^\times \cos 2\varphi + h^+ \sin 2\varphi$.

Solução: Como ambos, R^α_β e $\epsilon_{\mu\nu}$ só possuem componentes 1 e 2:

$$\epsilon'_{11} = h'^+ = R^1_1 R^1_1 \epsilon_{11} + R^1_1 R^2_1 \epsilon_{12} + R^2_1 R^1_1 \epsilon_{21} + R^2_1 R^2_1 \epsilon_{22} = \quad (1)$$

$$= h^+ (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - h^\times (2 \sin \varphi \cos \varphi) = h^+ \cos 2\varphi - h^\times \sin 2\varphi. \quad (2)$$

$$\epsilon'_{12} = h'^\times = R^1_1 R^1_2 \epsilon_{11} + R^1_1 R^2_2 \epsilon_{12} + R^2_1 R^1_2 \epsilon_{21} + R^2_1 R^2_2 \epsilon_{22} = \quad (3)$$

$$= h^+ (2 \sin \varphi \cos \varphi) + h^\times (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = h^+ \sin 2\varphi + h^\times \cos 2\varphi. \quad (4)$$

- ② [2.5] Na Aula 21 eu cheguei numa equação que eu disse que é basicamente a Equação do Desvio Geodésico:

$$\frac{d^2 \Delta X^\mu}{d\tau^2} + \partial_\nu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Delta X^\nu U^\alpha U^\beta + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\alpha \frac{d\Delta X^\beta}{d\tau} = 0.$$

Mostre que, introduzindo a derivada direcional:

$$\frac{D\Delta X^\mu}{D\tau} = \frac{dX^\nu}{d\tau} D_\nu(\Delta X^\mu),$$

podemos escrever a primeira equação acima na sua forma mais usual:

$$\frac{D^2\Delta X^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\alpha\nu\beta} \Delta X^\nu U^\alpha U^\beta.$$

Solução:

Primeiro notemos que:

$$\ddot{X}^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \quad (5)$$

e portanto

$$\Delta \ddot{X}^\alpha = -2\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Delta \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - (\Delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu. \quad (6)$$

Abrindo a derivada direcional de primeira ordem, temos:

$$\frac{D}{D\tau} \Delta X^\alpha = \Delta \dot{X}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \Delta X^\nu. \quad (7)$$

A derivada direcional de segunda ordem é:

$$\frac{D^2}{D\tau^2} \Delta X^\alpha = \Delta \ddot{X}^\alpha + \frac{d}{d\tau} (\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \Delta X^\nu) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \frac{D}{D\tau} \Delta X^\nu. \quad (8)$$

Substituindo (6) em (8), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{D\tau^2} \Delta X^\alpha &= -2\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Delta \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - (\Delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu + \frac{d}{d\tau} (\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \Delta X^\nu) \\ &\quad + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{X}^\mu (\Delta \dot{X}^\nu + \Gamma^\mu_{\epsilon\eta} \dot{X}^\epsilon \Delta X^\eta). \end{aligned} \quad (9)$$

Abrindo o terceiro termo do lado direito obtemos um termo do tipo $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \Delta \dot{X}^\nu$, que junto com o último termo do lado direito vai cancelar o termo $-2\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Delta \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu$.

O segundo termo pode ser aberto em

$$(\Delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Delta X^\delta \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu. \quad (10)$$

Substituindo (10) em (9):

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{D\tau^2} \Delta X^\alpha &= -\partial_\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Delta X^\delta \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu + (\partial_\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{X}^\delta + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \ddot{X}^\mu) \Delta X^\nu \\ &\quad + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \Delta X^\alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Usando (5) e renomeando os índices de forma adequada:

$$\frac{D^2}{D\tau^2} \Delta X^\alpha = (\partial_\delta \Gamma_{\mu\eta}^\alpha - \partial_\eta \Gamma_{\mu\delta}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\delta\eta}^\nu - \Gamma_{\beta\eta}^\alpha \Gamma_{\mu\delta}^\beta) \Delta X^\eta \dot{X}^\mu \dot{X}^\delta, \quad (12)$$

onde reconhecemos a expressão entre parênteses como sendo tensor de Riemann.

- ③ [1.5] Vimos em sala de aula o efeito que as polarizações h^+ e h^\times exercem sobre uma configuração circular de massas no plano ortogonal à direção de propagação da onda (na ocasião, assumimos que essa direção era z , e colocamos as massas no plano $x - y$). Vimos que a polarização h^+ contrai e expande esse círculo alternadamente, ao longo das direções x e y , enquanto que a polarização h^\times faz o mesmo, mas girado de 45° .

Suponha que temos uma onda gravitacional cuja polarização é dada por:

$$\epsilon_{\mu\nu}^{L,R} = \epsilon_{\mu\nu}^+ \pm i\epsilon_{\mu\nu}^\times,$$

onde $\epsilon_{\mu\nu}^{+, \times}$ são polarizações “puras”, que só possuem a amplitude h^+ (no caso de $\epsilon_{\mu\nu}^+$), ou só a amplitude h^\times (no caso de $\epsilon_{\mu\nu}^\times$). Encontre os efeitos que essas duas ondas gravitacionais planas exercem sobre uma distribuição circular de matéria.

Solução:

Vimos em sala de aula que o desvio ΔX induzido por uma onda gravitacional é dado por:

$$\frac{d^2 \Delta X^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} k^2 \epsilon_{ij} \Delta X^j. \quad (13)$$

Para uma polarização do $\epsilon_{\mu\nu}^{L,R}$, portanto,

$$\frac{d^2 \Delta X^{L,R}}{dt^2} = -\frac{1}{2} (h^+ \Delta X \pm i h^\times \Delta Y) e^{-ik(t-z)} \quad (14)$$

$$\frac{d^2 \Delta Y^{L,R}}{dt^2} = +\frac{1}{2}(h^+ \Delta Y \mp ih^\times \Delta X)e^{-ik(t-z)}. \quad (15)$$

Em primeira ordem em h^+ e h^\times :

$$\Delta X^{L,R} \simeq \Delta X_0 + \frac{e^{-k(t-z)}}{2} [\Delta X_0 h^+ \pm ih^\times \Delta Y_0] \quad (16)$$

$$\Delta Y^{L,R} \simeq \Delta Y_0 - \frac{e^{-k(t-z)}}{2} [\Delta Y_0 h^+ \mp ih^\times \Delta X_0]. \quad (17)$$

Tomando as partes reais:

$$\Delta X^{L,R} = \Delta X_0 + \frac{1}{2} [\Delta X_0 h^+ \cos(k(t-z)) \pm h^\times \Delta Y_0 \sin(k(t-z))] \quad (18)$$

$$\Delta Y^{L,R} = \Delta Y_0 - \frac{1}{2} [\Delta Y_0 h^+ \cos(k(t-z)) \mp h^\times \Delta X_0 \sin(k(t-z))]. \quad (19)$$

Uma inspeção nas soluções acima nos mostra que um anel em forma de elipse de partículas vai girar de acordo com a regra da mão direita/esquerda dependendo se a polarização é R/L.

- ④ [4.5] Considere duas massas idênticas m presas a uma mola de massa desprezível. Essas massas oscilam em torno da posição de equilíbrio fazendo um movimento no eixo z dado por:

$$z_\pm(t) = \pm [z_0 + ae^{i\omega t}] ,$$

(a) Assuma que se tratam de massas pontuais e calcule o momento de quadrupolo “reduzido” desse sistema:

$$Q^{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) \left(x^i x^j - \frac{1}{3} \vec{x}^2 \delta^{ij} \right) .$$

Solução: As componentes do momento de quadrupolo reduzido são $Q^{11} = -(1/3)2mz^2 = Q_{22}$, $Q^{33} = (2/3)2mz^2$. Na forma matricial:

$$Q = \frac{2}{3}mz^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}mz^2 M. \quad (20)$$

(b) Assumindo que estamos observando esse sistema desde uma distância muito grande ($r \gg z_0$), encontre a expressão para as perturbações da métrica correspondentes as ondas gravitacionais emitidas por esse sistema de massas aceleradas (não esqueça de detalhar as dependências espacial e temporal, assim como as polarizações).

Solução: A amplitude das ondas gravitacionais é:

$$h^{ij} \simeq 2G \frac{e^{i\omega r}}{r} \ddot{Q}^{ij} = 2G \frac{e^{i\omega r}}{r} \frac{2m}{3} M(2\ddot{z}z + 2\dot{z}^2) = \quad (21)$$

$$= \frac{8mGe^{i\omega r}M}{3r} [-\omega^2 a(z_0 + ae^{-i\omega t})e^{-i\omega t} + (-i\omega ae^{-i\omega t})^2] = \quad (22)$$

$$= -\frac{e^{-i\omega(t-r)}}{r} \frac{8GmM\omega^2 a z_0}{3} \left(1 + \frac{2a}{z_0} e^{-i\omega t}\right). \quad (23)$$

(c) A potência irradiada em ondas gravitacionais por um quadrupolo que varia no tempo é dada por:

$$P = \frac{dE}{dt} \simeq \frac{G}{10c^5} \left| \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right|^2.$$

Dado que a energia do oscilador harmônico é $E = 1/(2m)\omega^2 a^2$, qual a taxa com a qual a amplitude do oscilador (a) deve decair com o tempo, devido à emissão de ondas gravitacionais? Primeiro obtenha o resultado geral, assumindo que $a \ll z_0$. Depois, calcule o resultado caso tenhamos uma massa de $m = 100$ kg, uma frequência de oscilação $\omega = 10^3$ Hz, uma posição de equilíbrio $z_0 = 1$ m e uma amplitude de oscilação de $a = 1$ cm.

Solução:

$$\ddot{Q} = \frac{4m}{3} M(-\omega^2 z_0 a e^{-i\omega t} - 2\omega^2 a^2 e^{-2i\omega t}) \quad (24)$$

$$\ddot{\ddot{Q}} = \frac{4m}{3} M(i\omega^3 z_0 a e^{-i\omega t} + 4i\omega^3 a^2 e^{-2i\omega t}). \quad (25)$$

Depois de um pouco de álgebra:

$$\langle P \rangle_{ciclo} = -\frac{16G}{15c^5} m^2 \omega^6 z_0^2 a^2 \left(1 + \frac{4a}{z_0} + 16\frac{a^2}{z_0^2}\right). \quad (26)$$

A taxa com a qual a amplitude do oscilador vai cair é:

$$\Gamma = \frac{1}{E} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{32mG\omega^4 z_0^2}{15c^5}. \quad (27)$$

Substituindo os dados do enunciado obtemos:

$$\Gamma = 4.34 \times 10^{-21} Hz. \quad (28)$$