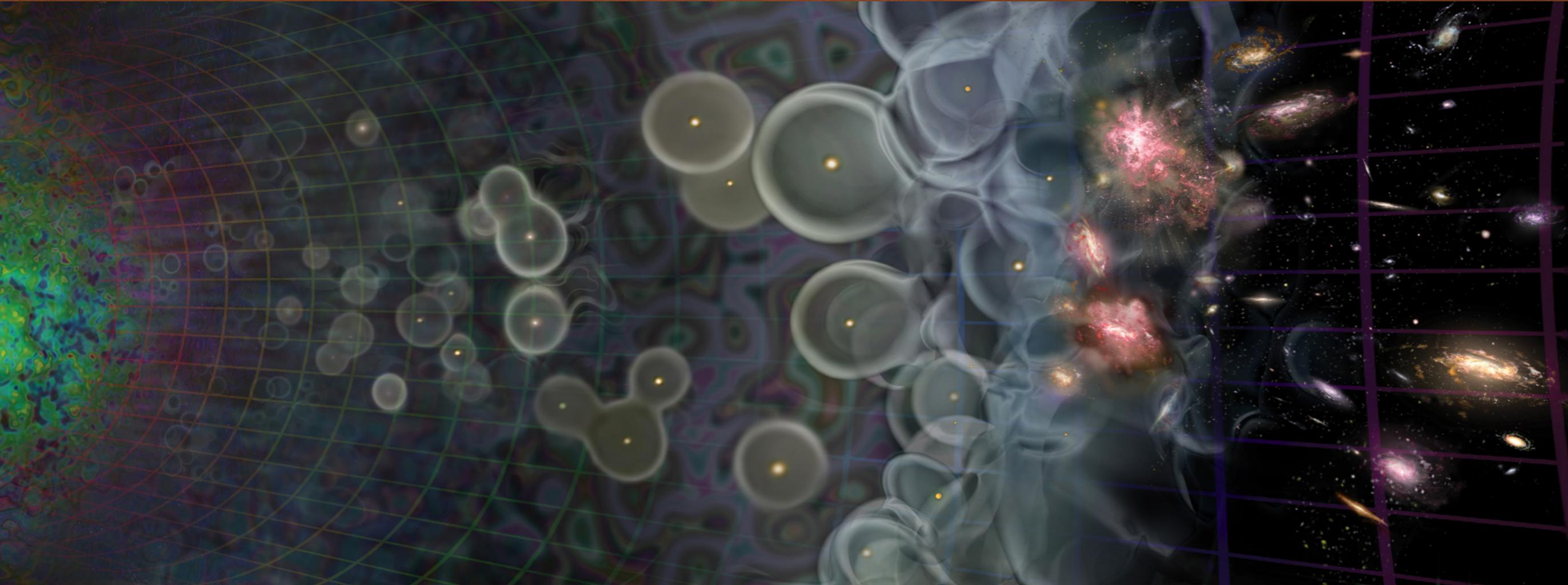


INTRODUÇÃO À



RELATIVIDADE

4300337 – IF/USP – PROF. RAUL ABRAMO

AULA 25 - 15/06/2020

- As equações de Friedmann
- A equação de continuidade
- Tipos de matéria e de expansão cósmica
- Nucleosíntese primordial
- Radiação Cósmica de Fundo em Microondas
- **Leitura: Cap. 8 do Carroll**

AS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

- Na aula passada vimos que um universo homogêneo e isotrópico é caracterizado pela métrica de FLRW, que genericamente podemos escrever como:

$$ds^2 = - dt^2 + a^2(t) dl^2 \quad ,$$

onde $a(t)$ é o **fator de escala** e $dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$ é a **métrica da seção espacial**.

- Dessa métrica seguem as equações de Einstein, que nesse contexto se chama **Equações de Friedmann**:

$$G_{00} = 8\pi G T_{00} \quad \Rightarrow \quad 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{K}{a^2} = 8\pi G \rho$$

$$G_{ij} = 8\pi G T_{ij} \quad \Rightarrow \quad -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{K}{a^2} = 8\pi G p$$

- Nessas equações temos apenas **funções que dependem do tempo**: $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$.
- Diferentes tipos de matéria resultam em diferentes dinâmicas para $a(t)$. Mas a matéria não pode se comportar de um modo totalmente arbitrário: ela deve obedecer a **leis de conservação**, em particular a **Equação da Continuidade**, que segue diretamente da **conservação do tensor de energia-momento**.

A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

- O tensor de energia-momento da matéria num universo homogêneo e isotrópico tem apenas **duas componentes**, a densidade de energia, $\rho(t)$, e a pressão $p(t)$, sendo escrito como:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & p \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad T^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & p \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

- A conservação desse tensor pode ser calculada de $D_{\alpha} T^{\alpha}_{\beta} = T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = 0$, resultando na **Equação da Continuidade**:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad , \quad \text{onde } H = \frac{\dot{a}}{a}$$

- Essa expressão também pode ser derivada diretamente das Equações de Friedmann. Tome:

$$\frac{d}{dt} [3\dot{a}^2 + 3K = 8\pi G \rho a^2] \Rightarrow 6\ddot{a}\dot{a} = 8\pi G (\dot{\rho} a^2 + 2H\rho a^2) \Rightarrow 6H \frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G (\dot{\rho} + 2H\rho)$$

- Além disso, fazendo a combinação $G^{\alpha}_{\alpha} = 8\pi G T^{\alpha}_{\alpha}$ também podemos escrever:

$$-6 \frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G (\rho + 3p) \Rightarrow 6H \frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G (-H\rho - 3Hp)$$

GUARDE ESSE RESULTADO:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4/3 \pi G (\rho + 3p)$$

- Combinando agora essas duas equações temos novamente que $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$.

A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

- Também podemos derivar a equação da continuidade a partir de argumentos muito simples, de conservação de energia de "inspiração" termodinâmica. Se igualarmos a variação da energia com o trabalho da pressão temos:

$$dE = -p dV \quad , \quad \text{onde } p dV \text{ é o trabalho feito } \textit{pelo sistema} \text{ para se expandir por um volume } dV .$$

- Mas $dE = d(\rho V) = d\rho V + \rho dV$.
- Por outro lado, num universo de FLRW temos que $V = V_c a^{-3}$, onde V é o volume físico e V_c é o volume comóvel (constante). Portanto,

$$dV = V_c d(a^3) = 3 V_c a^2 da = 3V \frac{da}{a}$$

- Substituindo na expressão acima temos:

$$d\rho V + \rho 3V \frac{da}{a} = -p 3V \frac{da}{a} \quad \Rightarrow \quad d\rho + 3(\rho + p) \frac{da}{a} = 0$$

- Tomando a derivada com respeito ao tempo temos

$$\frac{d\rho}{dt} + 3(\rho + p) \frac{da/dt}{a} = 0$$

- Mas isso é, novamente, a equação da continuidade que obtivemos antes: $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$.

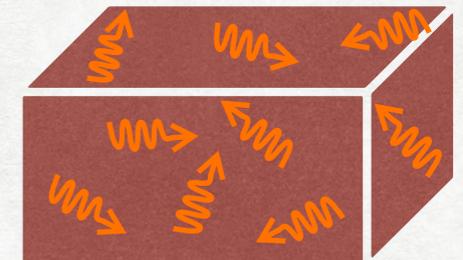
TIPOS DE MATÉRIA E DE EXPANSÃO

- Já vimos que existe a *matéria fria*, ou não-relativística, cujo momento e pressão são praticamente nulos:

$$p_m = 0 \quad , \quad \rho_m \sim a^{-3} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0$$

- Também podemos considerar matéria "ultra-relativística", cuja energia de repouso é desprezível com relação à sua energia cinética. Pense numa caixa cheia de fótons viajando em *todas as direções*, de tal forma que a densidade média é a *mesma em todos os pontos*. Essa matéria "quente", ou *radiação*, se comporta como:

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r \quad , \quad \rho_r \sim a^{-4} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\rho}_r + 3H\left(\rho_r + \frac{1}{3}\rho_r\right) = \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0$$



- Finalmente, também é interessante considerar uma outra forma mais exótica de matéria/energia chamada de *energia de vácuo* (ou *constante cosmológica*) Λ , que tem uma pressão negativa tal que:

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda \quad , \quad \rho_\Lambda \sim a^0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\rho}_\Lambda + 3H(\rho_\Lambda - \rho_\Lambda) = \dot{\rho}_\Lambda = 0$$

- De um modo geral, a *densidade de energia total* é a *soma de todas as componentes*:

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \dots$$

TIPOS DE MATÉRIA E DE EXPANSÃO

- Cada um desses tipos de matéria leva a um tipo diferente de expansão. Já vimos, na aula passada, que no caso mais simples $K \rightarrow 0$, a *matéria fria* causa uma expansão do tipo:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{K}{a^2} = 8\pi G \rho \quad \longrightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_{m0}}{3} a^{-3} \quad \Longrightarrow \quad a = t^{2/3}$$

- No caso de *radiação* (matéria ultra-relativística) temos, também com $K \rightarrow 0$:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{K}{a^2} = 8\pi G \rho \quad \longrightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_{r0}}{3} a^{-4} \quad \Longrightarrow \quad a \sim t^{1/2}$$

- E no caso da *energia de vácuo/constante cosmológica* Λ , o resultado é um tanto surpreendente:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{K}{a^2} = 8\pi G \rho \quad \longrightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_{\Lambda}}{3} \quad \Longrightarrow \quad a \sim e^{H_{\Lambda} t} ,$$

$$\text{onde } H_{\Lambda} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{\Lambda}}{3}}$$

- Podemos até mesmo calcular o que acontece se o termo da curvatura dominar, $K < 0$, $\rho \rightarrow 0$:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{K}{a^2} = 8\pi G \rho \quad \longrightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -Ka^{-2} \quad \Longrightarrow \quad a \sim t$$

TIPOS DE MATÉRIA E DE EXPANSÃO

- É curioso que a Constante Cosmológica foi introduzida por ninguém mesmo que o *próprio Einstein*, que notou que as suas equações admitiam uma forma um pouco mais geral:

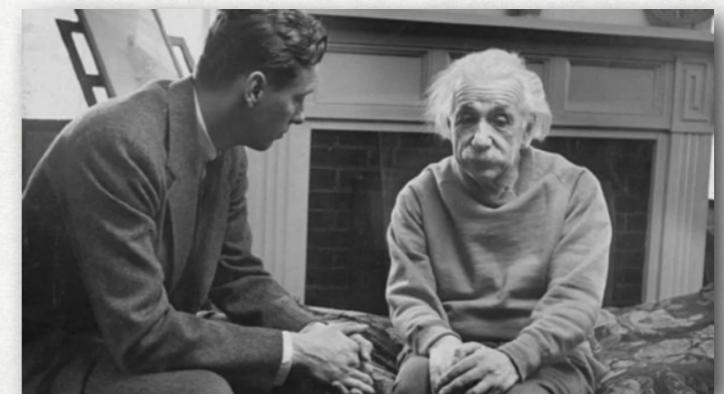
$$G_{\mu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad G_{\mu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

onde Λ é uma *constante universal*, que também podemos interpretar como uma *energia de vácuo*.

- Passando a constante cosmológica para o lado direito da primeira Equação de Friedmann temos:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{K}{a^2} = 8\pi G \rho \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{r0}}{a^4} + \rho_{\Lambda} - \frac{3K}{8\pi G a^2} \right)$$

- Einstein originalmente se utilizou dessa constante para "forçar" o universo a ser *estático*. Einstein supôs que balanceando os termos do lado direito teríamos uma solução com $a = \text{constante}$, $H = 0$.
- Porém, essa solução era... ingênua! Isso porque qualquer pequeno distúrbio dessa solução levaria imediatamente a uma expansão, ou a uma contração. Ou seja: a solução é *instável*.
- Einstein chamou esse episódio de "*my worst blunder*".



EXPANSÃO E DENSIDADES

- Um modo muito útil de escrever a primeira Equação de Friedmann é escrever todos os termos em unidades de densidade:

$$\frac{3}{8\pi G} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{3}{8\pi G} H^2 = \frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{r0}}{a^4} + \rho_{\Lambda} - \frac{3K}{8\pi G} \frac{1}{a^2}$$

- Podemos também fazer uma *analogia* do *lado esquerdo* com uma *densidade de energia*, definida em termos da função de Hubble como:

$$\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G} H^2$$

- A taxa de expansão ("parâmetro") de Hubble é relativamente mal conhecida (ainda!), então decidimos escrevemos ela *hoje* como:

$$H_0 = H(t_0) = H(z = 0) = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} ,$$

onde o parâmetro $h \simeq 68 \pm 3$ engloba a nossa grande ignorância sobre a taxa de expansão.

EXPANSÃO E DENSIDADES

- Essa expressão do parâmetro de Hubble é muito útil:

$$H_0 = H(t_0) = H(z = 0) = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

- A partir dela podemos obter vários valores "característicos" de tempos, distâncias e densidades no nosso universo*:

- Usando a definição de $1 \text{ Mpc} = 3.26 \text{ anos-luz}$ chegamos num ***tempo de Hubble***:

$$H_0^{-1} = 9.78 h^{-1} \text{ Gy} \quad , \quad \text{onde Gy é um bilhão de anos}$$

- Lembrando que usamos unidades naturais ($c = 1$), podemos "devolver" um fator de c acima e escrever a ***distância (ou raio) de Hubble*** como:

$$cH_0^{-1} = 2997.9 h^{-1} \text{ Mpc}$$

- Já a densidade "típica" do universo hoje tem um valor de:

$$\rho_c(z = 0) = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3} = 2.78 \times 10^{11} h^2 M_\odot \text{ Mpc}^{-3}$$

* Para uma lista útil de constantes que aparecem na cosmologia veja: <http://pdg.lbl.gov/2012/reviews/rpp2012-rev-astrophysical-constants.pdf>

EXPANSÃO E DENSIDADES

- Como vimos acima, a primeira Eq. de Friedmann pode ser escrita como:

$$\rho_c = \sum_i \rho_i - \frac{3K}{8\pi G} \frac{1}{a^2}, \quad \text{onde} \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

- Nessa forma fica claro que, se a taxa de expansão e a densidade total de matéria forem tais que $\rho_c = \sum_i \rho_i$, então a curvatura espacial deverá ser nula ($K = 0$).
- Por essa razão, chamamos ρ_c (que não é nada mais do que a taxa de expansão escrita em unidades de densidade) de *densidade crítica do universo*.
- Se a densidade ρ for *maior* que a densidade crítica (em qualquer instante!), o universo tem curvatura positiva, e o universo é fechado (podendo inclusive até recolapsar); se a densidade for *menor* que a densidade crítica, o universo tem curvatura negativa, é infinito e deverá se expandir eternamente.

EXPANSÃO E DENSIDADES

- Podemos escrever a primeira Eq. de Friedmann num formato ainda mais interessante, se dividirmos todos os termos pela densidade crítica ρ_c :

$$\rho_c = \sum_i \rho_i - \frac{3K}{8\pi G} \frac{1}{a^2} \Rightarrow 1 = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_c} - \frac{3K}{8\pi G \rho_c a^2}$$

- As razões de cada densidade de matéria com relação à densidade crítica é chamada de **parâmetros de densidade**:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$$

- Podemos também escrever um parâmetro de densidade associado à curvatura espacial, fazendo:

$$\Omega_K \equiv - \frac{3K}{8\pi G \rho_c a^2} = - \frac{K}{H^2 a^2}$$

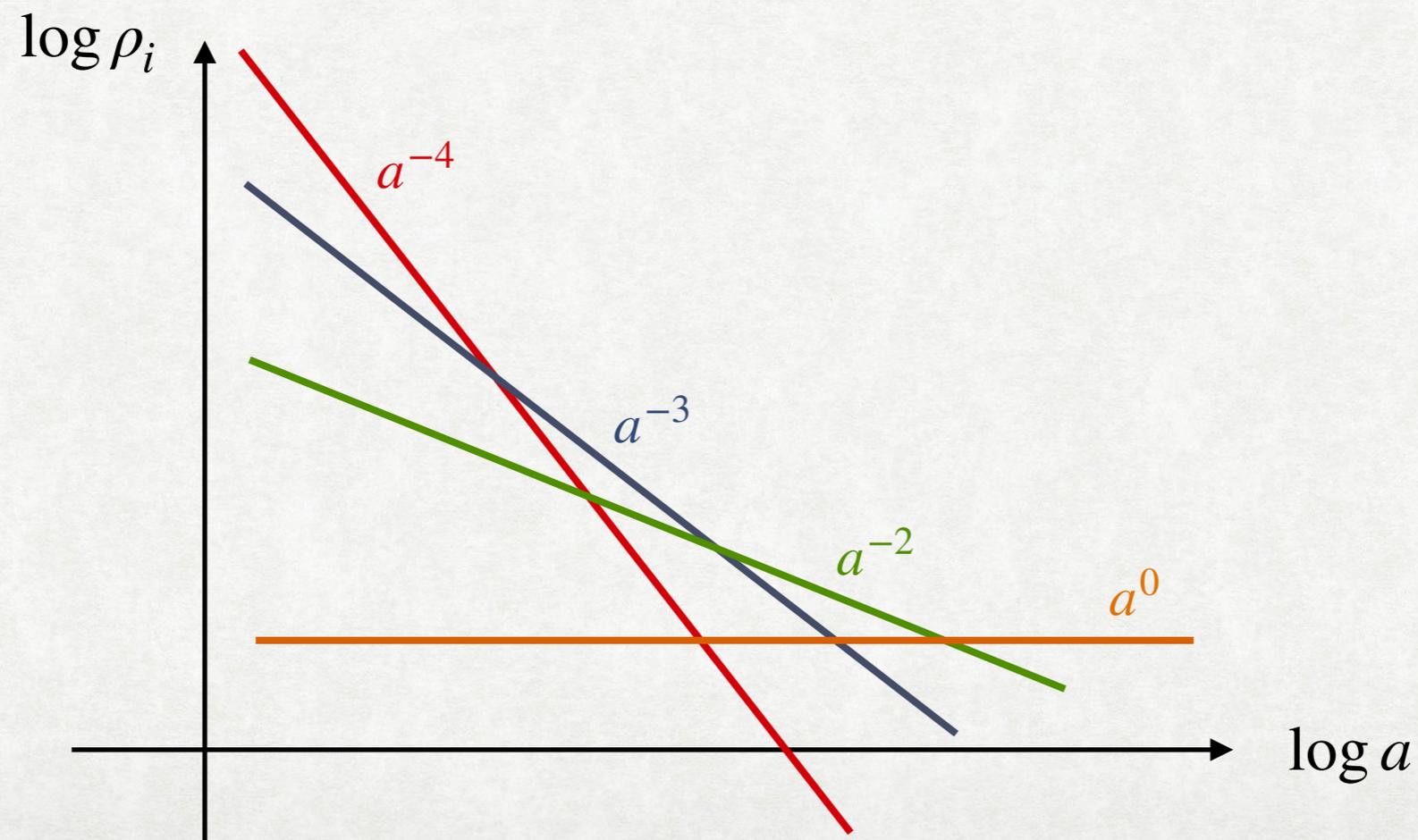
- Desse modo, a primeira Eq. de Friedmann fica escrita como:

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_K = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sum_i \Omega_i > 1 & , \sum_i \rho_i > \rho_c \Rightarrow K > 0 \\ \sum_i \Omega_i = 1 & , \sum_i \rho_i = \rho_c \Rightarrow K = 0 \\ \sum_i \Omega_i < 1 & , \sum_i \rho_i < \rho_c \Rightarrow K < 0 \end{cases}$$

$$\sum_i \Omega_i = 1 - \Omega_K$$

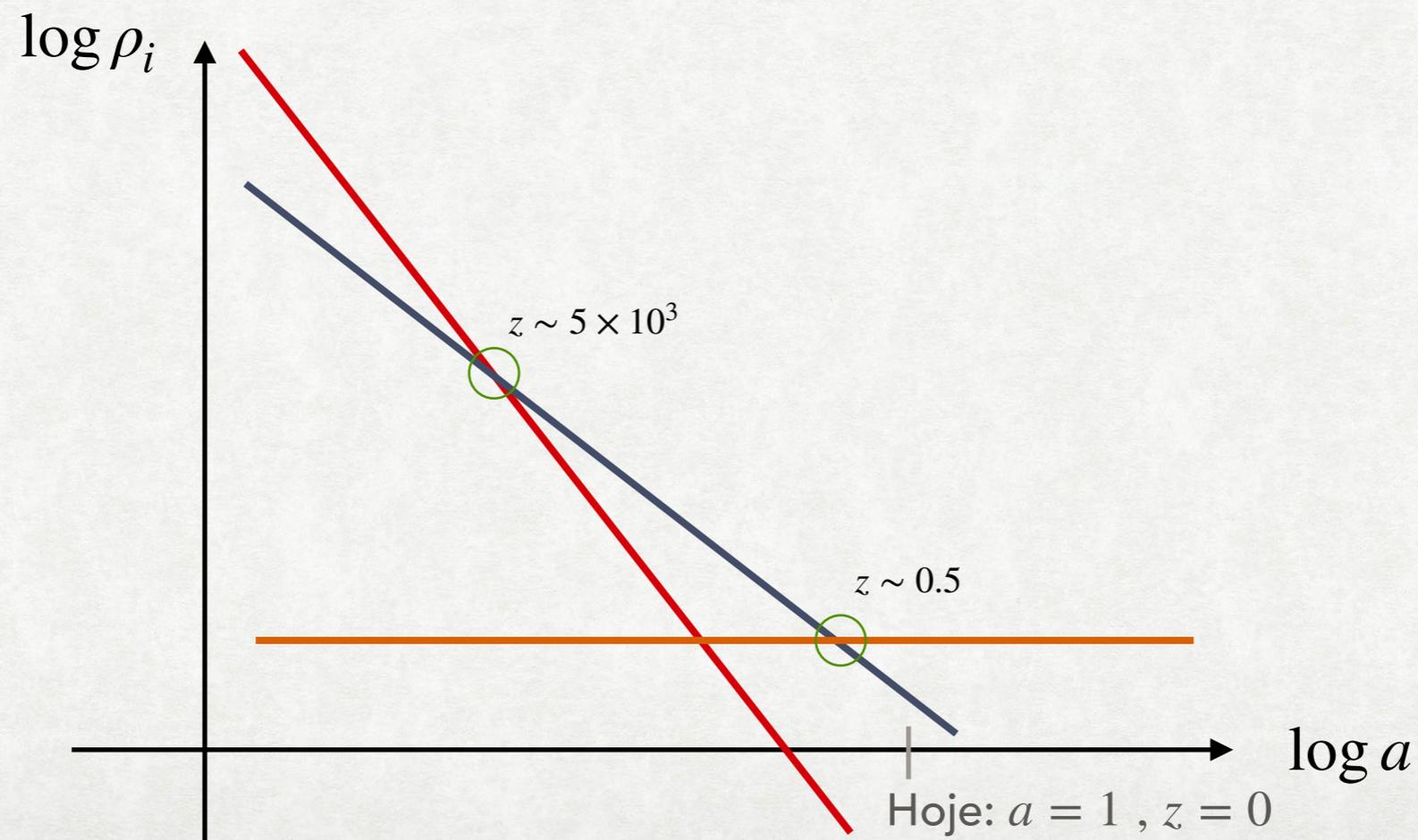
EXPANSÃO E DENSIDADES

- Nesse momento podemos fazer um exercício muito simples, mas imensamente iluminador. Vamos estimar de que modo as diferentes densidades variam com a expansão do universo.
 - ▶ **Matéria relativística/radiação:** $\rho_r \sim a^{-4}$
 - ▶ **Matéria fria/poeira:** $\rho_m \sim a^{-3}$
 - ▶ **Curvatura espacial:** $\rho_K \sim a^{-2}$
 - ▶ **Constante cosmológica/ Λ :** $\rho_m \sim a^0$



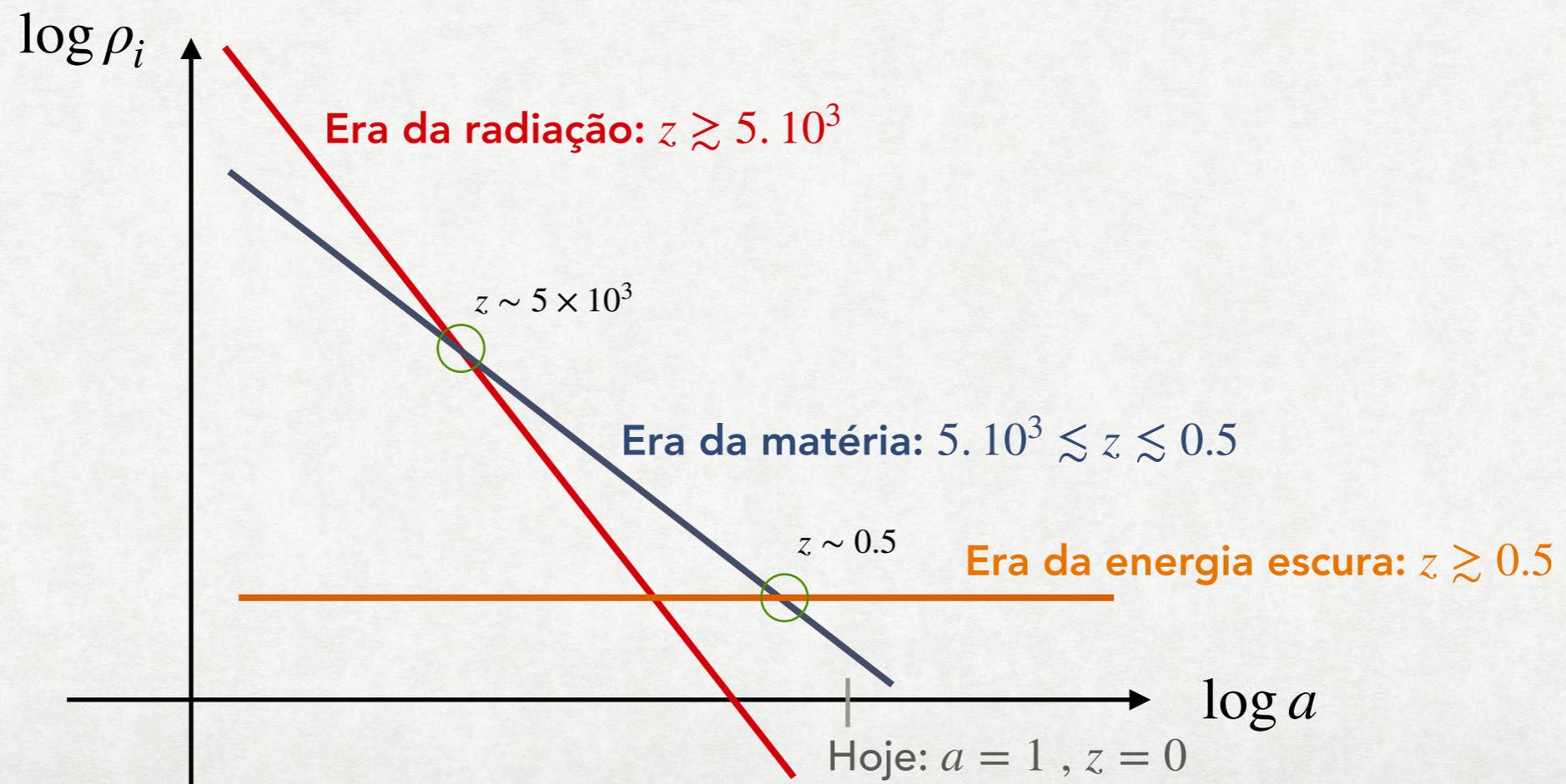
EXPANSÃO E DENSIDADES

- Hoje sabemos, por meio das observações, que as densidades dos diferentes tipos de matéria estão distribuídas aproximadamente do seguinte modo:
 - ▶ **Matéria relativística/radiação:** $\rho_r \sim a^{-4}$
 - ▶ **Matéria fria/poeira:** $\rho_m \sim a^{-3}$
 - ▶ **Curvatura espacial:** $\rho_K \sim a^{-2}$
 - ▶ **Constante cosmológica/ Λ :** $\rho_m \sim a^0$



EXPANSÃO E DENSIDADES

- Hoje sabemos, por meio das observações, que as densidades dos diferentes tipos de matéria estão distribuídas aproximadamente do seguinte modo:
 - ▶ **Matéria relativística/radiação:** $\rho_r \sim a^{-4}$
 - ▶ **Matéria fria/poeira:** $\rho_m \sim a^{-3}$
 - ▶ **Curvatura espacial:** $\rho_K \sim a^{-2}$
 - ▶ **Constante cosmológica/ Λ :** $\rho_m \sim a^0$



EXPANSÃO E DENSIDADES

- Claramente, a expansão vai mudando à medida que um tipo de matéria/energia deixa de ser dominante, e um outro tipo de matéria/energia passa a ser mais importante.
- Podemos quantificar isso de um modo conveniente usando os parâmetros de densidade, $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$.
Tomando a primeira Eq. de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{K}{a^2} .$$

Vamos notar que $\rho_c(z=0) = \rho_{c0} = 3H_0^2/(8\pi G)$, assim dividimos ambos essa equação por H_0^2 e obtemos:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_{c0}} - \frac{K}{H_0^2 a^2} .$$

- Mas a densidade de cada tipo de matéria acima se comporta de um modo característico: $\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}$, $\rho_r = \rho_{r0} a^{-4}$, etc. Notando agora que $\rho_{i0}/\rho_{c0} = \Omega_{i0}$ são os parâmetros de densidade **hoje**, temos:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{r0} a^{-4} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{K0} a^{-2} \quad \text{ou melhor:}$$

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0} (1+z)^3 + \Omega_{r0} (1+z)^4 + (1+z)^2}$$

EXPANSÃO E DENSIDADES

- A função de Hubble fica então escrita, em termos dos parâmetros de densidade hoje como:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0} (1+z)^3 + \Omega_{r0} (1+z)^4 + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{K0} (1+z)^2}$$

- As observações mostram que:

$$\Omega_{r0} \simeq 3 \times 10^{-5} h^{-2}$$

DENSIDADE DE FÓTONS:

$$n_\gamma \sim 410 \text{ cm}^{-3}$$

$$\Omega_{m0} \sim 0.25 \pm 0.05$$

MAS DESSA MATÉRIA, BÁRIONS (ÁTOMOS) SÃO APENAS

$$\Omega_{b0} \simeq 0.0226 h^{-2}$$

$$\Omega_{\Lambda0} \sim 0.75 \pm 0.05$$

HOJE VIVEMOS NUM UNIVERSO DOMINADO POR ALGO (?)
QUE CAUSA A ACELERAÇÃO DA EXPANSÃO!

$$|\Omega_{K0}| < 0.01$$

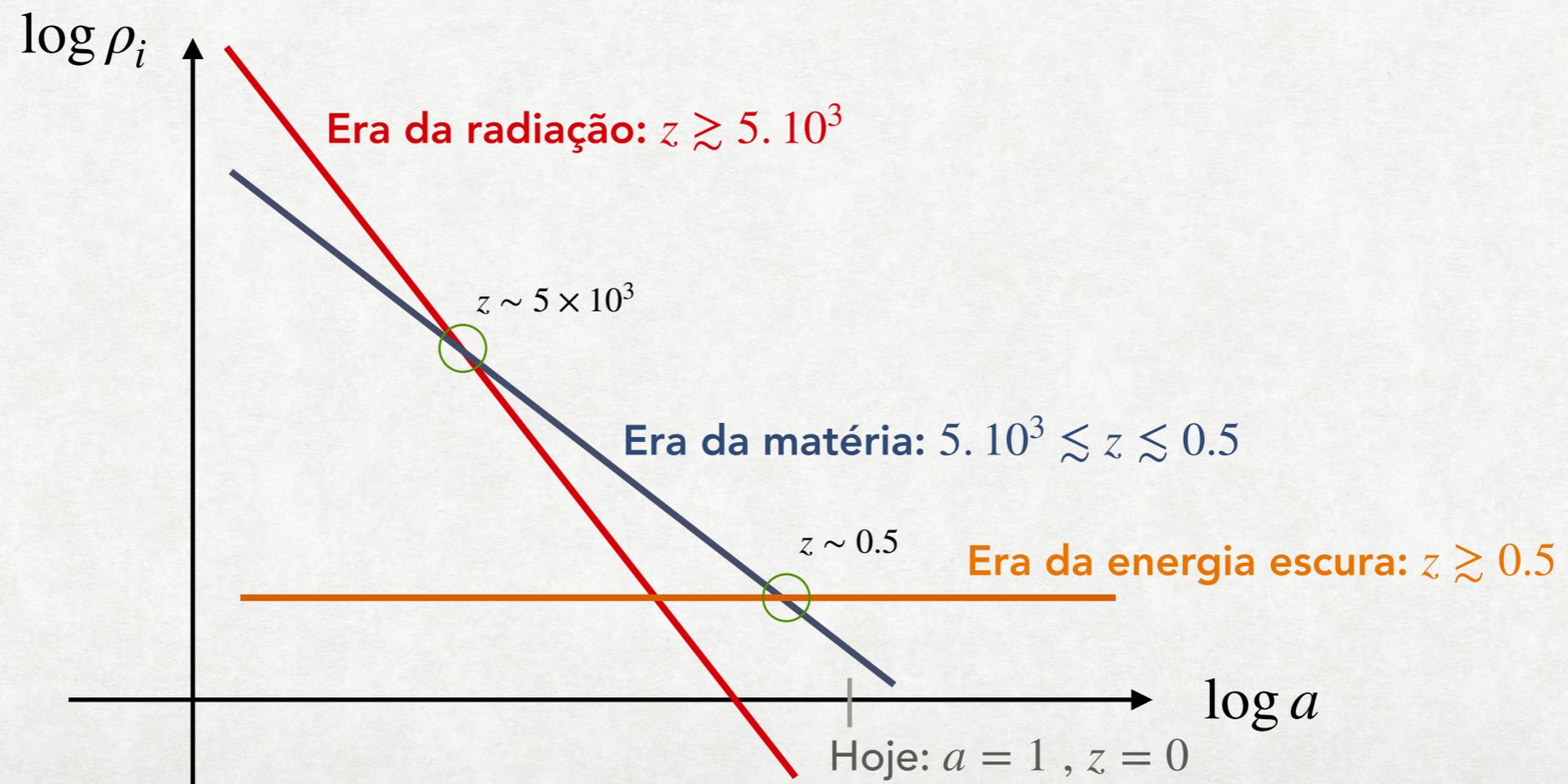
A CURVATURA ESPACIAL

PARECE SER **MUITO PEQUENA**:

$$R_0 = K^{-1/2} > 10H_0 = 30,000 h^{-1} \text{ Mpc}$$

O UNIVERSO PRIMORDIAL

- Independente das quantidades exatas de matéria fria (poeira), matéria quente (radiação), Λ , curvatura espacial, etc., quanto mais no passado, mais a "radiação" domina tudo.
- No passado, portanto, o universo era muito diferente do que ele é hoje.
- Mas... diferente *como*?



O UNIVERSO PRIMORDIAL

- Vamos tomar a energia típica de um fóton hoje. Temos que:

$$\Omega_{r0} = \frac{\rho_{r0}}{\rho_{c0}} \simeq 3 \times 10^{-5} \quad ,$$

QUASE SEMPRE NOS REFERIMOS AOS PARÂMETROS DE DENSIDADE HOJE ($z = 0$), E POR ESSA RAZÃO FREQUENTEMENTE VAMOS TOMAR

$$\Omega_{i0} \rightarrow \Omega_i$$

enquanto a densidade crítica hoje, escrita em termos de *densidade de energia* ($= \text{massa} \times c^2$) é :

$$\rho_{c0} = 1.05 \times 10^4 h^2 \text{ eV cm}^{-3}$$

- Como temos hoje aproximadamente $n_{\gamma 0} \simeq 410$ fótons por cm^3 , cada um deles têm uma energia média de:

$$\langle E_{\gamma}(z = 0) \rangle = \frac{\Omega_{r0} \rho_{c0}}{n_{\gamma 0}} \simeq 7.7 \times 10^{-4} \text{ eV}$$

- Porém, à medida que vamos ao passado, essa energia aumenta cada vez mais:

$$\langle E_{\gamma}(z) \rangle \simeq 7.7 \times 10^{-4} (1 + z) \text{ eV} \quad ,$$

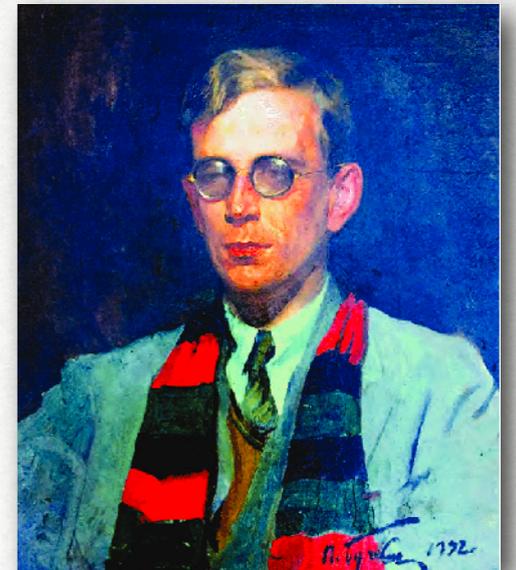
a densidade em número $n_{\gamma} \simeq 410 (1 + z)^3 \text{ cm}^{-3}$, e a densidade de energia é $\rho_r \simeq 0.315 (1 + z)^4 \text{ eV cm}^{-3}$

- Vamos tomar, por exemplo, um redshift de $z = 10^4$. Nesse instante teremos que a energia média dos fótons será algo como

$$\langle E_{\gamma}(z = 10^4) \rangle \simeq 7.7 \times \text{ eV} \quad , \quad \text{ou seja, próximo à energia de ligação do átomo de Hidrogênio (13.6 eV) !}$$

O UNIVERSO PRIMORDIAL

- O primeiro a fazer o exercício mental de imaginar como seria esse universo primordial que, à medida que mergulhamos no passado se torna mais denso, mais quente e mais energético, foi **George Gamow** (1904-1968).
- Gamow, além de "inventar" o modelo do "Big Bang quente", também explicou o decaimento β nuclear, explicou o mecanismo por trás das supernovas, previu as estrelas de nêutrons e foi um precursor do mecanismo pelo qual o código genético poderia ser transcrito.
- Gamow gostava de pensar em termos de uma "sopa cósmica", que hoje já estaria fria e "empelotada" (cheia de estruturas como galáxias), mas que no passado era muito mais quente e mais homogênea — além de cada vez mais dominada pela "matéria quente" (radiação).
- Assim, no passado a energia disponível deveria ser comparável a:
 - Energia de ligação atômica dos elétrons $\sim eV$ ($z \sim 10^4$)
 - Energia de ligação dos núcleos atômicos $\sim MeV$ ($z \sim 10^{10}$)



A NUCLEOSSÍNTESE PRIMORDIAL

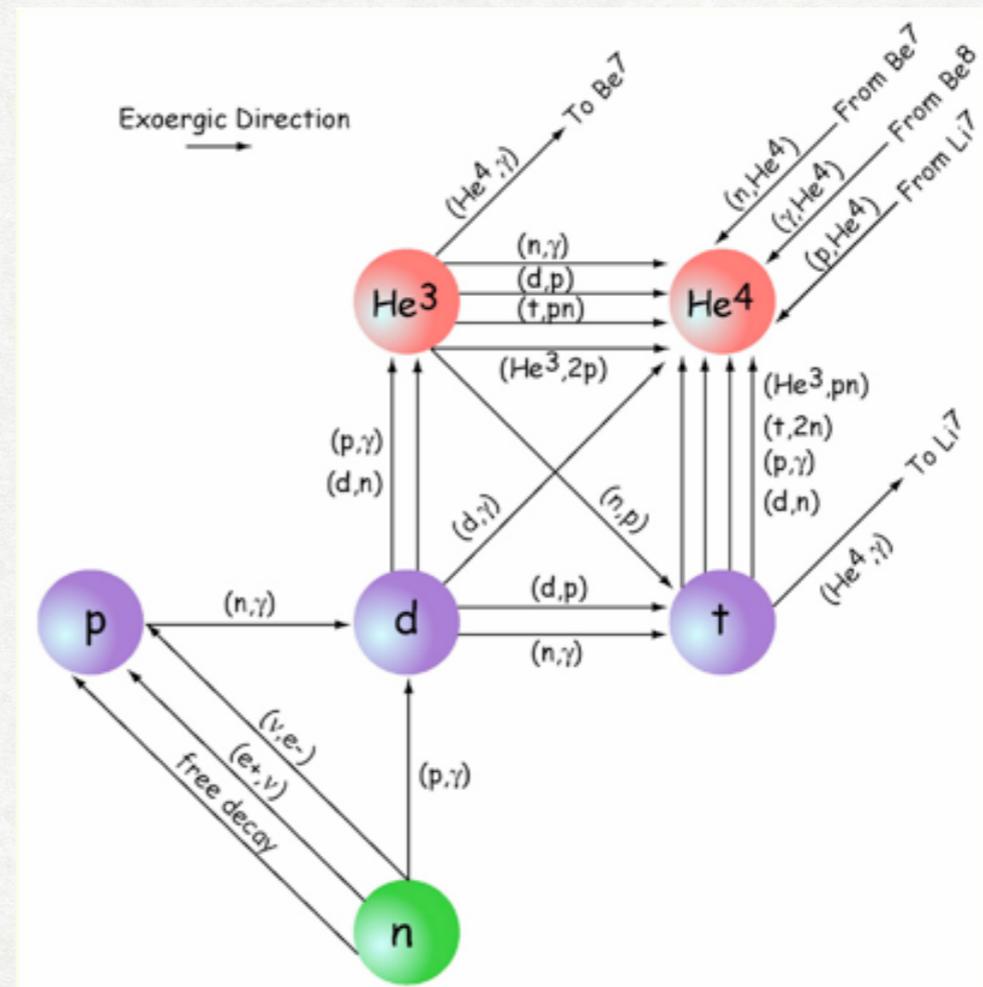
- Uma das previsões de Gamow nos anos 1940, junto com seu estudante Ralph Alpher, e depois com Hans Bethe *, foi o processo chamado de *nucleossíntese primordial* (ou Big Bang Nucleosynthesis, BBN).
- Eles notaram que, a altíssimas energias, nenhum núcleo atômico poderia existir: apenas *prótons e nêutrons livres* (além, claro, de fótons, elétrons, neutrinos etc.)
- Por outro lado, as energias nucleares de ligação *umentam* com o *número atômico*.
- Mas à medida que o universo resfriasse, não era plausível que *primeiro* fossem gerados núcleos pesados e *depois* os mais leves: *primeiro* deveriam se formar os *mais leves*, e só *depois* os mais pesados, a partir da *fusão* dos mais leves.
- Além disso, esse processo não poderia demorar muito mais do que alguns minutos depois do Big Bang, porque o *nêutron* livre (fora de um núcleo) *decai* em $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$, num tempo médio de 880s .

* Eles de fato publicaram um artigo com autores Alpher, Bethe e Gamow!

A NUCLEOSSÍNTESE PRIMORDIAL

- O processo de formação dos primeiros núcleos pode ser deduzido a partir dos dados abaixo, que eram já bem conhecidos nos anos 1940-1950.

AZ	B_A
${}^2\text{H}$	2.22 MeV
${}^3\text{H}$	6.92 MeV
${}^3\text{He}$	7.72 MeV
${}^4\text{He}$	28.3 MeV
...	...

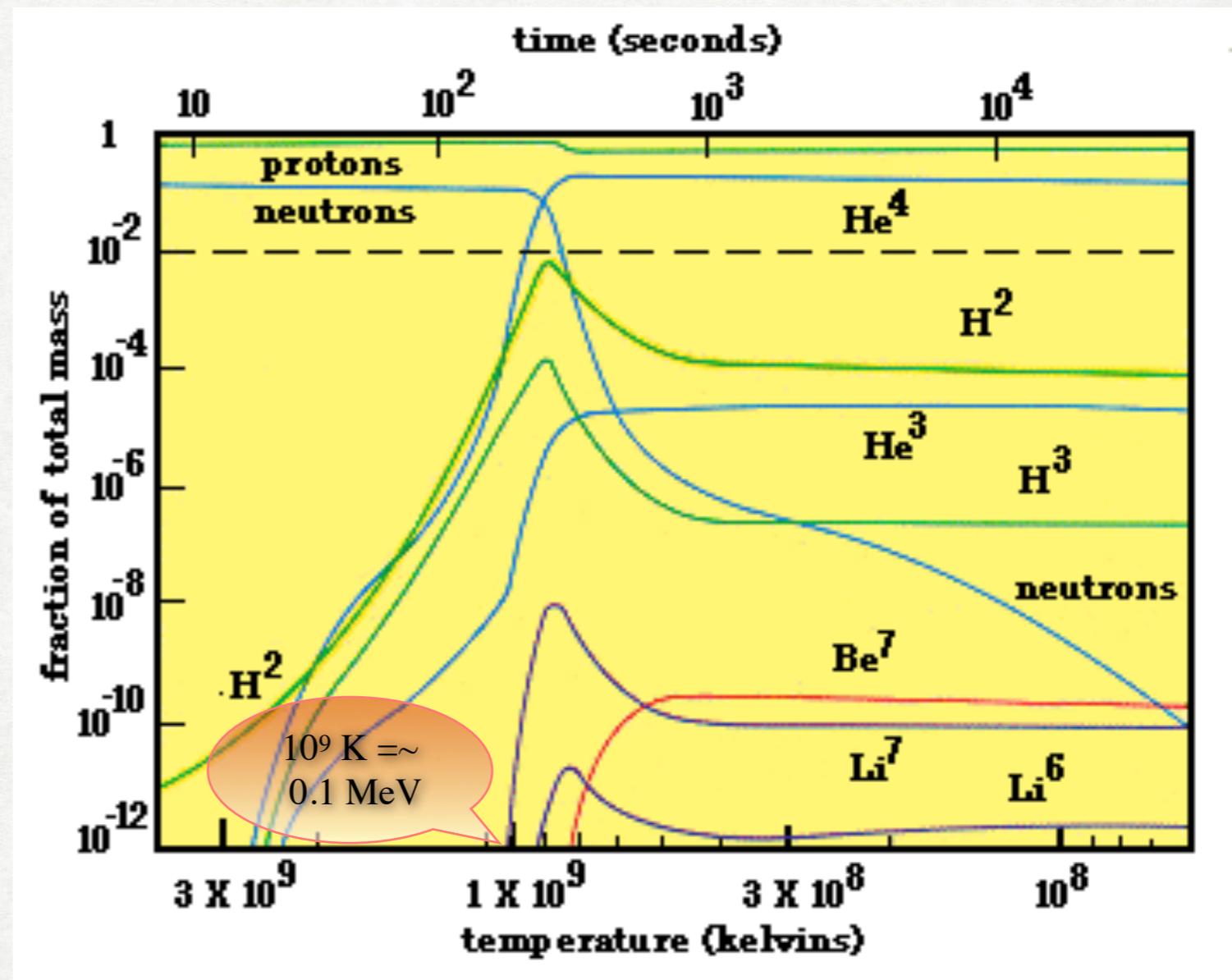
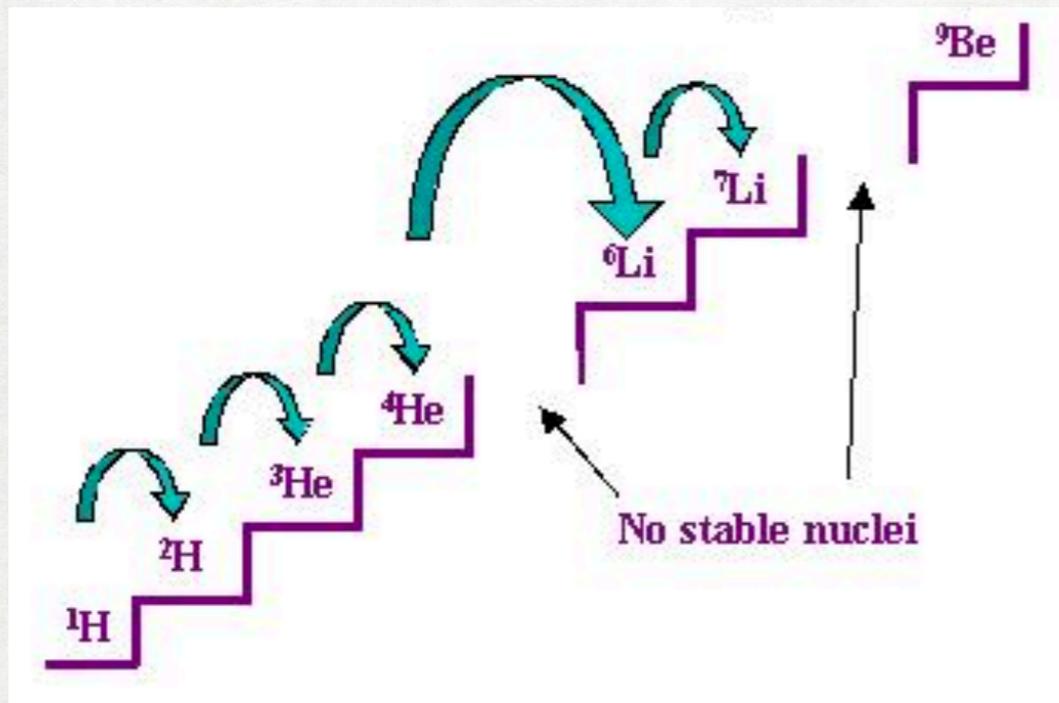


A NUCLEOSSÍNTESE PRIMORDIAL

- A sequência de eventos é a seguinte, se iniciando quando a energia média disponível no universo era da ordem de 10 MeV (aproximadamente 0,1 s depois do Big Bang):
 - Os núcleos leves (D, T, ^3He , ^4He , ...) *começam a se formar, "comendo" os nêutrons* disponíveis;
 - os *nêutrons* que não estão nesses núcleos leves começam a *decair*, $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e + \gamma$;
 - quanto *mais fótons* (radiação) existir para cada bárion (p ou n), mais fácil é transformar prótons em nêutrons ($p + \gamma \rightarrow n + e^+ + \nu_e$), *restaurando o equilíbrio* entre as duas espécies, e mais fácil é *quebrar os núcleos leves* que possam ter se formado; mas com a expansão essa energia disponível na radiação decai e decai e decai...;
 - com cada vez *menos nêutrons* disponíveis, torna-se cada vez mais difícil formar novos núcleos de ^2H (D), ^3He , ^4He , etc. — esse processo vai lentamente parando;
 - quando o universo atinge uma temperatura de aproximadamente 0.05 MeV ($t \sim 100 \text{ s} \sim 3 \text{ min}$), praticamente *todos os nêutrons foram capturados* pelos núcleos, ou decaíram em prótons. A partir desse momento as abundâncias dos núcleos leves permanecem constantes ("*Freeze-out*").

A NUCLEOSSÍNTESE PRIMORDIAL

- Essa sequência de eventos pode ser resumida nos gráficos abaixo:



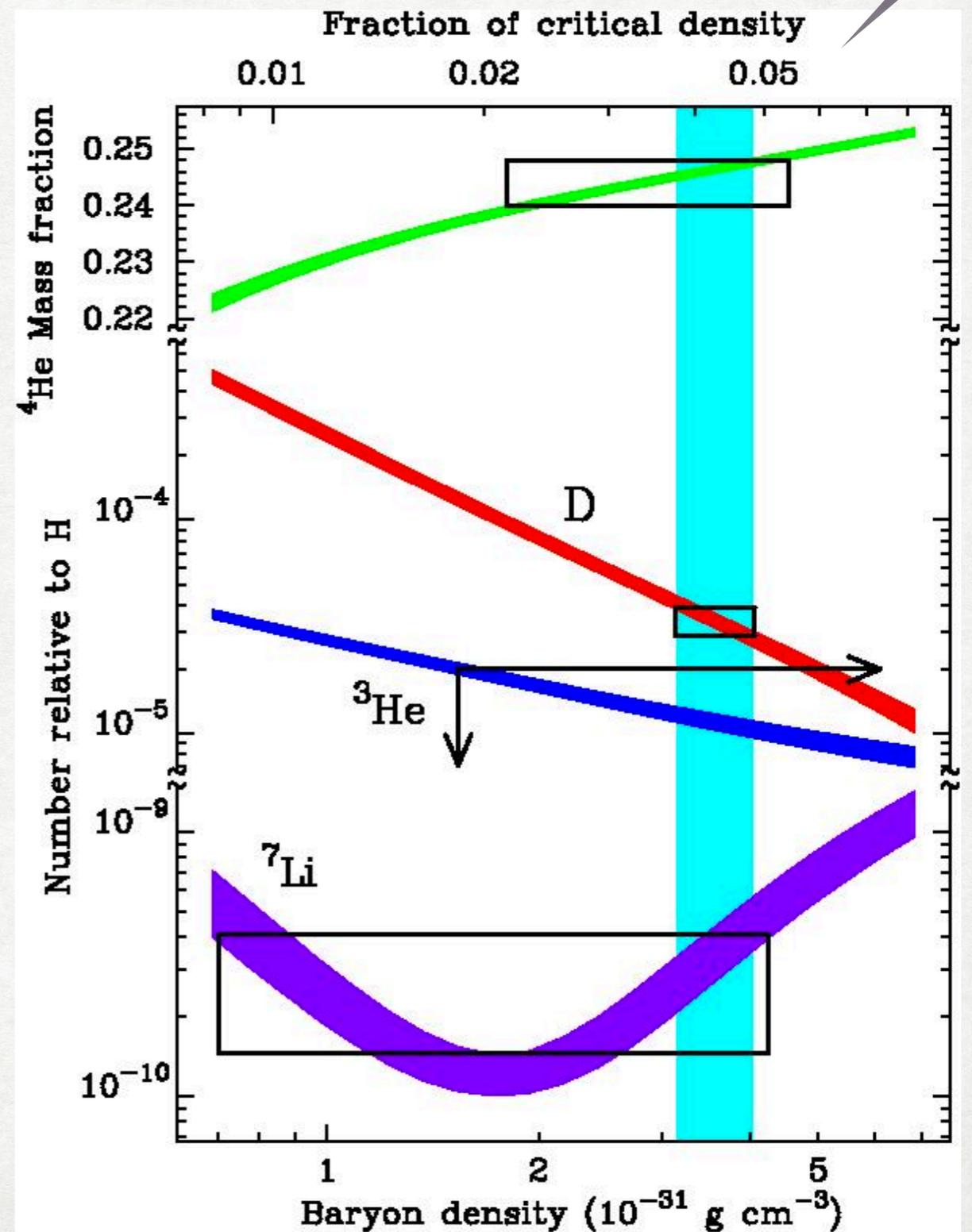
A ausência de núcleos estáveis com número atômico $A=5$ e $A=8$ "mata" a produção de núcleos mais pesados: do universo primordial emergem apenas H, He, Li e Be !

A NUCLEOSSÍNTESE PRIMORDIAL

- Esta é a previsão da BBN, expressa em termos da densidade crítica de bárions, $\Omega_b = \rho_b / \rho_c$
- As abundâncias de ^4He , ^2D , ^3He e ^7Li convergem para uma densidade da ordem de:

$$\Omega_b \simeq 0.04 - 0.05$$

Ou seja, menos de 5% da matéria do universo hoje é feita de "átomos"!

 Ω_{b0} Ω_{b0}

A NUCLEOSSÍNTESE PRIMORDIAL

- Nos três primeiros minutos praticamente todo o Hidrogênio (H) e Hélio (He) do universo foram gerados (+ algum Ly, Be...)
- Mas... e o resto (C, N, O, Fe, ...) ??...

PRODUCED BY THE FOUNDATION FOR EDUCATION, SCIENCE AND TECHNOLOGY FOR NATIONAL SET WEEK 2001

PERIODIC TABLE of the ELEMENTS

DEPARTMENT OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Proudly sponsored by the SHUTTLEWORTH FOUNDATION

DMITRI MENDELEEV (1834 - 1907)

The Russian chemist, Dmitri Mendeleev, was the first to observe that if elements were listed in order of atomic mass, they showed regular (periodical) repeating properties. He formulated his discovery in a periodic table of elements, now regarded as the backbone of modern chemistry.

The crowning achievement of Mendeleev's periodic table lay in his prophesy of then undiscovered elements. In 1869, the year he published his periodic classification, the elements gallium, germanium and scandium were unknown. Mendeleev left spaces for them in his table and even predicted their atomic masses and other chemical properties. Six years later, gallium was discovered and his predictions were found to be accurate. Other discoveries followed and their chemical behaviour matched that predicted by Mendeleev.

This remarkable man, the youngest in a family of 17 children, has left the scientific community with a classification system so powerful that it became the cornerstone in chemistry teaching and the prediction of new elements ever since. In 1950, element 101 was named after him, Md, Mendeleevium.

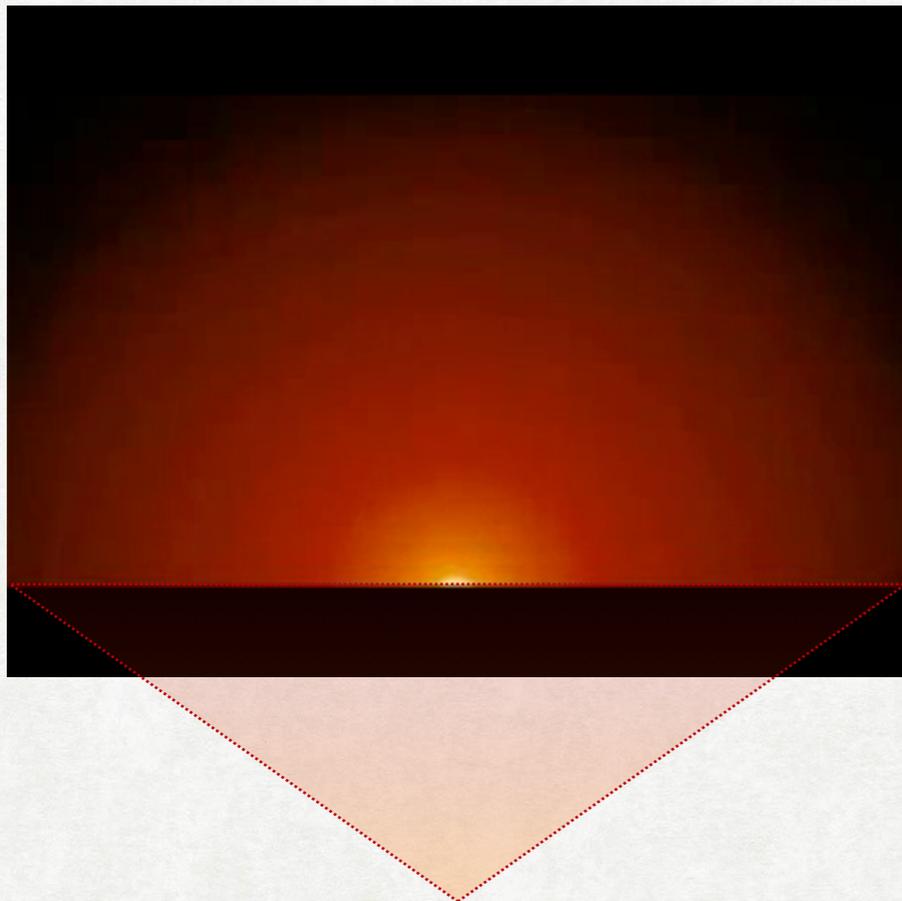
Legend for element states:

- Gas
- Liquid
- Normal solid
- Non-made solid (synthetic)

Elements shown include: H, He, Li, Be, B, C, N, O, F, Ne, Na, Mg, Al, Si, P, S, Cl, Ar, K, Ca, Sc, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Zn, Ga, Ge, As, Se, Br, Kr, Rb, Sr, Y, Zr, Nb, Mo, Tc, Ru, Rh, Pd, Ag, Cd, In, Sn, Sb, Te, I, Xe, Ba, La, Ce, Pr, Nd, Pm, Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Yb, Lu, Cs, Fr, Ra, Ac, Th, Pa, U, Np, Pu, Am, Cm, Bk, Cf, Es, Fm, Md, No, Lr.

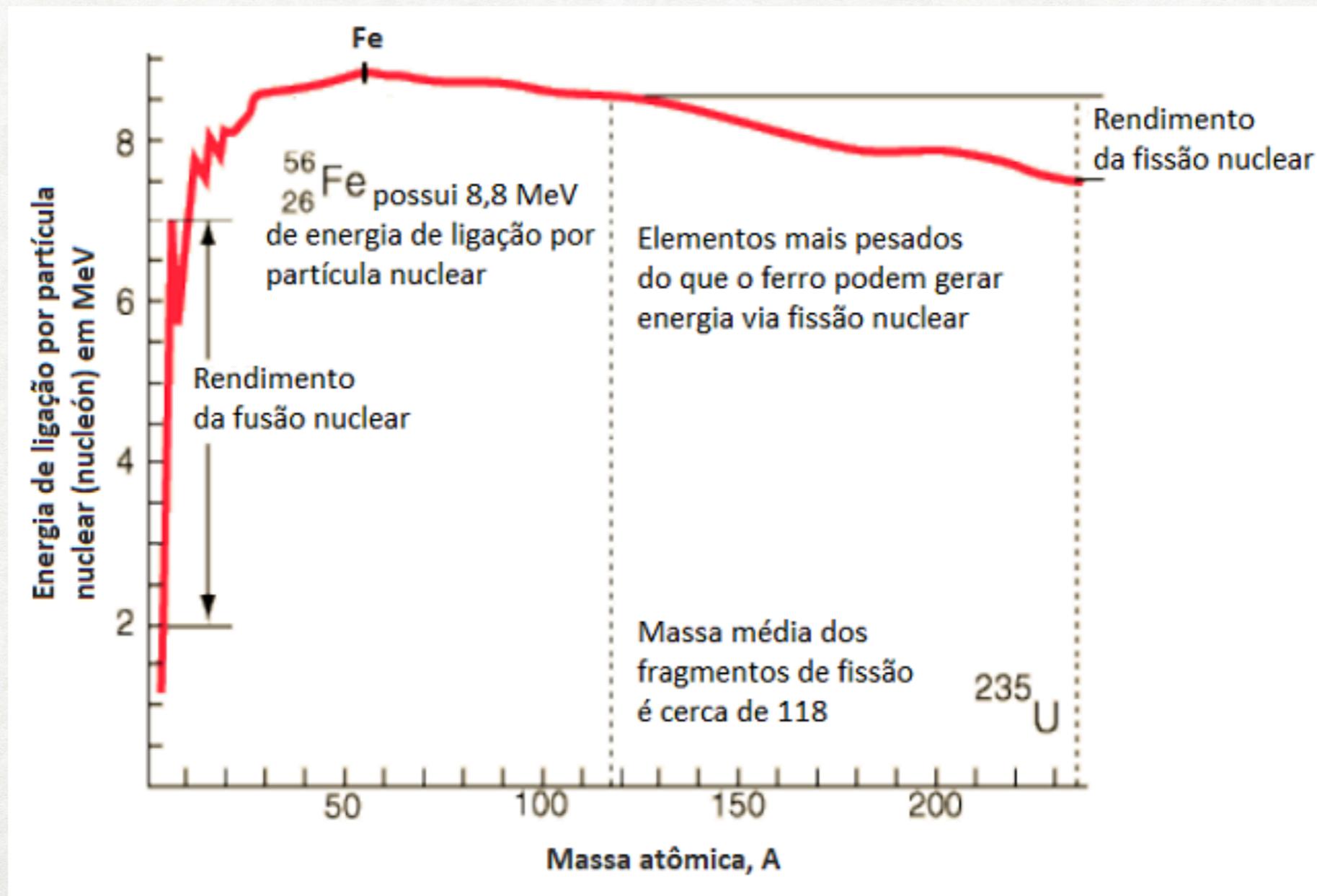
A NUCLEOSSÍNTESE PÓS-PRIMORDIAL

- Boa parte desses elementos (C, N, O, até Fe) foram gerados por *fusão nuclear* no interior de estrelas, e depois jogados de volta ao espaço quando algumas dessas estrelas explodiram em supernovas



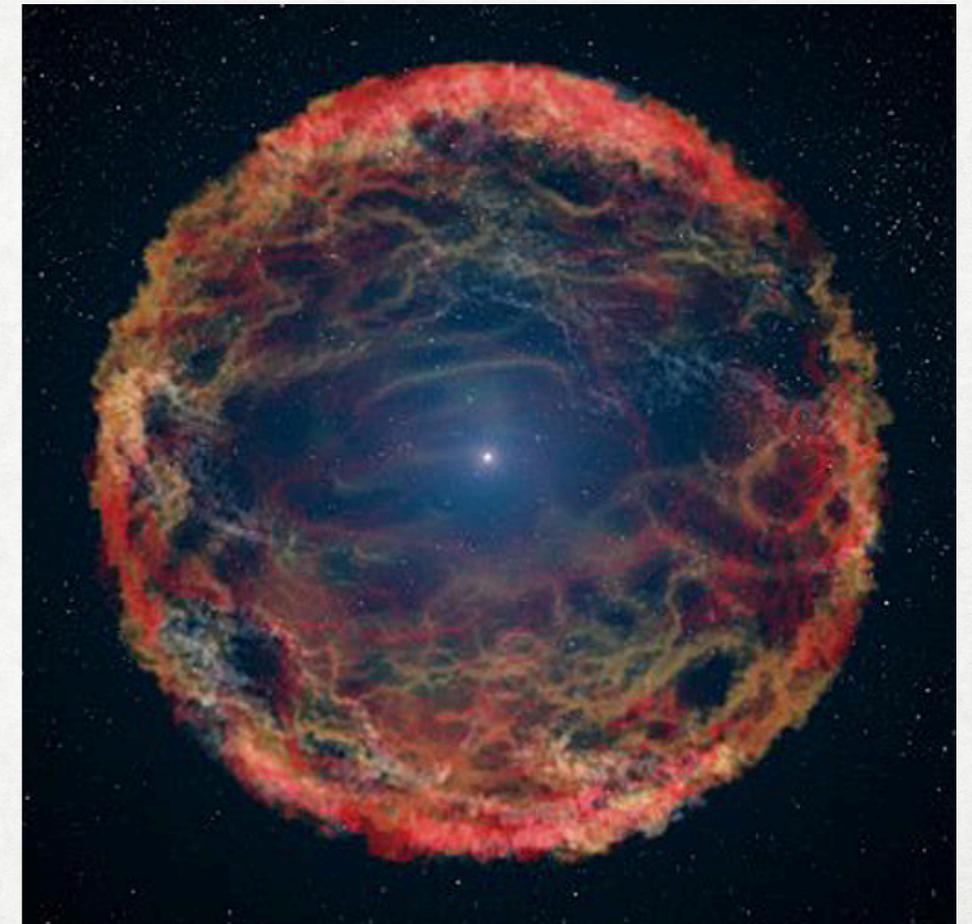
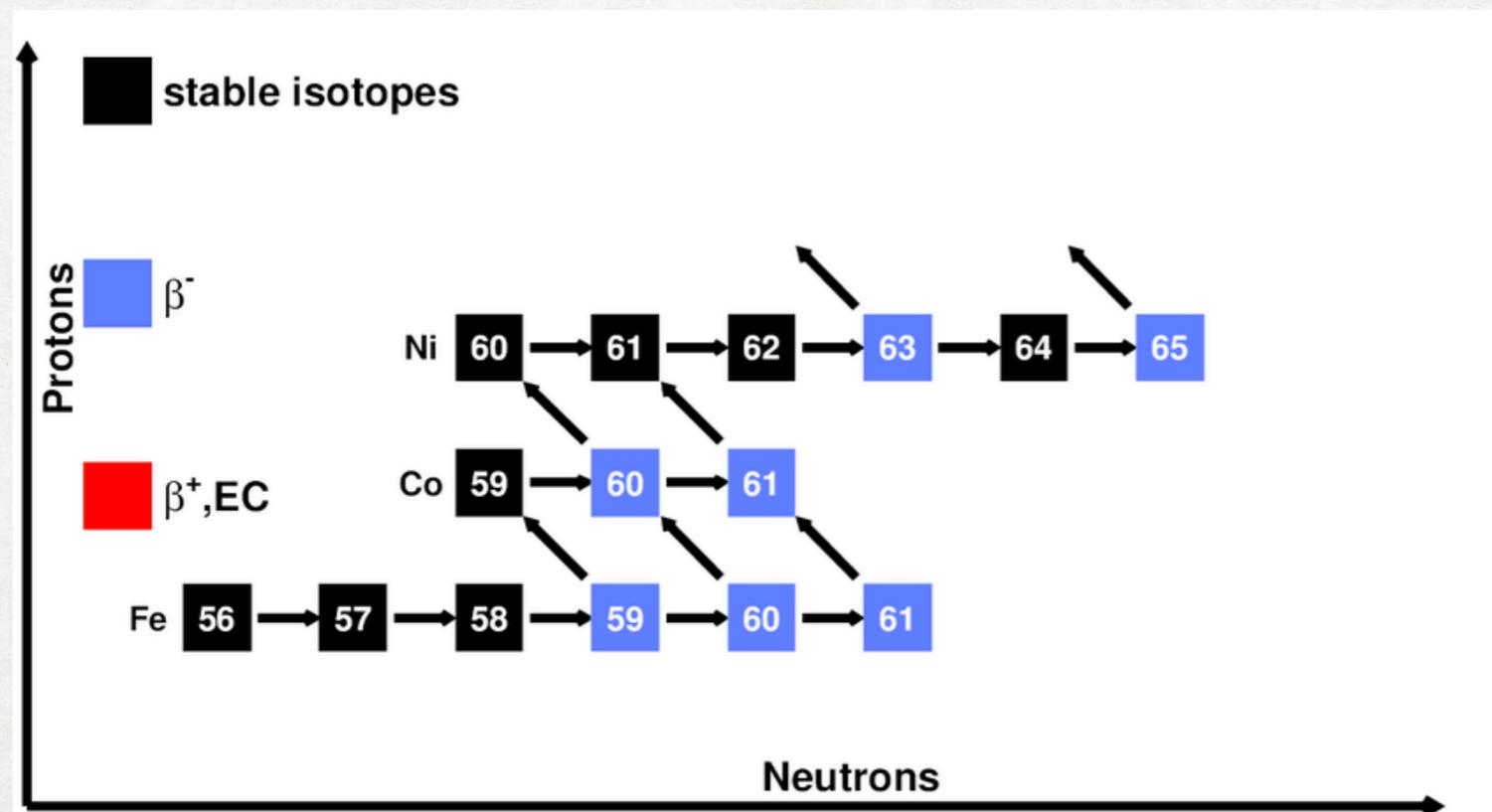
A NUCLEOSSÍNTESE PÓS-PRIMORDIAL

- Mas... e além do Fe? Para esses elementos, a fusão nuclear é um processo *endotérmico*!



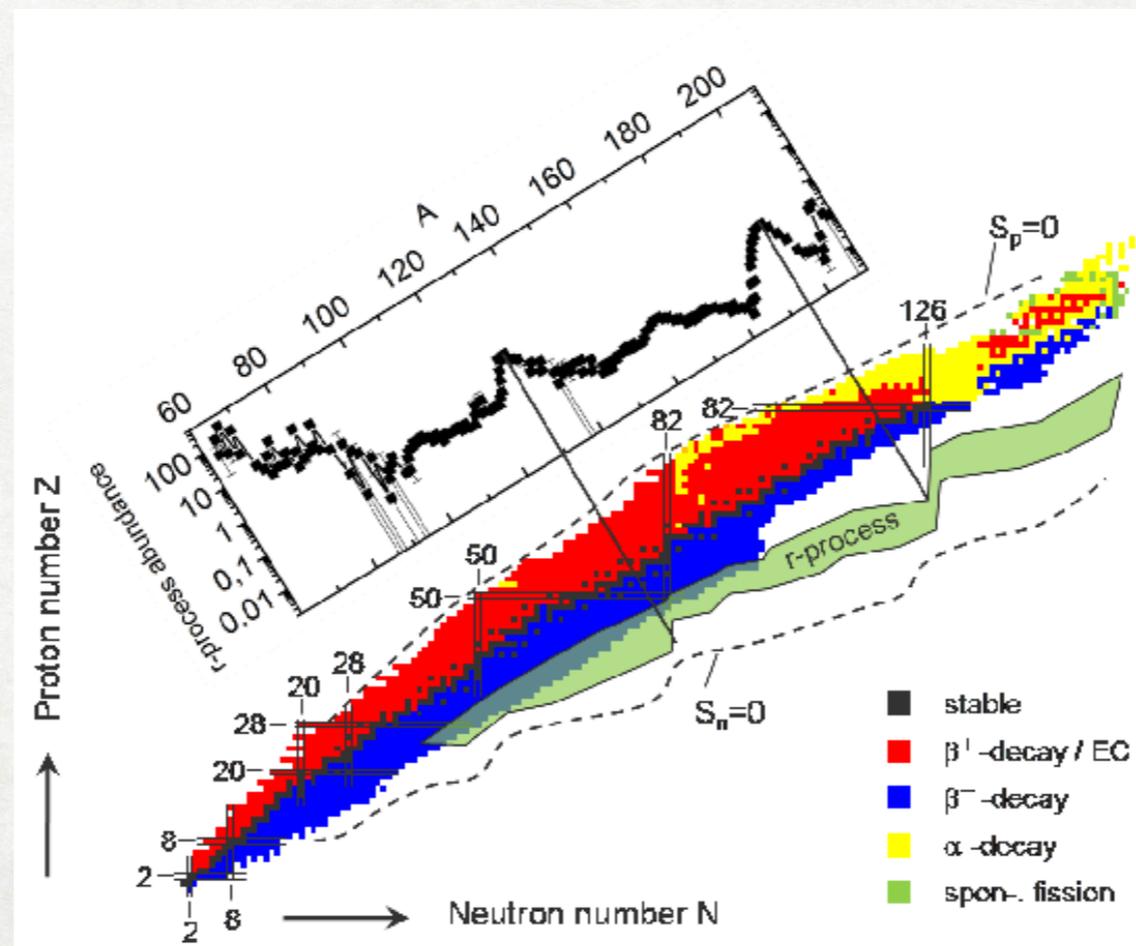
A NUCLEOSSÍNTESE PÓS-PRIMORDIAL

- Alguns elementos mais pesados são gerados nas "bolas de fogo" das ondas de choque geradas por supernovas, pelo processo conhecido como "captura lenta de nêutros" (processos-s)



A NUCLEOSSÍNTESE PÓS-PRIMORDIAL

- Porém, os processos-s produzem elementos mais pesados "lentamente", e quanto maior o número atômico (Co, Ni, Zn,...), mais difícil fica gerar esses elementos.
- Para gerar os elementos *realmente pesados* (Au, Pb, U, ...) que encontramos aqui na Terra precisamos de processos "rápidos":



Como???

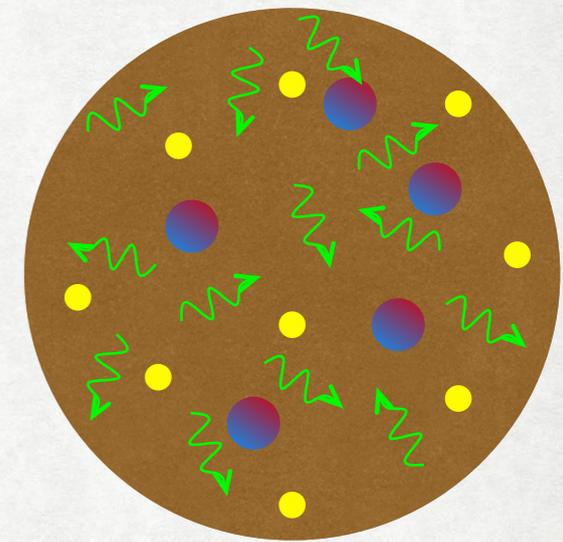
A NUCLEOSSÍNTESE PÓS-PRIMORDIAL

- Palco onde esses processos rápidos ocorrem: fusões de estrelas de nêutrons!



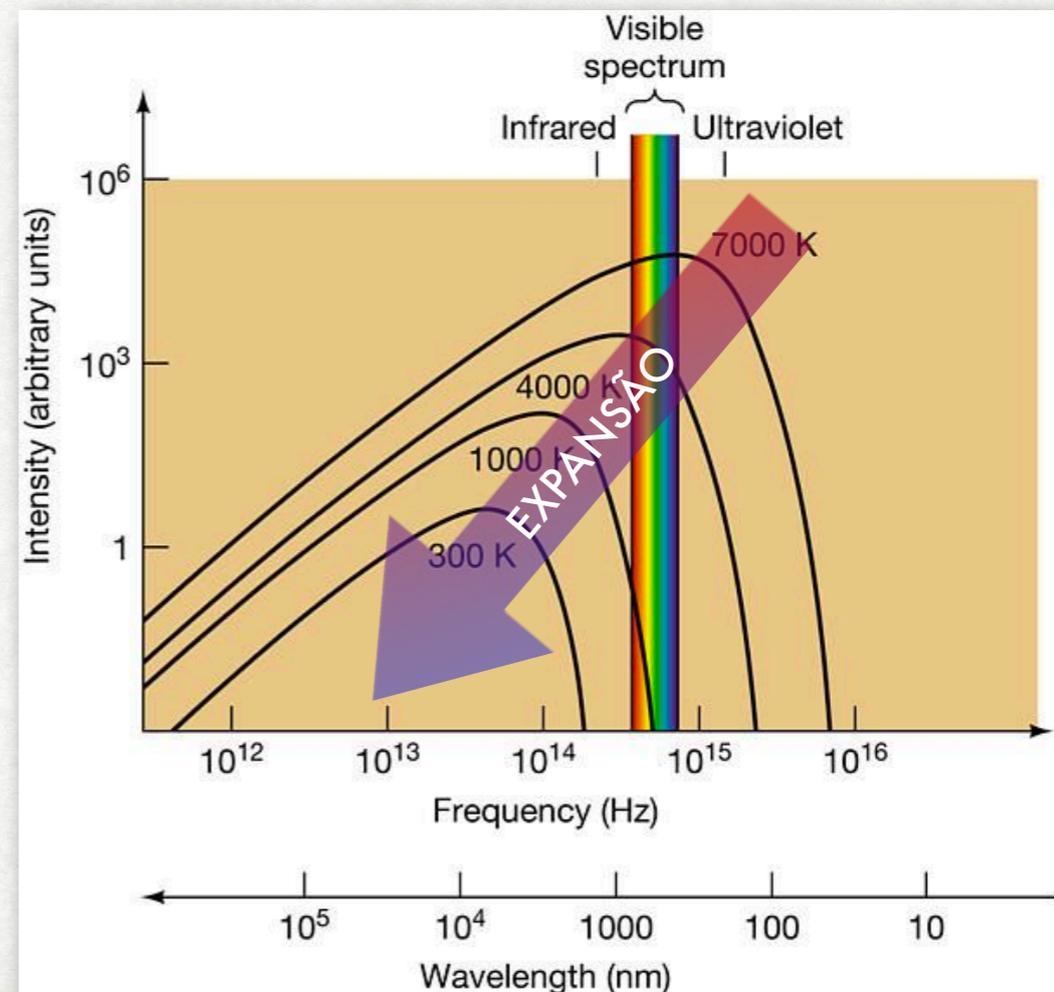
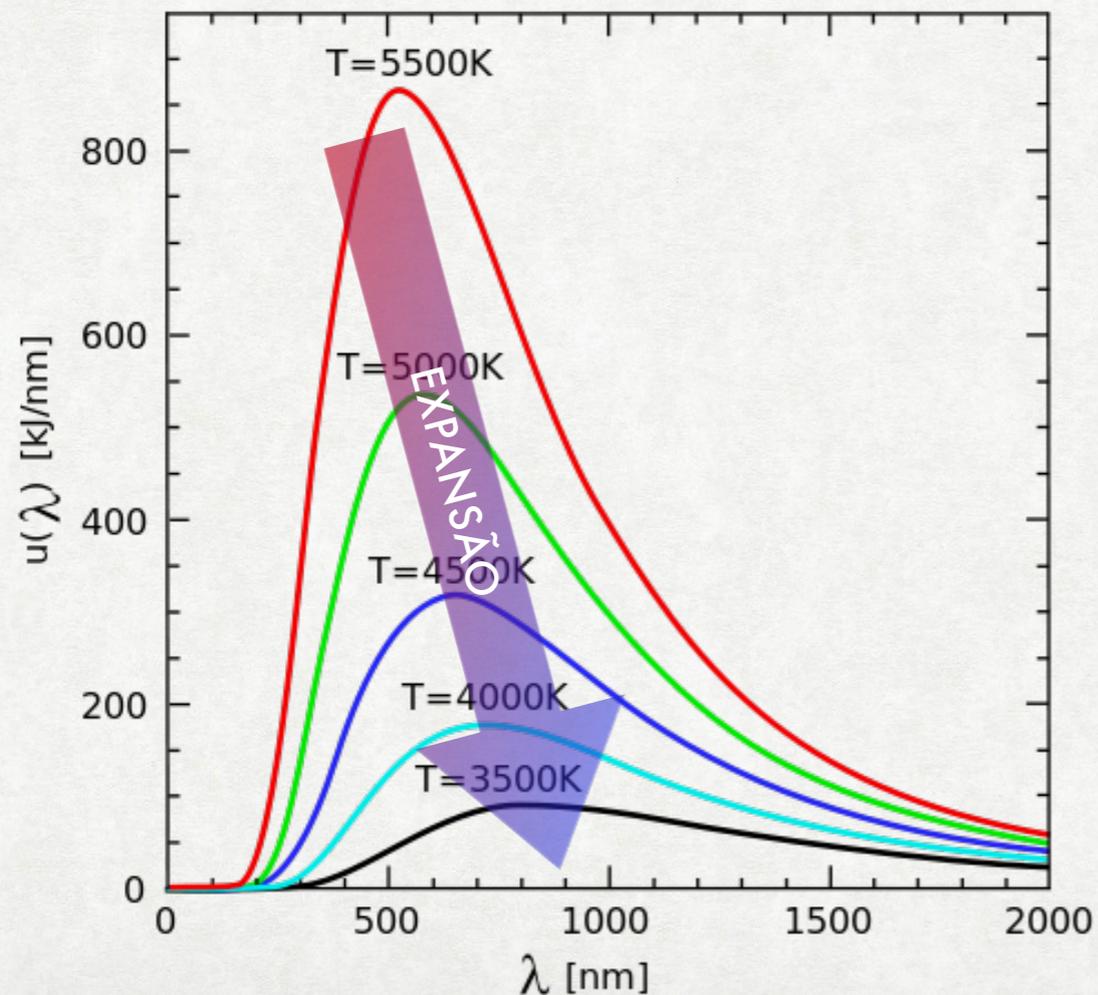
A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

- Uma das outras grandes previsões de Gamow foi a *existência da radiação cósmica de fundo*.
- Acima de uma certa temperatura os elétrons não podem permanecer ligados aos átomos: a energia disponível é mais alta do que a *energia de ligação* desses átomos.
- Isso significa que antes de um certo instante *não haviam átomos neutros*: apenas núcleos atômicos, elétrons livres — e, claro, radiação (luz).
- Um universo que está ionizado também é um universo em que a radiação e a matéria (núcleos atômicos e elétrons) *interagem intensamente e frequentemente*, trocando momento e energia.
- Isso significa que essa "sopa" estava num estado conhecido como *equilíbrio termodinâmico*.



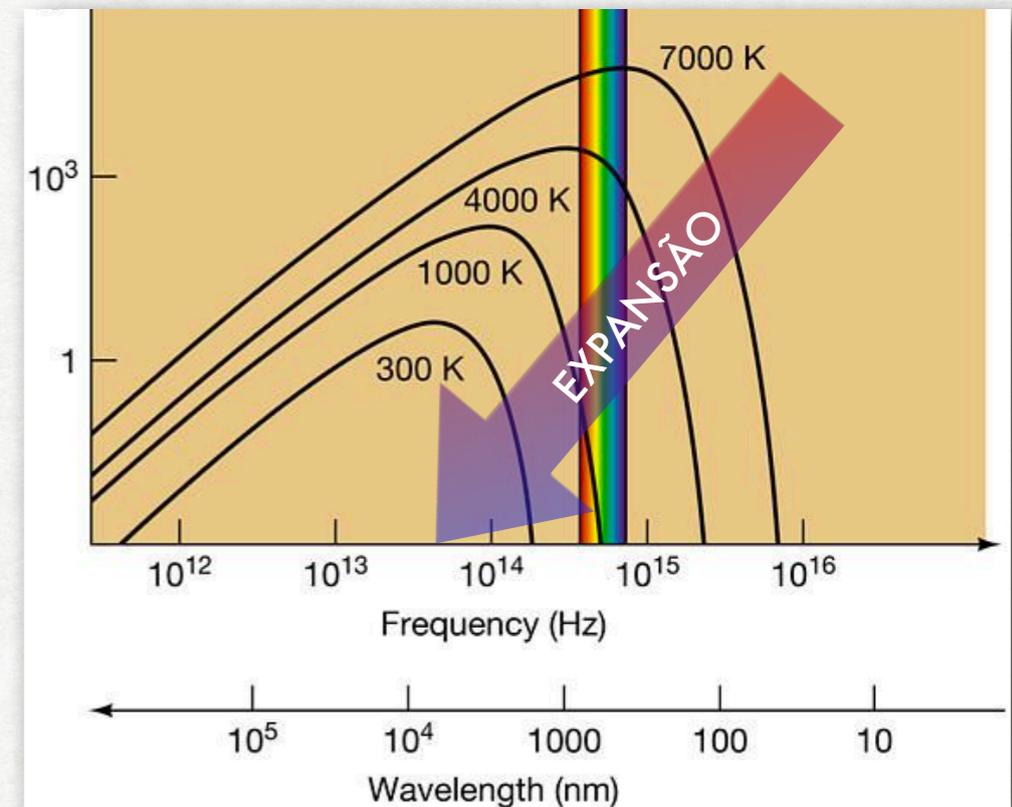
A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

- Ou seja, nos instantes iniciais a radiação estava num estado de *equilíbrio térmico*, o que significa que a distribuição de energia dos fótons seguia uma *distribuição de corpo negro* (a chamada *Planckiana*), com uma *temperatura característica* que cai no tempo exatamente como a energia dos fótons, $E(z) \sim T(z) \sim 1 + z$



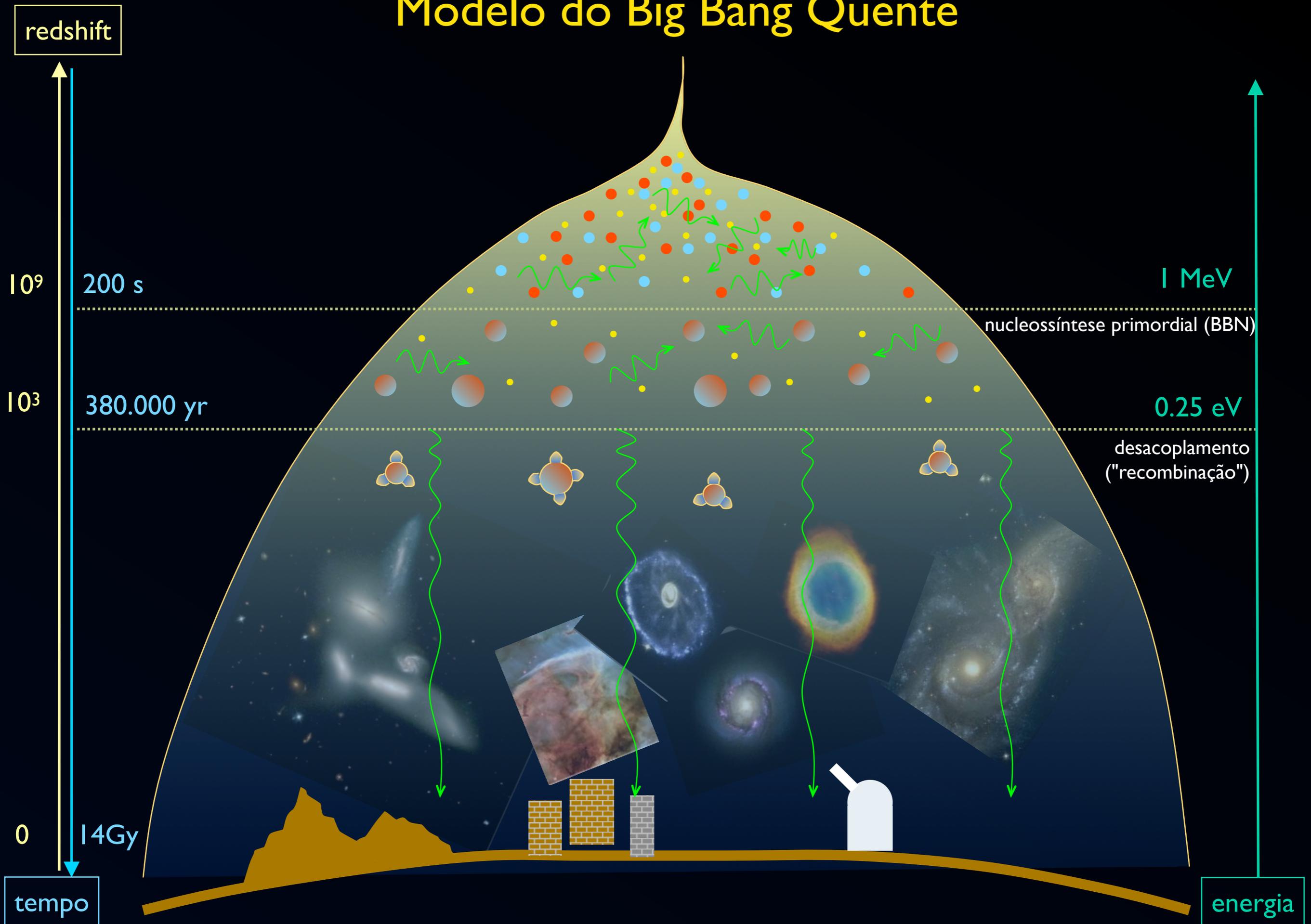
A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

- À medida que o universo foi resfriando, a *temperatura* dessa distribuição de equilíbrio de radiação foi decaindo, até que a energia média disponível era tal que permitisse a *formação dos átomos neutros* (recombinação, ou desacoplamento).
- Gamow não acertou na previsão do momento exato em que isso acontece, entre outros motivos porque ele não sabia quanto de cada componente existia.
- Além disso, não é apenas a *energia* dos fótons que importa, mas também o seu *número* — que é algo como 1 bilhão de fótons para cada elétron!
- Se fizermos a conta com cuidado encontramos que a temperatura para a formação de átomos não é $k_B T = 13.6 \text{ eV}$, e sim $k_B T \sim 0,25 \text{ eV}$ (ou $T \sim 3000 \text{ K}$)!



- **Fato útil: a constante de Boltzmann, em unidades de eV, é $k_B = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$**

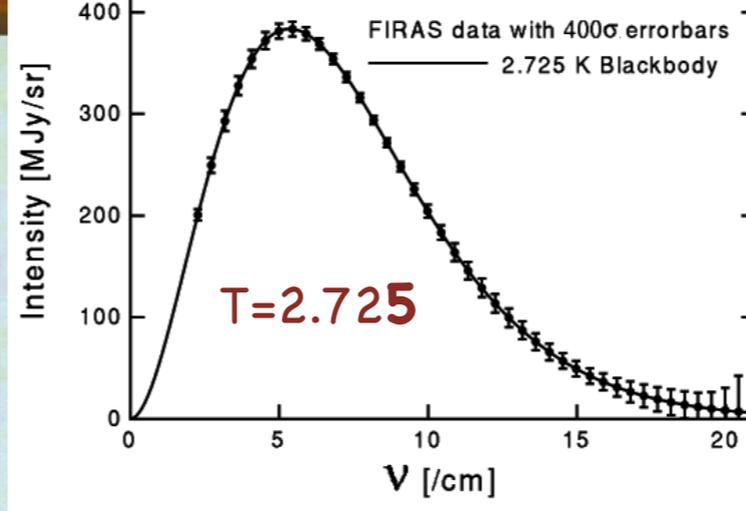
Modelo do Big Bang Quente



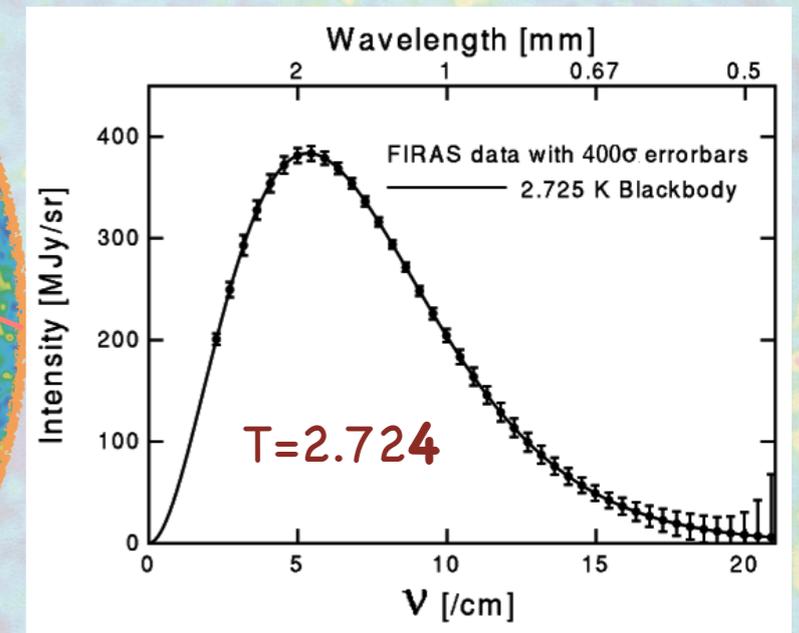
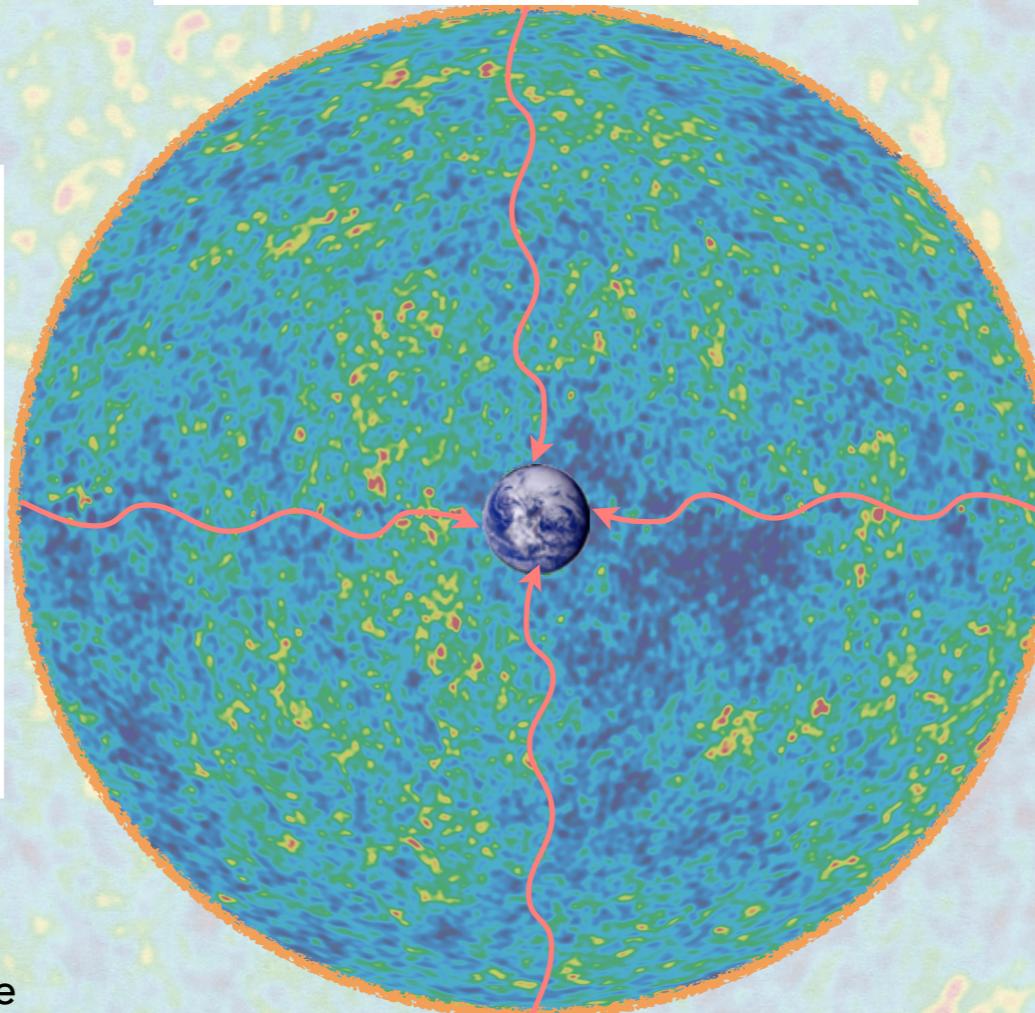
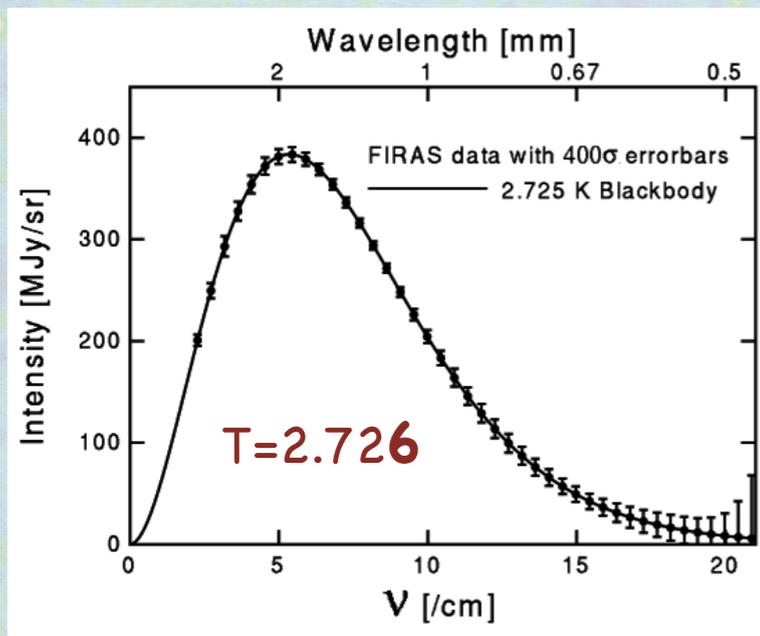
A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO: EVIDÊNCIA DIRETA DO UNIVERSO PRIMORDIAL

- A radiação que “desacoplou” da matéria quando os átomos neutros se formaram foi observada por Penzias & Wilson em 1964 (o que lhes rendeu o Prêmio Nobel de Física de 1978), e nos últimos anos foi observada com alta precisão pelos satélites COBE, WMAP e Planck.
- Essas observações mostraram características dessa Radiação Cósmica de Fundo (RCF) que eram previstas teoricamente, mas que mesmo assim são impressionantes:
 - A RCF é uma *radiação de corpo negro*, com uma precisão impressionante. A temperatura desse corpo negro hoje é de 2.729 K ;
 - A RCF é praticamente a mesma, vista de todas as direções — com diferenças menores do que 0.01 % . Isso significa que o universo em $z \sim 10^3$ era *extremamente homogêneo*.
 - A RCF guarda sinais da presença de matéria, radiação e outras componentes de matéria que estavam presentes

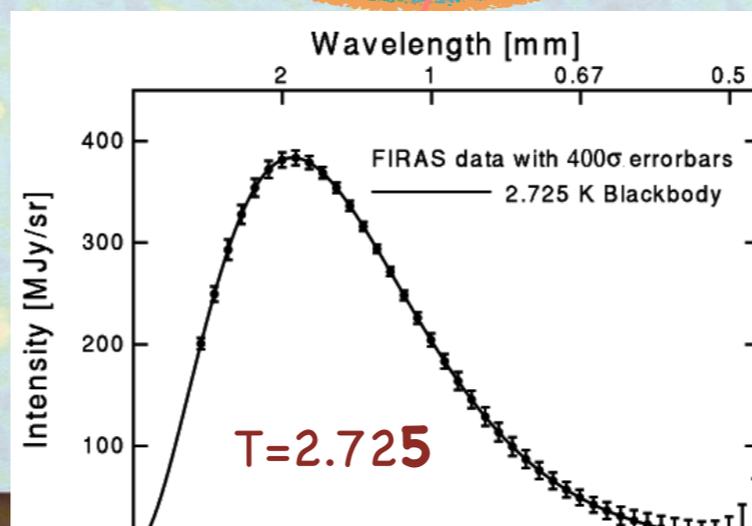
- A luz da RCF desacopla da matéria em $z \sim 10^3$ e se propaga quase sem nenhuma interação até ser capturada hoje pelos nossos telescópios



- A temperatura original da RCF era $T(z = 10^3) \sim 3000$ K, mas com a expansão ela caiu para $T(z = 0) \sim 3$ K, o que significa que a luz fica localizada principalmente na região das microondas ($\lambda \sim \text{cm}$)



- Após o desacoplamento a RCF se propaga em *todas as direções* — o que observamos hoje são aqueles fótons que calharam de estar na casca esférica de raio correspondente a $z \sim 10^3$, e de estarem “apontando” para nós.



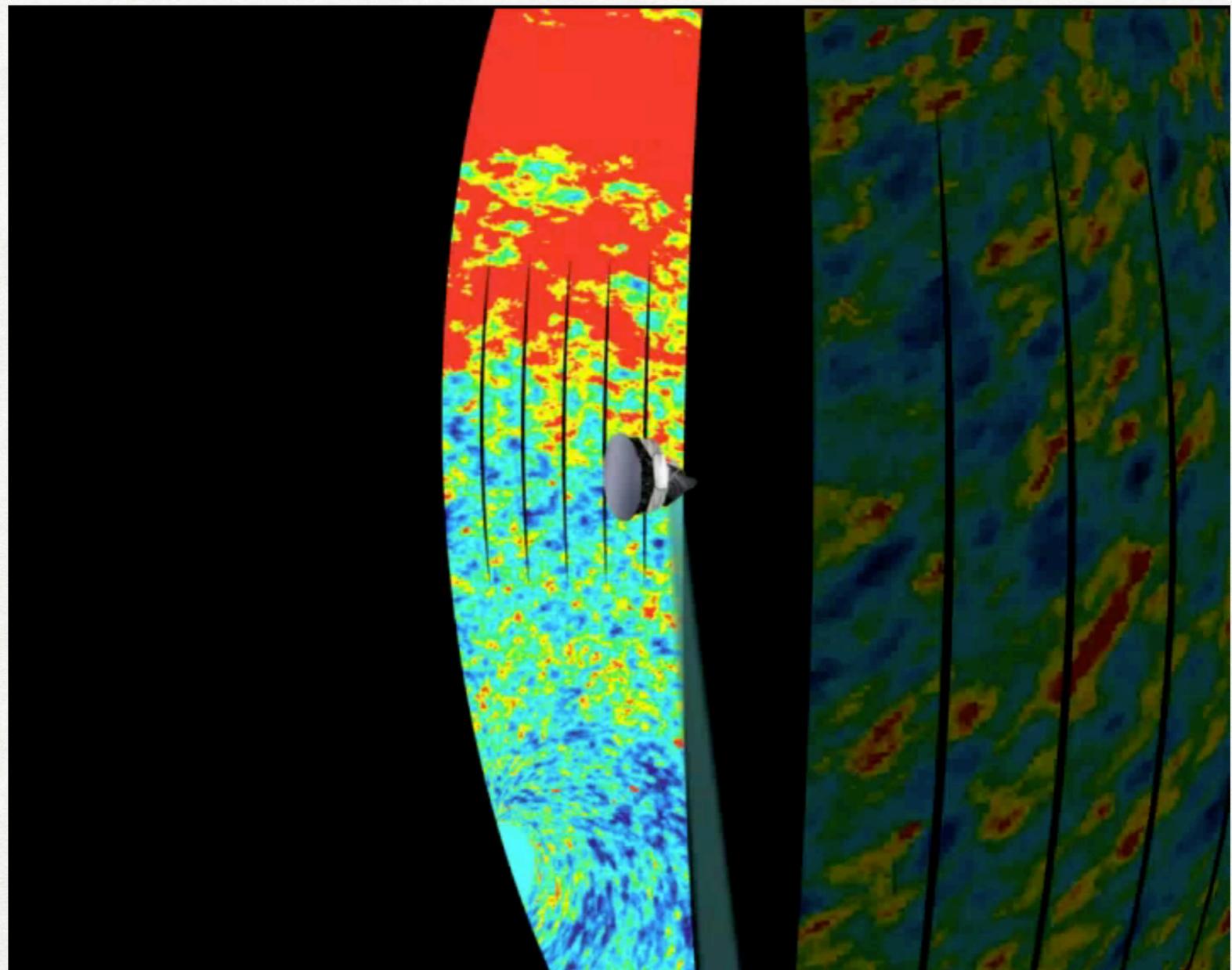
- Os dados da RCF são uma “foto” de uma seção (casca esférica) do nosso cone de luz passado, e representam os padrões típicos de flutuações de temperatura, densidade e pressão que prevaleciam no universo naquele instante ($z \sim 10^3$)

A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO: EVIDÊNCIA DIRETA DO UNIVERSO PRIMORDIAL

- As flutuações de temperatura nos dizem que as flutuações de densidade no universo primordial eram da ordem de:

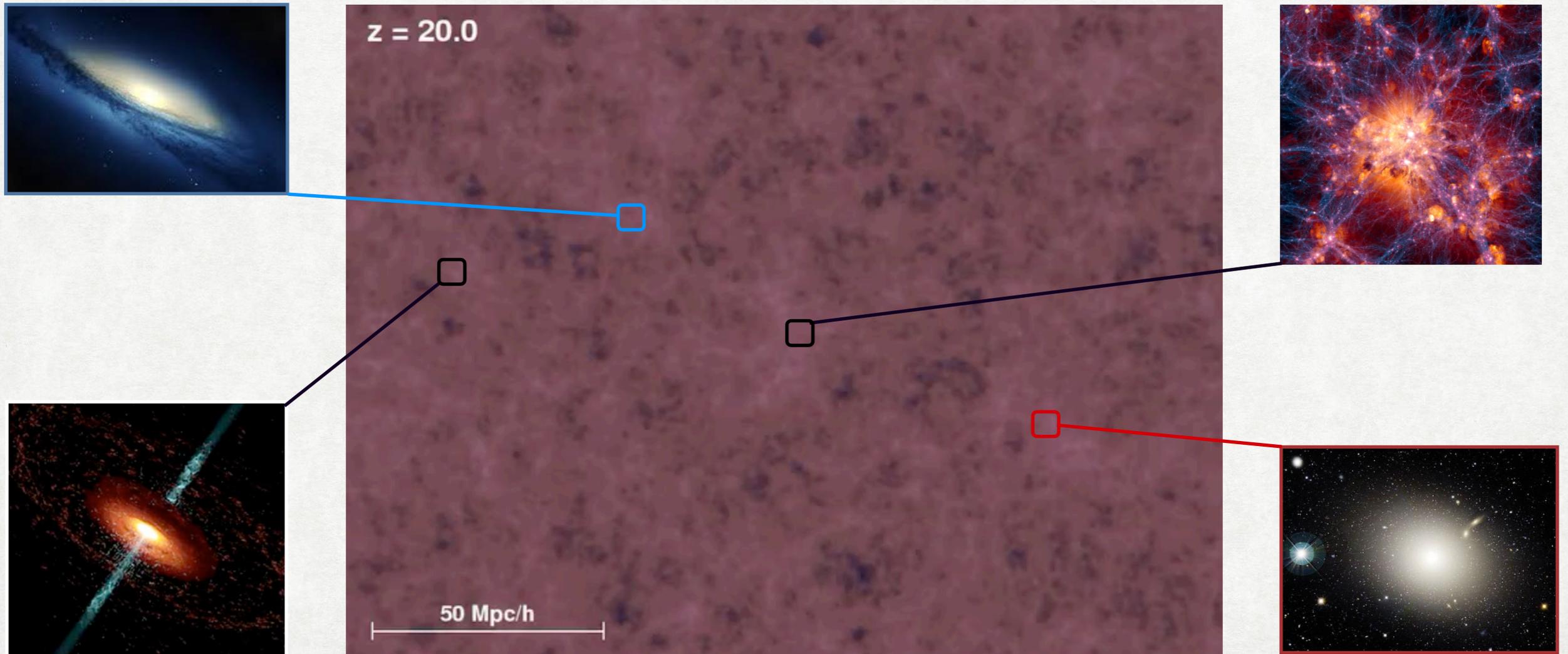
$$\delta\rho = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \sim 10^{-4} - 10^{-5}$$

- RCF: "foto" do universo em $z \sim 10^3$, quando ele tinha apenas 400,000 anos de idade!



A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO: EVIDÊNCIA DIRETA DO UNIVERSO PRIMORDIAL

- Isso significa que o universo começou num estado extremamente homogêneo, e à medida que o tempo passou, a força da gravidade foi agindo para criar as estruturas que vemos hoje



PRÓXIMA AULA:

- Matéria escura
- A estrutura causal de FLRW: cones de luz
- O Big Bang e a Inflação do universo
- Formação de estruturas no universo
- Leitura: S. Carroll, Capítulo 8 (e caso se sinta *valente*, Cap. 9)

SLIDE EXTRA: DERIVAÇÃO ALTERNATIVA DO REDSHIFT

Uma outra derivação do redshift

T, X : coordenadas do raio de luz
 E, p a menos de uma const. arb. " E_0 "

Como a luz é uma geodésica nula, temos: $l^\mu = (E = h\nu, \vec{p})$ $E = \frac{dT}{d\tau}$, $\vec{p} = \frac{d\vec{X}}{d\tau}$

com: $l^\mu l_\mu = g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = 0 \Rightarrow E = \frac{a p}{1 + \frac{k}{4} X^2}$

Vamos usar as coordenadas conformes-Cartesianas, e assumir que a luz se propaga na direção radial X :

$$\frac{dl^0}{d\tau} + \Gamma_{ij}^0 l^i l^j = 0 \Rightarrow \frac{dE}{d\tau} + \frac{da}{dT} a \frac{1}{1 + \frac{k}{4} X^2} p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{d\tau} + \frac{da}{d\tau} \frac{d\tau}{dT} a \frac{1}{1 + \frac{k}{4} X^2} p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{d\tau} + \frac{da}{d\tau} \frac{1}{E} \frac{1}{a} E^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{da} + \frac{E}{a} = 0 \Rightarrow E \sim \frac{1}{a}$$

$$\nu \sim \frac{1}{a}$$
$$\lambda \sim a$$