6^a Lista de exercícios

Intr. à Relatividade — Data de entrega: 03/07

① [2.0] Utilizando as simetrias do tensor de Riemman, mostre que o tensor de Riemann de um espaço maximamente simétrico pode ser escrito como:

$$R_{ijkl} = \frac{R}{6}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \tag{1}$$

② [2.0] Use a métrica FLRW:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2}. \tag{2}$$

e o fato de que um fóton percorre uma geodésica nula para encontrar a relação entre o fator de escala em dois instantes diferentes e o redshift. Comece imaginando que uma crista de uma onda luminosa é emitido por uma fonte em r num instante inicial t_0, seguido da emissão de uma segunda crista δt_0 depois. Assuma que um observador detecta a luz emitida pela fonte em $r = 0$. O redshift sofrido pelo fóton significa que alguma energia foi perdida?

③ [2.0] Usando as equações de Friedmann na forma:

$$-\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2}\sum_j (1+3w_j)\Omega_j \tag{3}$$

e

$$\frac{m\dot{a}^2}{2} + V(a) = 0, \tag{4}$$

onde $\Omega_j = (\frac{H_0}{H})^2\Omega_{j,0}a^{-3(1+w_j)}$, com $j = m, \Lambda$ e k, $m \equiv 2/H_0^2$ e

$$V(a) \equiv -\left(\frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + \Omega_{k,0}\right), \tag{5}$$

com $\Omega_k = 1 - (\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0})$, encontre as regiões no plano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ onde (i) o fator de escala se expande de forma acelerada ou desacelerada (ii) o Universo é aberto ou fechado (iii) o Universo se expande indefinidamente ou eventualmente recolapsa. Existe alguma situação na qual nunca houve um Big Bang? *Dica: é útil esboçar a forma de* $V(a)$ *em cada situação. Lembre-se que hoje* $\dot{a} > 0$ *e* $a = 1$.

④ [2.0] Com futuros detectores de ondas gravitacionais será possível obter informação do Universo em até redshift z $\sim$ 10, como o Riccardo Sturani comentou em aula. Neste exercício, vamos procurar ter alguma idéia de o quanto para trás no tempo poderemos "ver" com as ondas gravitacionais.

a) A partir da definição do parâmetro de Hubble:

$$H \equiv \dot{a}/a = H_0\sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda}, \tag{6}$$

, da relação entre o redshift z e o fator de escala:

$$a(z) = \frac{1}{1+z} \tag{7}$$

e sabendo que a era da dominação de energia escura começa a aproximadamente 4 bilhões de anos atrás (antes disso o Universo foi dominado por matéria[1]), esboçe um gráfico do redshift em função do tempo e responda: em redshift aproximadamente 10 corresponde a quanto tempo atrás? (Use que $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ e $H_0 = 70Km/s/Mpc$)

b) Pelo o ítem a) sabemos que a maior parte do tempo da evolução do Universo está compreendida em baixos redshifts. Dê uma explicação *qualitativa* para esse fato.

c) Imagine dois corpos que estão longe de qualquer coisa e possuem atração gravitacional mútua despresível. Se a distância física entre esses dois corpos for, digamos, a distância entre a Terra e o Sol, então a luz que sair de um deles e for detectada pelo outro não sofrerá nenhum redshift devido a expansão. Explique *qualitativamente* esse fato e estime a ordem de grandeza que o parâmetro de Hubble precisaria ter para que esse redshift fosse da ordem de 10^{-1}. *Dica: Nesse ítem você pode assumir um universo dominado pela constante cosmológica.*

[1] O Universo também foi dominado por radiação desde depois da inflação até aproximadamente 47000 anos depois do Big Bang

d) Agora estime a ordem de grandeza que o parâmetro de Hubble precisaria ter para que os elétrons fossem arrancados dos átomos de hidrogênio. *Dica: você só precisa calcular a equação da geodésica para um universo de de Sitter.*

⑤ [2.0] Em 1920 o físico e astrônomo Holandês Willem de Sitter encontrou uma solução muito interessante das equações de Friedmann. Ele considerou um universo contendo uma única componente (a *Constante Cosmológica (CC)* Λ), cuja densidade de energia é uma constante, $\rho_\Lambda =$const. Esse modelo de *de Sitter* tem algumas peculiaridades: ele se expande para sempre de modo exponencial, e não há nem um início nem um fim, ou seja, $-\infty < t < \infty$.

a) Mostre que a pressão associado com a CC é $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Dê uma interpretação física para esse resultado.

b) Supondo que a curvatura espacial é nula ($k = 0$) use as equações de Friedmann para encontrar a fórmula explícita para $a(t)$. *Dica: Será útil usar a notação* $H_\Lambda = \sqrt{8\pi G\rho_\Lambda/3}$.

c) Agora vamos estudar os cones de luz e os horizontes nesse universo dominado pela CC e com curvatura espacial nula. Vamos tomar eventos em instantes quaisquer, mas sempre limitados a posições sobre o eixo comóvel $x-$ ou seja, vamos considerar as coordenadas comóveis y e z fixas ($dy = dz = 0$). Usando a forma conforme-cartesiana da métrica de FLRW, encontre a expressão para as coordenadas (t, x) do cone de luz de um evento qualquer num instante (t_0, x_0) . Em particular, mostre que podemos expressar esse cone de luz por meio da igualdade:

$$\left|e^{-H_\Lambda t} - e^{-H_\Lambda t_0}\right| = H_\Lambda \left|x - x_0\right|$$

d) Esboce graficamente a forma desse cone de luz, (como usual, coloque t nas abscissas e x nas ordenadas). Para este item e os itens seguintes, você pode assumir que o evento está localizado em $t_0 = 0$ e $x_0 = 0$

e) Esse evento, nesse universo de *de* Sitter, possui um horizonte de partículas (tipo passado)? Em outras palavras, o passado desse evento compreende um volume comóvel finito? Caso a sua resposta seja sim, qual é valor desse horizonte comóvel de partículas X_{Hp} para o evento do instante $t_0 = 0$?

d) Esse evento possui um horizonte de eventos (tipo futuro)? Em outras palavras, o futuro desse evento compreende um volume comóvel finito? Caso a sua resposta seja sim, qual é o valor desse horizonte comóvel de eventos X_{He} para o evento do instante $t_0 = 0$?