

Lista II - Gabarito

① Solução:

a) Para encontrar uma expressão para o período como visto no referencial do laboratório, vamos considerar a seguinte expressão:

$$T = 4 \int_0^b \frac{dx}{v(x)} = \frac{4}{c} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2(x)}}}. \quad (1)$$

Onde na última igualdade usamos $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. A expressão acima diz que o período deve ser 4 vezes o tempo que a partícula leva para ir da origem até a amplitude de oscilação, b . Deste modo, precisamos encontrar uma expressão que parametriza $\gamma(x)$ em termos da posição da partícula.

É possível encontrar essa parametrização se considerarmos a equação de movimento para a partícula

$$\frac{d}{dt} [m\gamma v] = -kx. \quad (2)$$

Utilizando o Jacobiano para transformar a derivada no tempo em derivada na posição, temos

$$v \frac{d}{dx} [m\gamma v] = -kx. \quad (3)$$

Substituindo v por γ , obtemos

$$c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2(x)}} \frac{d}{dx} \left[m\gamma c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2(x)}} \right] = -kx \quad (4)$$

$$= c \frac{\sqrt{\gamma^2(x) - 1}}{\gamma} \frac{d}{dx} \left[mc \sqrt{\gamma^2(x) - 1} \right]. \quad (5)$$

Portanto,

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{kx}{mc^2}. \quad (6)$$

Podemos resolver essa equação usando a condição inicial $\gamma(b) = 1$. Assim,

$$\gamma(x) = 1 + \frac{kb^2}{2mc^2} \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right). \quad (7)$$

b) Podemos escrever a expressão acima de uma forma mais conveniente se usarmos $\omega = \sqrt{k/m}$:

$$\gamma(x) = 1 + \frac{\omega^2}{2c^2} (b^2 - x^2). \quad (8)$$

Podemos reescrever o integrando em 1 como:

$$\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} = \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^{1/2}(\gamma - 1)^{1/2}} \quad (9)$$

Substituindo a expressão γ :

$$\frac{1 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)}{\left[2 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)\right]^{1/2} \left[\frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)\right]^{1/2}} \quad (10)$$

Expandindo o fator $\left[2 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)\right]$ em série de Taylor

$$\left[2 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)\right]^{-1/2} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{\omega^2}{8c^2}(b^2 - x^2)\right] \quad (11)$$

e substituindo em 1:

$$T = \frac{4}{c} \int_0^b dx \frac{\sqrt{2}c}{\omega \sqrt{b^2 - x^2}} \left[1 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)\right] \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{\omega^2}{8c^2}(b^2 - x^2)\right] = \quad (12)$$

$$= \frac{4}{\omega} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} \left[1 + \frac{3\omega^2}{8c^2}(b^2 - x^2) + \dots\right]. \quad (13)$$

Integrando o primeiro termo em (13) nos dá o resultado não relativístico, $T_0 = 2\pi/\omega$. O segundo termo é a correção relativística de primeira ordem:

$$\frac{3\omega}{2c^2} \int_0^b dx \sqrt{b^2 - x^2} = \frac{3\omega}{2c^2} \times \frac{b^2\pi}{4} \quad (14)$$

Portanto,

$$T = T_0 + \Delta T, \quad (15)$$

onde $T_0 = 2\pi/\omega$ é o período não relativístico e $\Delta T = 3\omega b^2\pi/(8c^2)$ é a correção relativística de ordem mais baixa. Podemos entender esse resultado em termos da velocidade máxima que a partícula atinge (em $x = 0$), $V_{max} = \omega^2 b^2$:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{3}{16} \frac{V_{max}^2}{c^2} \right). \quad (16)$$

c) Para encontrar o período no tempo próprio da partícula, temos que:

$$T_p = 4 \int_0^{T_p/4} d\tau = 4 \int_0^{T_p/4} \frac{dt}{\gamma} = 4 \int_0^b dx \frac{1}{c\sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (17)$$

De forma análoga ao item anterior, encontramos:

$$T_p = T_0 \left(1 - \frac{1}{16} \frac{V_{max}^2}{c^2} \right). \quad (18)$$

② **Solução:** Para encontrar o momento canônico:

$$\vec{P}^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^i} = \frac{\partial}{\partial V^i} \left[-\frac{mc^2}{\gamma(V)} \right] = \frac{mc^2}{\gamma^2} \frac{\partial}{\partial V^i} [\gamma] = \quad (19)$$

$$= \frac{m(1 - V^2/c^2)^{-3/2} V}{\gamma^2} \frac{\partial [V]}{\partial V^i} = m\gamma V^i. \quad (20)$$

Para encontrar o Hamiltoniano, fazemos a transformada de Legendre da Lagrangeana:

$$\mathcal{H} = V_i P^i - \mathcal{L} = m\gamma V_i V^i + \frac{mc^2}{\gamma^2} = \quad (21)$$

$$= m\gamma \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) c^2 + \frac{mc^2}{\gamma^2} = mc^2 \gamma. \quad (22)$$

③ Solução:

a) A onda total pode ser escrita como:

$$f_{tot}(\mathbf{x}; t) = Ae^{i(\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{x} - \omega^i t)} + Be^{i(\mathbf{k}^r \cdot \mathbf{x} - \omega^r t)}, \quad (23)$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Tomando $\mathbf{x} = 0$, temos a condição de contorno:

$$0 = Ae^{-i\omega^i t} + Be^{-i\omega^r t}. \quad (24)$$

Avaliando em $t = 0$ obtemos:

$$B = -A. \quad (25)$$

Portanto, podemos reescrever (23) como:

$$f_{tot}(\mathbf{x}; t) = A[e^{i(\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{x} - \omega^i t)} - e^{i(\mathbf{k}^r \cdot \mathbf{x} - \omega^r t)}]. \quad (26)$$

Fazendo $x = 0$, obtemos que $k_y^r = k_y^i$, $k_z^r = k_z^i$ e $\omega^r = \omega^i$. Ao longo do eixo x sabemos que a onda deve ser um seno puro, uma vez que a onda se anula no plano $x = 0$ (onde o espelho está localizado). Portanto,

$$f_{tot}(x, y = 0, z = 0, t = 0) = C \sin(k_x^i x) = C(e^{ik_x^i x} - e^{-ik_x^i x}). \quad (27)$$

Ou seja, $k_x^r = -k_x^i$.

b) Na situação em que o espelho está andando ao longo do eixo x com velocidade V , temos a condição de contorno:

$$f_{tot} = (Vt, y, z, t) = 0, \quad (28)$$

que leva a:

$$\omega - k_x V = \omega^r - k_x^r V. \quad (29)$$

Usando a condição (29) e o fato de que $|\mathbf{k}| = \omega/c$, depois de um pouco de álgebra, é possível chegar nas relações:

$$\begin{aligned} \omega^r &= \frac{\omega(1+\beta^2) - 2k_x V}{1-\beta^2}, \\ k_x^r &= -\frac{k_x(1+\beta^2) - 2\omega V/c^2}{1-\beta^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

c) Usando que

$$\cos \theta^r = \frac{\mathbf{k}^r \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}^r|} = \frac{k_x^r c}{\omega^r}, \quad (31)$$

com as relações (30), podemos escrever:

$$\cos \theta^r = \frac{2\beta - \cos \theta(1 + \beta^2)}{(1 + \beta^2) - 2\beta \cos \theta}. \quad (32)$$

Note que, se $\beta = 0$, então $\cos \theta^r = -\cos \theta$ (como deveria ser pela equação 31) e, portanto, estamos definindo $\theta^r = \pi - \theta$. Para $\beta = 0.5$, temos

$$\cos \theta^r = \frac{1 - (5/4) \cos \theta}{(5/4) - \cos \theta}. \quad (33)$$

Para a onda não ser refletida, $\cos \theta^r > 0$, o que leva a $\cos \theta < 4/5$. Portanto, para ângulos de incidência maiores do que $\arccos(4/5)$ a onda não é refletida quando a velocidade do espelho é metade da velocidade da luz. Podemos entender esse resultado de forma mecânica: se a luz fosse feita de partículas, isso significaria que depois de atingir o espelho, essas partículas não possuem momento indo no sentido negativo de x . É claro que isso vai depender da componente x do momento quando a partícula atinge o espelho, que é tão menor quanto maior for o ângulo de incidência.

d) Podemos escrever a função de onda em notação relativística em termos de uma fase que é um escalar de Lorentz. Ou seja, a partir da contração da quadri-posição $r^\mu = (ct, x, y, z)$ com o quadri-vetor de onda $k_\mu = (-\omega/c, k_x, k_y, k_z)$:

$$f \sim e^{i\phi}, \quad (34)$$

onde $\phi = k_\mu x^\mu$.

e) Sabemos que no referencial que se move, S' , $\cos \theta^{r'} = -\cos \theta'$ e no referencial do laboratório, S , $\cos \theta^{r'} \neq -\cos \theta'$. O que queremos é $\cos \theta^r = f(\cos \theta)$. As relações entre as quantidades em S e S' são dadas pelas transformações de Lorentz (de S' para S):

$$\frac{\omega}{c} = \gamma \left(\frac{\omega'}{c} + \beta k'_x \right) \quad (35)$$

e

$$k_x = \gamma(k'_x + \beta \frac{\omega'}{c}). \quad (36)$$

Portanto,

$$\cos \theta = \frac{k_x c}{\omega} = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}. \quad (37)$$

Usando essa relação e o fato de que $\cos \theta^r = -\cos \theta'$ no laboratório, podemos recuperar o resultado

$$\cos \theta^r = \frac{2\beta - \cos \theta(1 + \beta^2)}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta}. \quad (38)$$

- ④ **Solução:** Podemos escrever os campos elétrico e magnético em termos do tensor eletromagnético como:

$$E_i = cF_{0i} \quad (39)$$

e

$$B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}, \quad (40)$$

Onde o tensor eletromagnético é definido por:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (41)$$

Com A_μ o quadri-vetor. Se aplicarmos uma transformação de calibre em A_μ da forma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial\lambda/\partial x^\mu \quad (42)$$

e desde que $[\partial_0, \partial_i] = 0$, então é trivial ver que os campos E_i e B_i permanecerão invariantes.

- ⑤ **Solução:** Podemos escrever o determinante de uma matriz em termos do símbolo de Levi-Civita como:

$$\det(M) = \epsilon_{\mu\nu\beta\delta} M^\mu_0 M^\nu_1 M^\beta_2 M^\delta_3 \quad (43)$$

e, portanto,

$$\epsilon_{abcd} \det(M) = \epsilon_{\mu\nu\beta\delta} M^\mu_a M^\nu_b M^\beta_c M^\delta_d \quad (44)$$

Podemos escrever essa identidade para a matriz de transformação de Lorentz, Λ . Como $\det(\Lambda) = 1$, então por (44) segue que o símbolo de Levi-Civita é invariante por transformações de Lorentz.

- ⑥ **Solução:** a) Todo *boost* de Lorentz em uma direção arbitrária pode ser decomposto em um *boost* seguido ou precedido de uma rotação espacial, sem alterar a componente temporal. Portanto, quando não há velocidade entre os dois referenciais, a transformação de Lorentz se reduz a

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_j^i \end{pmatrix}, \quad (45)$$

onde R_j^i é uma matriz de rotação.

- b) Escrevendo os campos elétrico e magnético como

$$E_i = cF_{0i} \quad (46)$$

e

$$B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}, \quad (47)$$

sob uma transformação do tipo (45), esses campos vão se transformar como:

$$E'_i = cF'_{0i} = c\Lambda_0^{\mu}\Lambda_i^{\nu}F_{\mu\nu} = R_i^j F_{0j} = R_i^j E_j \quad (48)$$

e

$$B'_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Lambda^j_{\mu}\Lambda^k_{\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}R^j_l R^k_m F^{lm} \quad (49)$$

Portanto,

$$R^i_n B'_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}R^j_l R^k_m R^i_n F^{lm} = -\frac{1}{2}\epsilon_{lmn}F^{lm} = B_n \quad (50)$$

- ⑦ **Solução:** a) Vamos considerar um boost na direção $\hat{x}$ e encontrar como as componentes do tensor eletromagnético se transformam:

$$F'^{01} = E_x, \quad F'^{02} = \gamma[E_y - \beta B_z], \quad F'^{03} = \gamma[E_z + \beta B_y], \quad (51)$$

$$F'^{12} = \gamma[B_z - \beta E_y], \quad F'^{13} = -\gamma[\beta E_z + B_y], \quad F'^{23} = B_x. \quad (52)$$

Como o tensor eletromagnético é anti-simétrico, nós só precisamos saber as componentes a cima. Portanto, os campos vão se transformar como:

$$\mathbf{E}' = E_x \hat{x} + \gamma[E_y \hat{y} + E_z \hat{z}] + \gamma[\beta B_y \hat{z} - \beta B_z \hat{y}] \quad (53)$$

e

$$\mathbf{B}' = B_x \hat{\mathbf{x}} + \gamma[B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}] + \gamma[\beta E_z \hat{\mathbf{y}} - \beta B_y \hat{\mathbf{z}}]. \quad (54)$$

Como o boost é na direção $\hat{\mathbf{x}}$, o terceiro termo em (53) e (54) são, respectivamente, $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}$ e $-\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$. Poranto, podemos inferir que para um boost numa direção arbitrária os campos vão se transformar como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (55)$$

b)

$$\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = 0 = \gamma^2 [\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}] \times [\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}] = \quad (56)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \boldsymbol{\beta}(E^2 + B^2) + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}), \quad (57)$$

mas

$$(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) = \beta^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (58)$$

e, portanto,

$$\frac{\boldsymbol{\beta}}{(1 + \beta^2)} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2 + B^2}. \quad (59)$$

c) A quantidade

$$G_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -4\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}, \quad (60)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o dual de Hodge, é invariante e portanto se os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ forem perpendiculares em um referencial, então serão também em todos os referenciais.