FÍSICA I – 2020

DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO

EPISÓDIO 3

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO GERAIS (CORPO RÍGIDO)

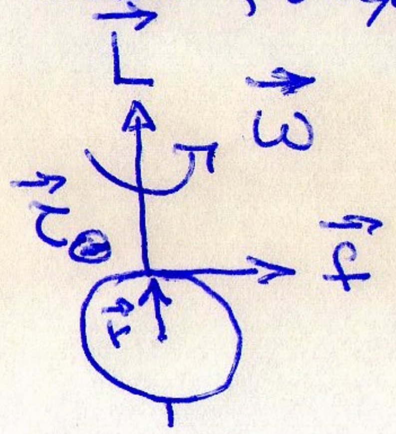
(1) $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)}$ (Translação do CM)

(2) $\dfrac{dL_{CM}}{dt} = \vec{\tau}^{(ext)}_{CM}$ (Rotação em torno do CM)

<u>Observação geral qualitativa</u>: se o que é descrito por (1) é tido como "normal", então as consequências de (2) parecem "exóticas".

(1) Aplicação de força externa $\vec{F}^{(ext)}$ acelera o CM na direção e sentido de $\vec{F}^{(ext)}$.

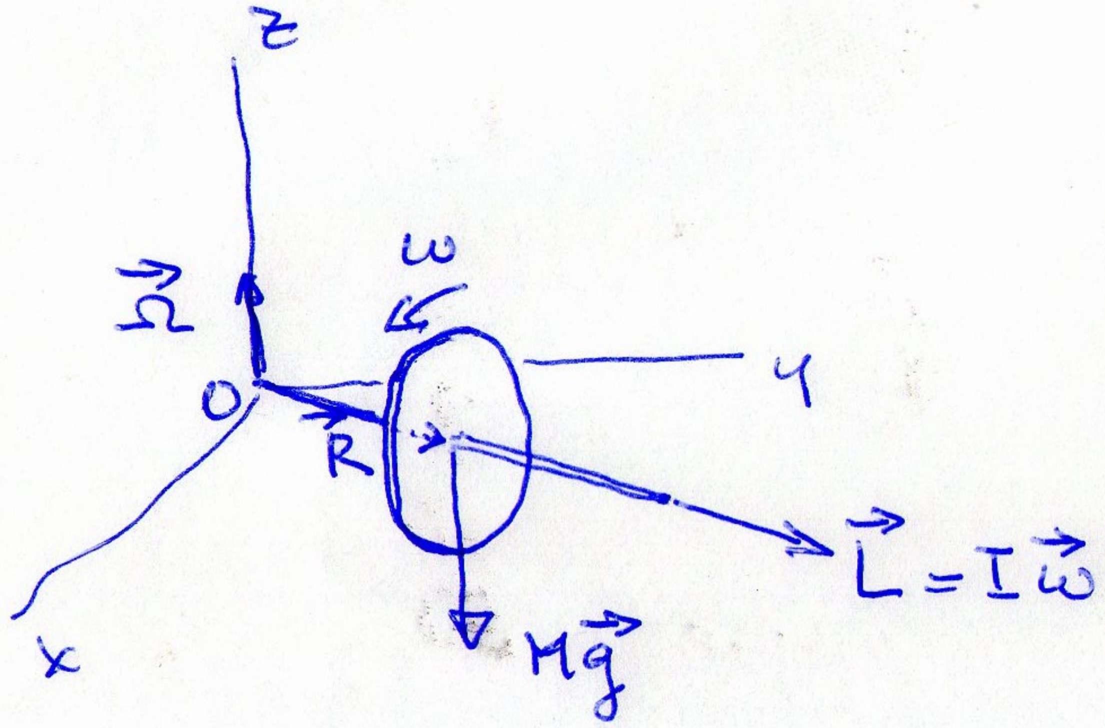
(2) Aplicação de força externa 'acelera' $\vec{L}$ na direção e sentido do <u>torque</u> dessa força, $\vec{\tau}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{f}$, que é <u>perpendicular</u> a essa força.



A força $\vec{f}$ puxa o eixo de rotação para o <u>lado</u>, mas o torque desvia $\vec{L}$ para <u>frente</u>
(Relação "exótica" entre força e deslocamento)

Relevante para comportamento de <u>giroscópios</u>, <u>piões</u>, etc.

GIROSCÓPIO _ Construção de uma solução estacionária de $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(ext)}$



* Eixo horizontal
* Precessão em torno de z com vel. angular $\vec{\Omega}$

Depois de um tempo Δt

$$\vec{L} \to \vec{L} + \underbrace{\vec{\Omega}\times\vec{L}\,\Delta t}_{\Delta\vec{L}} \to \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{\Omega}\times\vec{L}$$

$\vec{\tau} = \vec{R}\times M\vec{g}$ ortogonal a $\vec{L}$!

↑ Tem a direção de $\vec{R}$

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{\Omega}\times\vec{L}$$
$$\vec{\tau} = \vec{R}\times M\vec{g}$$

vetores paralelos

ortogonais ortogonais

$\Downarrow$

$$\Omega L = MgR$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\Omega = \frac{MgR}{I\omega}}$$

$|\vec{L}|$

Obs1: $\vec{\Omega}$ leva a uma contribuição adicional para $\vec{L}_{tot}$; mas ela é ortogonal a $\vec{L}$ e constante, devido à ausência de torque na direção z.

Obs 2: $\vec{\Omega}$ implica em uma contribuição adicional à energia cinética, além de $\frac{I}{2}\omega^2$!

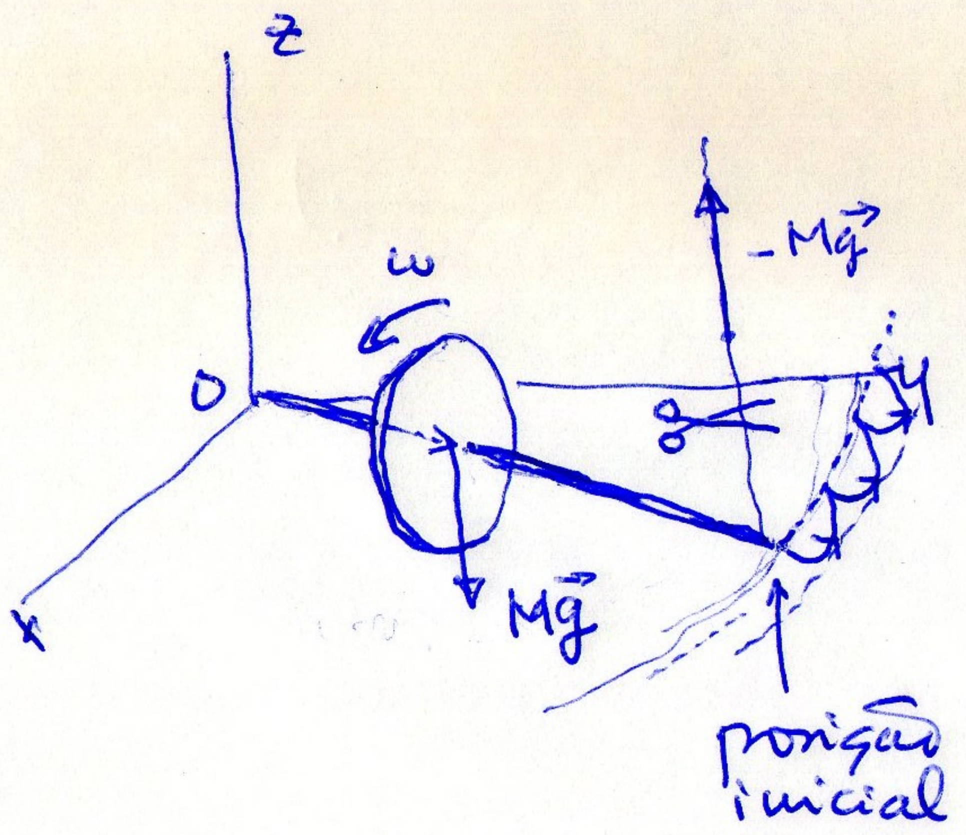
Condições iniciais para êsse movimento

* Eixo horizontal
* Momento angular $\vec{L}$ (vel. angular $\vec{\omega}$) do giroscópio
* Velocidade de precessão $\vec{\Omega}$, com $\Omega = \frac{MgR}{I\omega}$ na direção $\hat{z}$

(A condição inicial tem que ser parte da solução estacionária)

Outras condições iniciais $\Rightarrow$ outro movimento!

* Discussão qualitativa de um caso: tudo como acima, mas $\Omega = 0$ (inicialmente)
  * O sistema não tem energia para o movimento de precessão. $\Rightarrow$ queda sob ação do pêso libera energia potencial
  * Queda leva ao aparecimento de uma componente de $\vec{L}$ na direção $-\hat{z}$. Mas a ausência de τ_z exige o aparecimento de uma compensação na direção $+\hat{z}$, produzida pela precessão.
  * A velocidade da precessão compensatória acaba excedendo a da precessão estacionária, dando lugar ao comportamento oscilatório em torno da velocidade de precessão estacionária, correlacionado com subidas e descidas do eixo



$\boxed{\text{* NUTAÇÃO}}$

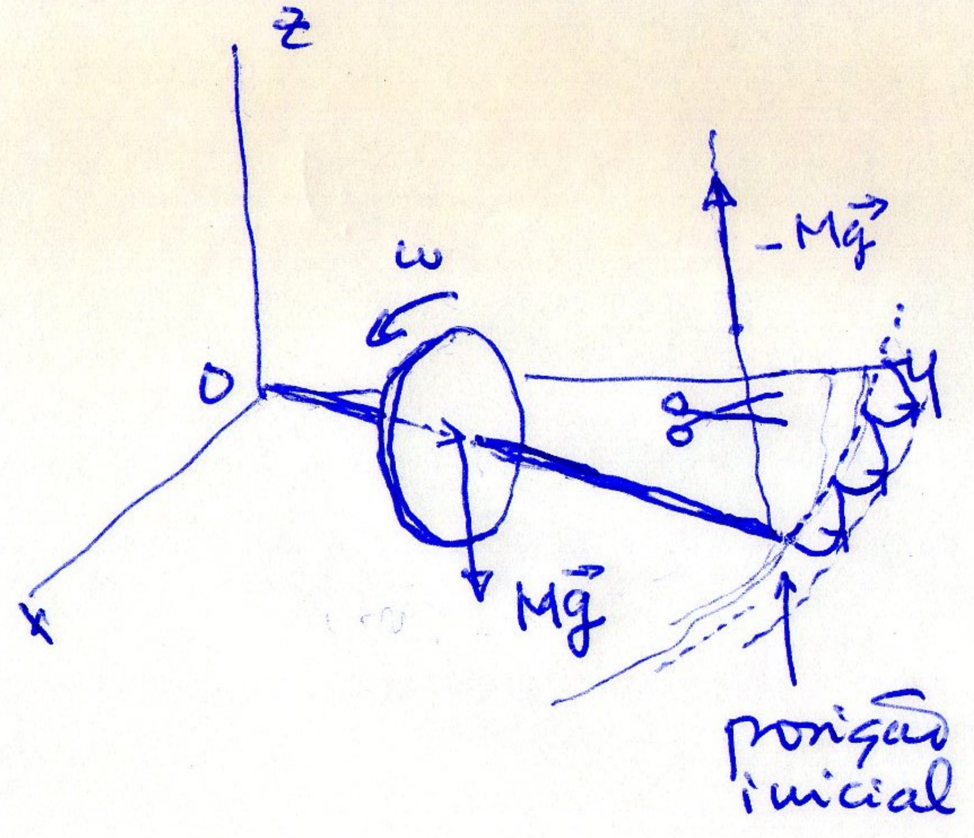
<u>Condições iniciais</u> para êsse movimento

* Eixo horizontal
* Momento angular $\vec{L}$ (vel. angular $\vec{\omega}$) do giroscópio
* Velocidade de precessão $\vec{\Omega}$, com $\Omega = \dfrac{MgR}{I\omega}$ na direção $\hat{z}$

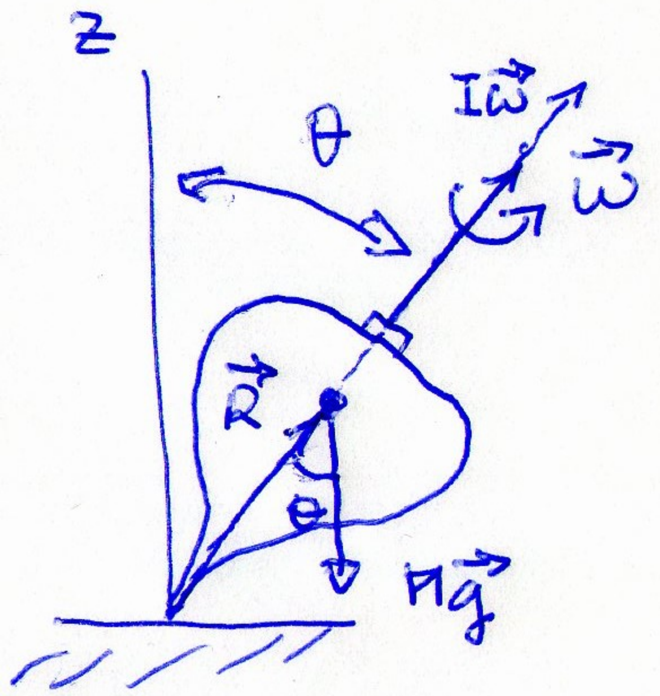
(A condição inicial tem que ser parte da solução <u>estacionária</u>)

Outras condições iniciais $\Rightarrow$ outro movimento!

* Discussão <u>qualitativa</u> de um caso: tudo como acima, mas $\Omega = 0$ (inicialmente)
  * O sistema não tem <u>energia</u> para o movimento de precessão. $\Rightarrow$ <u>queda</u> sob ação do pêso libera energia potencial
  * <u>Queda</u> leva ao aparecimento de uma componente de $\vec{L}$ na direção $-\hat{z}$. Mas a ausência de τ_z exige o aparecimento de uma compensação na direção $+\hat{z}$, produzida pela <u>precessão</u>.
  * A velocidade da precessão compensatória acaba <u>excedendo</u> a da precessão estacionária, dando lugar ao comportamento oscilatório em torno da velocidade de precessão estacionária, correlacionado com subidas e descidas do eixo



$\boxed{\text{* NUTAÇÃO}}$



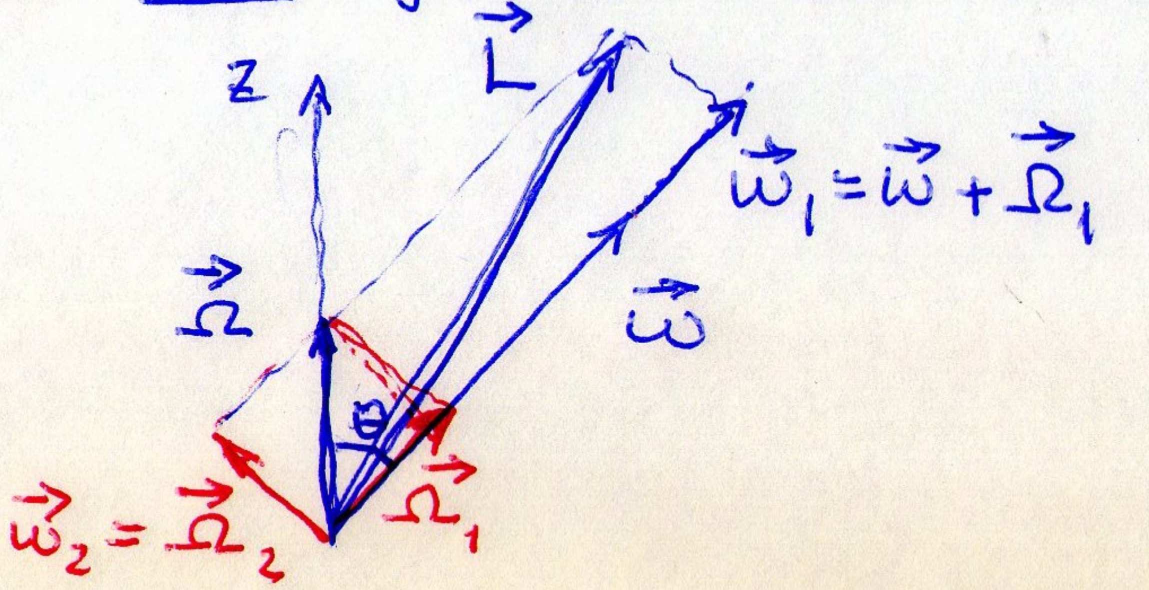
PIÃO - Um giroscópio "doméstico"

Precessão, inclinações geralmente $< 90°$!

* Ignorando a contribuição da precessão para L_{tot} (usualmente $\Omega \ll \omega$!) vale o resultado anterior, agora com $\vec{\tau} = \vec{R} \times M\vec{g}$, ou $|\vec{\tau}| = Rmg\,\text{sen}\,\theta$ e

$$\left|\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}\right| = |\vec{\Omega} \times \vec{L}| = \Omega L\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{Rmg}{I\omega}}$$

* Sem ignorar essa contribuição: $\vec{L} = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2$ (eixos principais de inércia!)



Precessão: $\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{\Omega} \times (I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2)$

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times M\vec{g}$$

vetores paralelos; igualando módulos

$$MgR\,\text{sen}\,\theta = I_1\omega_1\Omega\,\text{sen}\,\theta - I_2\Omega_2\Omega\cos\theta$$

$\uparrow$

$\Omega\,\text{sen}\,\theta$

$$MgR\,\cancel{\text{sen}\,\theta} = I_1\omega_1\Omega\,\cancel{\text{sen}\,\theta} - I_2\Omega^2\cancel{\text{sen}\,\theta}\cos\theta \quad \Leftarrow$$

$$\boxed{I_2\cos\theta\,\Omega^2 - I_1\omega_1\Omega + MgR = 0}$$

$\theta = \pi/2 \to$ cai termo em Ω^2, resultado anterior

θ geral: duas raízes!

As duas soluções de $I_2\cos\theta\,\Omega^2 - I_1\omega_1\Omega + MgR = 0$

$$\Omega = \frac{I_1\omega_1 \pm \sqrt{I_1^2\omega_1^2 - 4MgRI_2\cos\theta}}{2I_2\cos\theta}$$

Tipicamente $4MgRI_2\cos\theta \ll I_1^2\omega_1^2$; então $\sqrt{\cdots} = I_1\omega_1\sqrt{1 - \frac{4MgRI_2\cos\theta}{I_1^2\omega_1^2}}$

Taylor $\simeq I_1\omega_1\left(1 - \frac{2MgRI_2\cos\theta}{I_1^2\omega_1^2}\right)$

$$\Omega_- \cong \left(\cancel{I_1}\omega_1 - \cancel{I_1}\omega_1 + \frac{2MgR\cancel{I_2\cos\theta}}{I_1\omega_1}\right)\frac{1}{\cancel{2I_2\cos\theta}} = \frac{MgR}{I_1\omega_1}$$

$$\Omega_+ \cong \frac{2I_1\omega_1 - \frac{2MgRI_2\cos\theta}{I_1^{\cancel{2}}\omega_1^{\cancel{2}}}\cancel{I_1\omega_1}}{2I_2\cos\theta} = \frac{I_1\omega_1}{I_2\cos\theta} - \frac{2MgR}{I_1\omega_1}$$

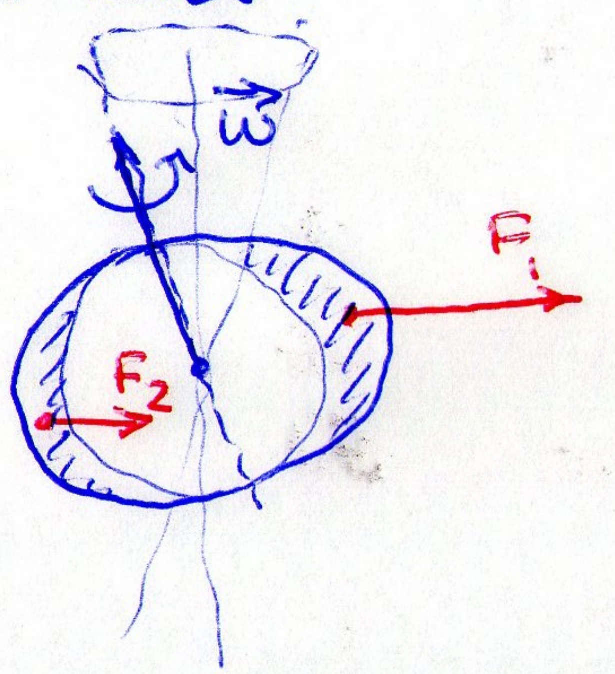
tipicamente $\Omega_+ \gg \Omega_-$

Ω_+: precessão "exótica"!

Ω_-: "precessão regular"

* Precessão dos equinócios . UM CASO DE PRECESSÃO PLANETÁRIA

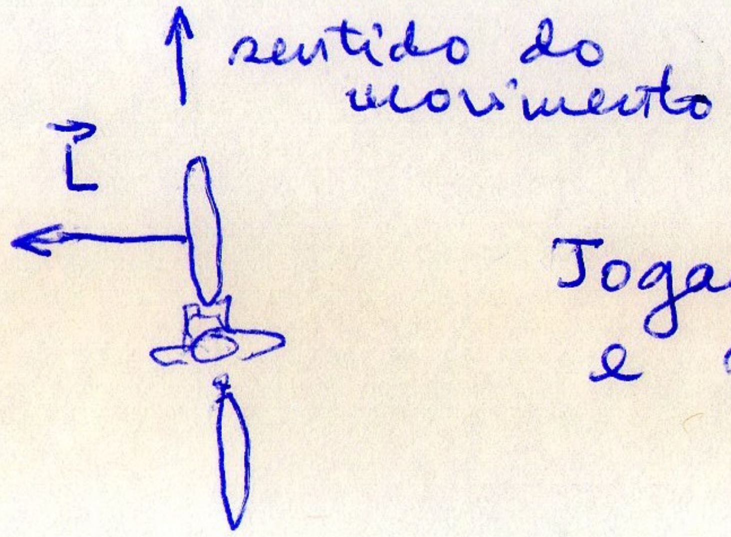
Devido ao torque externo gravitacional associado à não esfericidade da terra



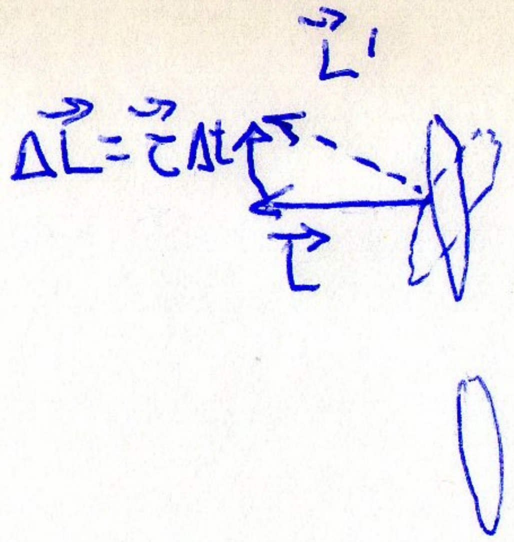
$F_1 > F_2 \rightarrow$ torque perpendicular a $\vec{\omega}$

$\frac{2\pi}{\Omega} \simeq 26.000$ anos

* Fazendo curvas de bicicleta, "sem mãos"



Jogando pêso para a direita → torque na direção e sentido do movimento → gira a roda dianteira para a direita.

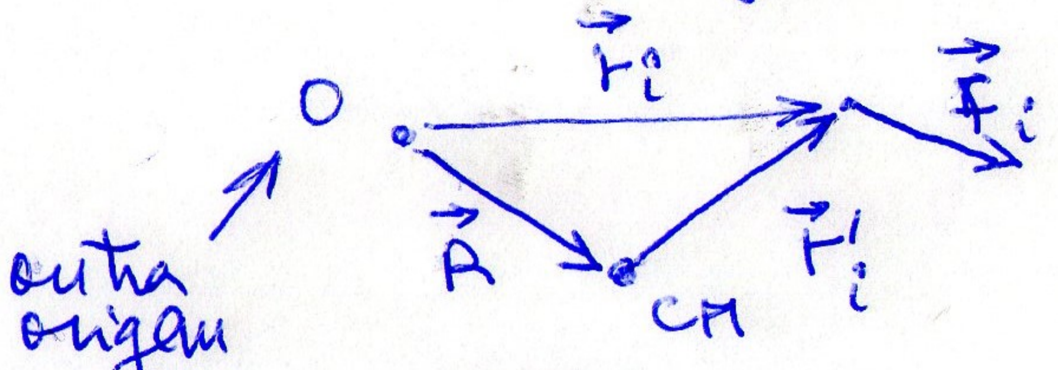


ESTÁTICA de Corpos Rígidos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}^{(ext)}_{CM} = 0$$

MAS, se $\vec{F}^{(ext)} = 0$, $\vec{\tau}^{(ext)}$ não depende da origem escolhida.



$$\boxed{\vec{\tau}^{(ext)}_{O}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum_i \vec{R} \times \vec{f}_i + \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{f}_i$$

$$= \vec{R} \times \underbrace{\sum_i \vec{f}_i}_{\vec{F}^{(ext)} = 0} + \boxed{\vec{\tau}^{(ext)}_{CM}}$$

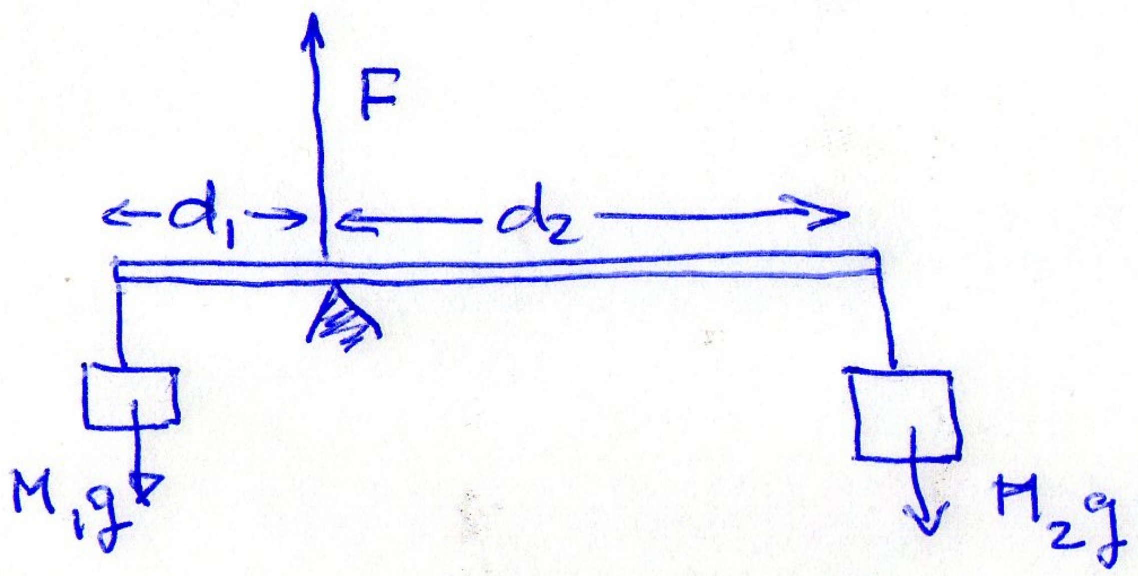
O qualquer!

Condições gerais de equilíbrio

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}^{(ext)} &= 0 \\ \vec{\tau}^{(ext)} &= 0 \end{aligned}}$$

6 equações (escalares) simultâneas

EXEMPLO (quase?) TRIVIAL



$\vec{F}^{(ext)} = 0$: $F = M_1 g + M_2 g$

$\vec{\tau}^{(ext)} = 0$: $M_1 \cancel{g} d_1 - M_2 \cancel{g} d_2 = 0$

(torques calculados com relação ao ponto de apoio)

1) O sistema está em equilíbrio e F é medido. Isso determina M_1 e M_2

Torque: $\frac{M_1}{M_2} = \frac{d_2}{d_1}$

Força externa: $F = g\left(M_1 + \frac{M_1 d_1}{d_2}\right)$

$= g M_1 \left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right)$

$\boxed{M_1 = \frac{F}{g} \frac{1}{1+\frac{d_1}{d_2}}}$; $M_1 + M_2 = \frac{F}{g}$

$\boxed{M_2} = \frac{F}{g} - M_1 = \frac{F}{g}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{d_1}{d_2}}\right) =$

$= \boxed{\frac{F}{g} \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{1+\frac{d_1}{d_2}}}$ //

2) $M_2 = 2M_1$; onde deve estar o apoio e qual é F ?

Torque: $\cancel{M_1} d_1 - 2\cancel{M_1} d_2 = 0 \rightarrow \boxed{d_1 = 2d_2}$

dá a posição do apoio

Força externa: $F = 3 M_1 g$ //

cf. GALILEO, "La Bilancetta"