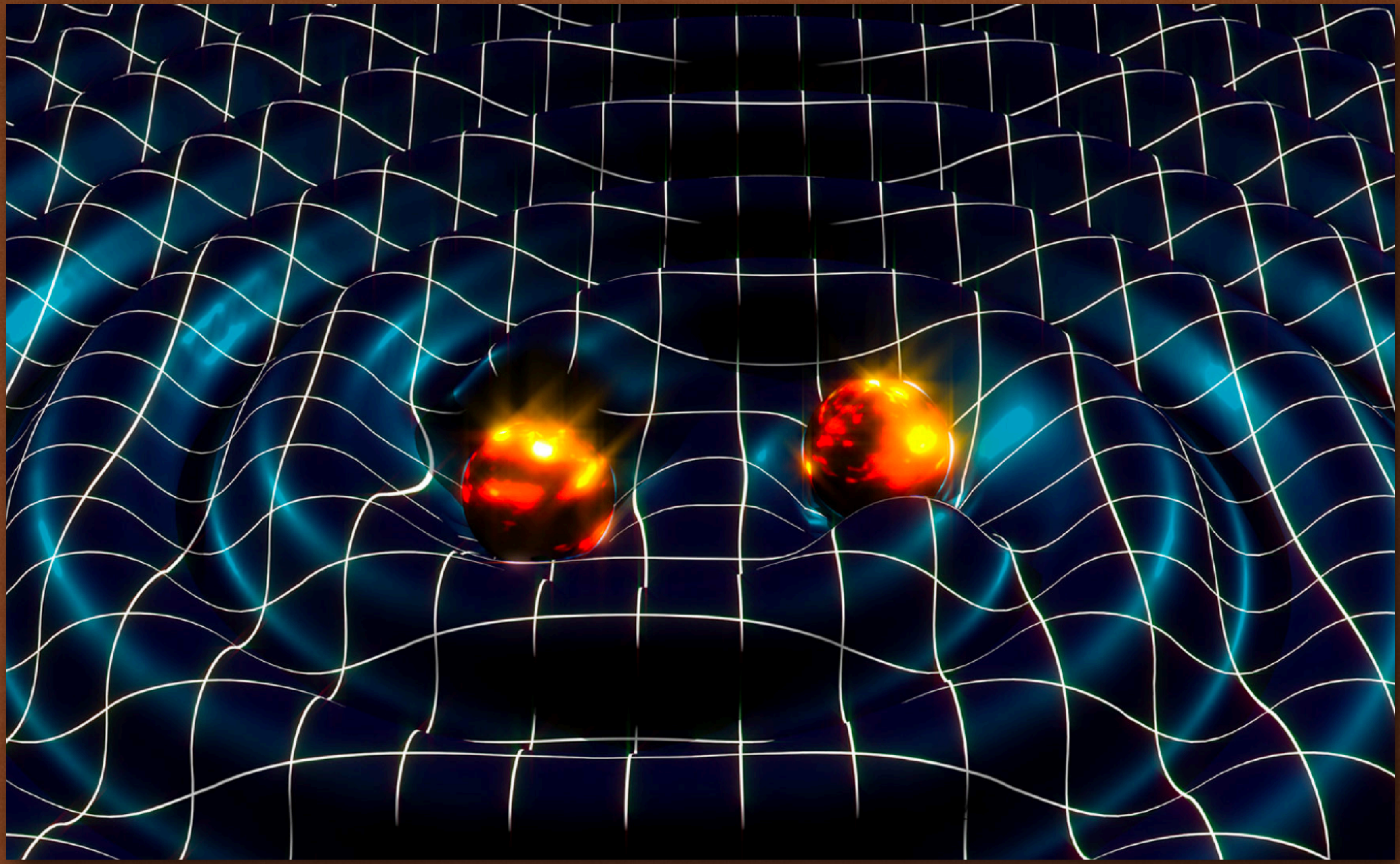
INTRODUÇÃO À



RELATIVIDADE

AULA 21 - 25/05/2020

- Ondas gravitacionais livres ("ondas planas")
- Os graus de liberdade das ondas gravitacionais e o spin do graviton
- A Equação do Desvio Geodésico e a polarização das ondas gravitacionais
- O efeito das ondas gravitacionais na matéria
- **Leitura: Capítulo 7 do Carroll.**

ONDAS GRAVITACIONAIS

- Vimos que, ao permitirmos ***pequenas perturbações*** do espaço-tempo de Minkowsi,

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad \text{onde } h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} = h_{\mu\nu}(t, x^i) \quad ,$$

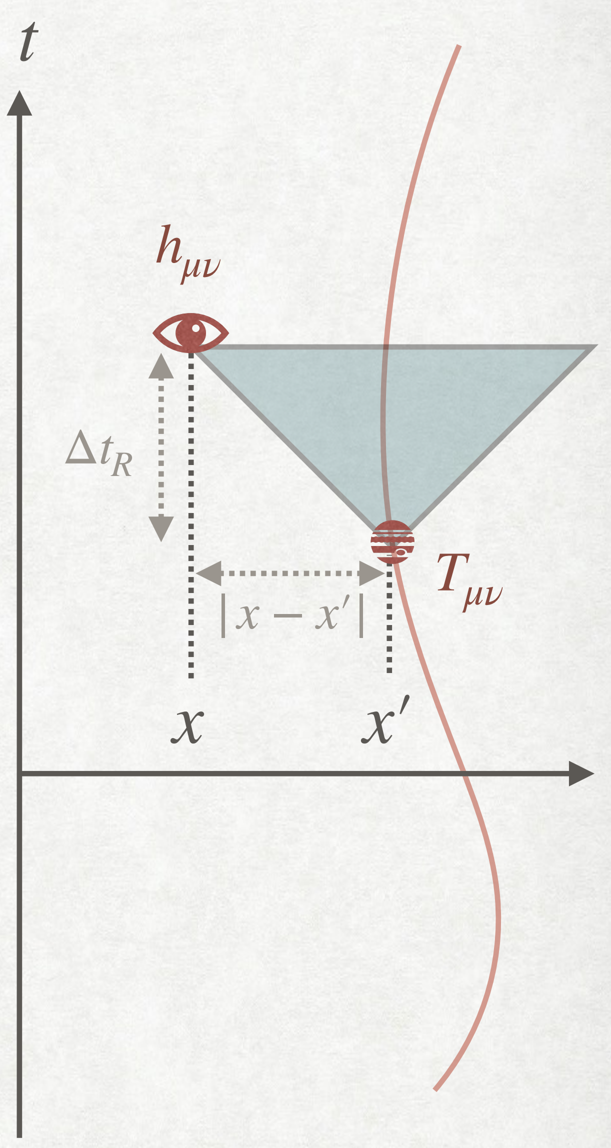
as equações de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}$, nesse ***limite de campo fraco***, e no ***gauge de Lorentz/harmônico***, se reduzem a:

$$G_{\mu\nu} \simeq -\frac{1}{2}\Box\, \bar{h}_{\mu\nu} \simeq 8\pi G\, T_{\mu\nu} \quad \text{, onde}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \quad , \quad \text{onde} \quad h = h^{\alpha}_{\alpha} = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad \partial_\alpha h^{\alpha\nu} = \frac{1}{2}\partial^\nu h$$

- A ***solução*** em termos da ***Função de Green*** para a Equação de Helmholtz acima ($\Box F = S$) permite calcular os ***campos*** (perturbações da métrica) gerados pelas ***fontes*** (matéria) como:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4\, G \int d^3x' \, \frac{T_{\mu\nu}\left(t - \Delta t_R, \vec{x}'\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad , \quad \text{com} \quad \Delta t_R = |\vec{x} - \vec{x}'|$$

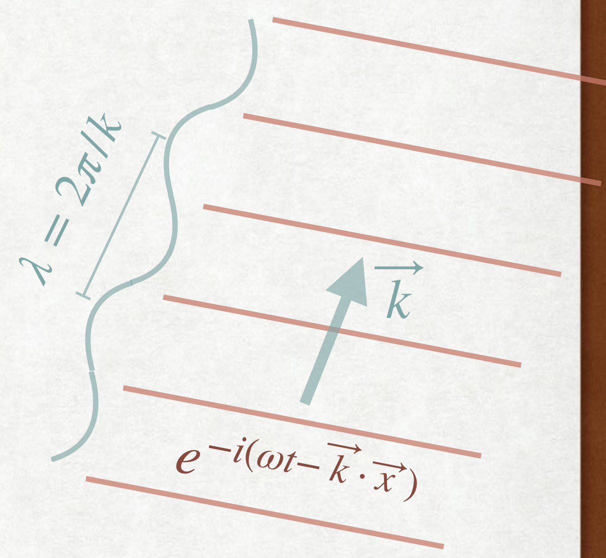


ONDAS LIVRES

- Antes de calcular de que modo podemos ***gerar*** as ondas gravitacionais, vamos analisar a ***propagação livre*** e os ***graus de liberdade físicos*** dessas perturbações da métrica, $h_{\mu\nu}$.

- Portanto, vamos considerar hoje apenas a ***equação de onda livre***, sem fontes, $\Box F = 0$.

- O primeiro passo é transformar esse problema em algo mais palatável, usando a transformada de Fourier:



$$F(x^\mu) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ik_\mu x^\mu}\, \tilde{F}(k_\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{F}(x^\mu) = \int d^4x\, e^{-ik_\mu x^\mu}\, F(x^\mu) \ ,$$

com $k_\mu = \eta_{\mu\nu} k^\nu$ e assim a ***fase*** $k_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu k^\nu$ é um ***escalar***.

- Para uma ***onda escalar*** (F é escalar), a equação de onda toma a forma simples:

$$\Box F(x^\mu) = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta F(x^\mu) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[-\partial_t^2 + \vec{\nabla}^2\right]\left[e^{ik_\mu x^\mu}\,\tilde{F}(k_\mu)\right] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[-(ik_0)^2 + (i\vec{k})^2\right]\left[e^{ik_\mu x^\mu}\,\tilde{F}(k_\mu)\right] = 0$$

- Portanto, o problema se resolve solzinho em termos de ***ondas planas***, com:

$$\eta^{\alpha\beta}(-ik_\alpha)(-ik_\beta) = -\,||k||^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{i k_\mu x^\mu} = e^{i(\pm\omega t + \vec{k}\cdot\vec{x})} = e^{ik(\pm t + \hat{k}\cdot\vec{x})} \ ,$$

onde $\omega \equiv |k_0| = |\vec{k}|$

ONDAS LIVRES

- De um modo completamente geral, portanto, uma dessas ondas escalares (p.ex., som) pode ser descrita completamente em termos de uma ***superposição de ondas planas***:

$$F(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[e^{i\omega t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{F}^+(\vec{k}) + e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{F}^-(\vec{k}) \right] \;\to\; \sum_{\vec{k}} e^{-(i\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \tilde{F}(\vec{k})$$

- Ondas escalares não possuem algumas propriedades mais "sofisticadas" de ondas mais interessantes, como por exemplo as ondas eletromagnéticas. Nesse caso escrevemos os campos elétrico e magnético como:

$$E^i = \sum_{\vec{k}} e^{-(i\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \tilde{E}^i(\vec{k}) \quad , \quad B^i = \sum_{\vec{k}} e^{-(i\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \tilde{B}^i(\vec{k})$$

- Mas a história não termina aí, porque, apesar desses campos obedecerem a Equação de Onda, $\Box E^i = \Box B^i = 0$, essas soluções ainda **não satisfazem as Equações de Maxwell!**

- Em particular, lembre-se que, no vácuo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Em termos das ondas planas temos:

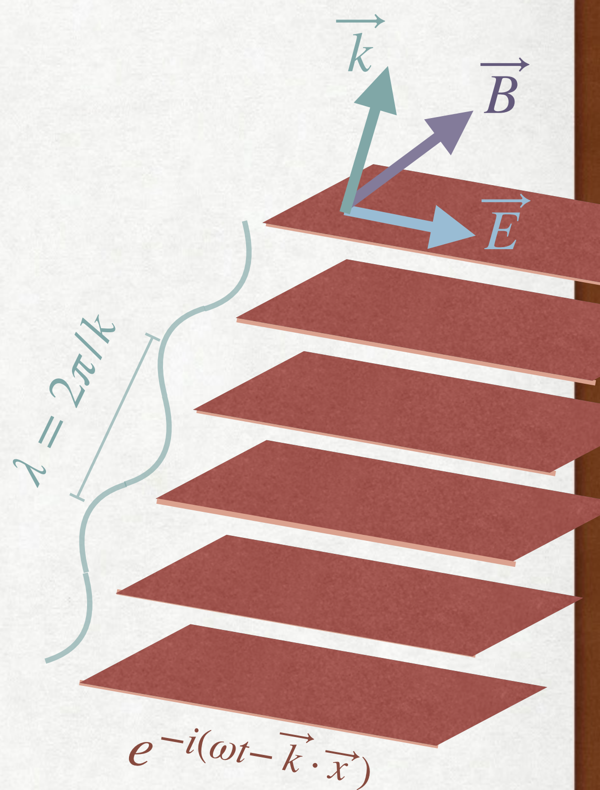
$$\partial_i E^i = 0 \to k_i \tilde{E}^i = 0 \quad , \quad \partial_i B^i = 0 \to k_i \tilde{B}^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{\tilde{E}} = \vec{k} \cdot \vec{\tilde{B}} = 0$$

- Além disso, tanto pela Lei de Ampère quanto pela Lei de Faraday, $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$, temos que:

$$i\vec{k} \times \vec{\tilde{E}} - i\omega \vec{\tilde{B}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tilde{B}} = \hat{k} \times \vec{\tilde{E}} \quad ,$$

  ou seja, os vetores $\vec{k}$, $\vec{\tilde{E}}$ e $\vec{\tilde{B}}$ formam uma tríade ortogonal.

- Portanto, dos 6 graus de liberdade originais ($\vec{\tilde{E}}$ e $\vec{\tilde{B}}$) para cada $\vec{k}$, as equações de Maxwell reduzem isso a apenas ***2 graus de liberdade***: p.ex., as componentes de $\vec{\tilde{E}}$ (a ***polarização***) no plano ortogonal a $\vec{k}$.



Eletromagnetismo: ***ondas transversais, "spin 1"***

ONDAS GRAVITACIONAIS LIVRES

- No eletromagnetismo as amplitudes e orientações do campo elétrico $\overrightarrow{\vec{E}}$ são chamadas de ***polarizações***. No problema que queremos considerar, de ondas gravitacionais, também vamos descrever essas ondas como ***superposições de ondas planas com polarizações***:

$$h_{\mu\nu}(x^\mu) \;=\; \sum_{\overrightarrow{k}} e^{-(i\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x})}\,\epsilon_{\mu\nu}(\overrightarrow{k}) \quad ,$$

onde $\epsilon_{\mu\nu}$ é a ***polarização*** (que, assim como $h_{\mu\nu}$, é ***simétrica*** pela troca $\mu \leftrightarrow \nu$)

- Na aula passada usamos o gauge de Lorentz para expressar as Equações de Einstein (***no vácuo***) como:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} \;=\; 0 \quad , \quad \text{onde} \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$$

- Mas note que podemos tomar o traço da equação acima, e usando que $\eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h} = -\,h$ obtemos:

$$\eta^{\mu\nu}\Box \bar{h}_{\mu\nu} \;=\; -\Box h \;=\; 0$$

- Portanto, as perturbações da métrica obedecem a equação livre/homogênea:

$$\Box h_{\mu\nu} \;=\; 0$$

ONDAS GRAVITACIONAIS LIVRES

- A solução geral é, portanto, aquela escrita acima:

$$h_{\mu\nu}(x^\mu) \;=\; \sum_{\vec{k}} e^{-(i\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\,\epsilon_{\mu\nu}(\vec{k}) \quad ,$$

onde, assim como antes, $\omega = |\vec{k}| = k$.

- Porém, ainda falta levar em conta o fato de que utilizamos o calibre (gauge) de Lorentz/harmônico:

$$\partial_\mu h^\mu_{\ \nu} = \frac{1}{2}\partial_\nu h$$

- Mas em termos da superposição de ondas planas acima, isso implica que:

$$k_\mu \epsilon^\mu_{\ \nu} = \frac{1}{2} k_\nu \epsilon^\mu_{\ \mu} \quad , \quad \text{onde} \quad \epsilon^\mu_{\ \nu} = \eta^{\mu\alpha}\epsilon_{\alpha\nu} \;\; , \;\; \text{etc.}$$

- Portanto, assim como o gauge de Lorentz/harmônico implica 4 vínculos (herdados da invariância de gauge, $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$), as condições acima diminuem as componentes independentes das ondas gravitacionais, de 10 para 6=10-4 .

- Vamos agora explorar que graus de liberdade são esses.

A POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

- Vamos tomar, por simplicidade, uma onda se propagando na direção $\hat{z}$ positiva, ou seja, $k_\mu = \{-k, 0, 0, k\}$, ou $k^\mu = \{k, 0, 0, k\}$, ou seja:

$$h_{\mu\nu}(x^\mu) \;=\; e^{i\,k_\alpha x^\alpha}\,\epsilon_{\mu\nu} \;=\; e^{-i\,k(t-z)}\,\epsilon_{\mu\nu} \;\; .$$

- Impondo a condição do calibre de Lorentz temos:

$$k_\mu\,\epsilon^\mu_{\ \nu} = \frac{1}{2} k_\nu\,\epsilon^\mu_{\ \mu} \qquad \begin{cases} \nu = 0 & \rightarrow \quad -\epsilon_{00} + \epsilon_{30} = \dfrac{1}{2}\left(-\epsilon_{00} + \epsilon_{ii}\right) \\[2ex] \nu = (1,2) & \rightarrow \quad -\epsilon_{01} + \epsilon_{31} = -\epsilon_{02} + \epsilon_{32} = 0 \\[2ex] \nu = 3 & \rightarrow \quad -\epsilon_{03} + \epsilon_{33} = \dfrac{1}{2}\left(-\epsilon_{00} + \epsilon_{ii}\right) \end{cases}$$

- Bem, mas… e agora? Os 4 vínculos acima ainda são bastante complicados… por exemplo, não há nenhuma condição sobre $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$.

- Para simplificar esse problema vamos revisitar a questão da ***escolha de calibre (gauge)***.

A POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

- O que fizemos, na derivação das Equações de Einstein, foi nos utilizar do fato que a invariância por transformações de coordenadas, $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$, nos leva a uma redefinição das perturbações da métrica:

$$h_{\mu\nu} \ \to \ h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad .$$

- Nos valemos disso para impor o calibre de Lorentz/harmônico, ou seja, os vínculos:

$$\partial_\mu h^\mu_{\ \nu} = \frac{1}{2}\partial_\nu h$$

- Mas teve algo que passou desapercebido aqui: digamos que ***ainda*** seja possível fazer uma transformação de coordenadas, mais limitada, mas que ***preserve*** os vínculos acima, ou seja:

$$\partial_\mu h^\mu_{\ \nu} = \frac{1}{2}\partial_\nu h \quad \to \quad \partial_\mu \left(h^\mu_{\ \nu} - \cancel{\partial_\nu \xi^\mu} - \partial^\mu \xi_\nu\right) = \frac{1}{2}\partial_\nu \left(h - 2\,\cancel{\partial_\mu \xi^\mu}\right)$$

- Portanto, o calibre de Lorentz continua a ser satisfeito se $\partial^\mu\partial_\mu \xi_\nu = \Box\, \xi_\nu = 0$. Em outras palavras: a condição do calibre harmônico ***não fixou totalmente*** o sistema de coordenadas, e ainda podemos fazer transformações tais que $\Box\, \xi^\mu = 0$!

A POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

- Vamos usar essas quatro condições para eliminar quatro dos graus de liberdade das polarizações das ondas livres. Uma das opções é, por exemplo, eliminar todas as componentes com índices do tipo-tempo, $\epsilon_{0\nu} \to 0$. Nesse caso temos:

$$k_\mu \, \epsilon^\mu_{\ \nu} = \frac{1}{2} k_\nu \, \epsilon^\mu_{\ \mu} \qquad \begin{cases} \nu = 0 & \to \quad -\cancel{\epsilon_{00}} + \cancel{\epsilon_{30}} = \dfrac{1}{2}\left(-\cancel{\epsilon_{00}} + \epsilon_{ii}\right) \\[2ex] \nu = (1{,}2) & \to \quad -\cancel{\epsilon_{01}} + \epsilon_{31} = -\cancel{\epsilon_{02}} + \epsilon_{32} = 0 \\[2ex] \nu = 3 & \to \quad -\cancel{\epsilon_{03}} + \epsilon_{33} = \dfrac{1}{2}\left(-\cancel{\epsilon_{00}} + \epsilon_{ii}\right) \end{cases}$$

- Da primeira equação temos que $\epsilon_{ii} = 0$;
- Da segunda equação temos que $\epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0$;
- Da terceira equação temos que $\epsilon_{33} = \epsilon_{ii} = 0$, ou seja, $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} = 0$.

A POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

- O resultado final é que a componente xy, $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$, fica livre, e as componentes xx e yy são dadas por $\epsilon_{22} = -\epsilon_{11}$. Portanto, temos a seguinte polarização para essa onda plana que se propaga na direção $\hat{z}$:

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^+ & h^\times & 0 \\ 0 & h^\times & -h^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde a polarização "longitudinal" $\epsilon_{11} = -\epsilon_{22} \equiv h^+$, e a polarização "cruzada" $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} \equiv h^\times$.

- Ou seja, dos 10 graus de liberdade de uma matriz 4×4 simétrica (a métrica), terminamos com apenas 2 graus de liberdade: h^+ e $h^\times$ (a razão para essa notação, "+" e "×", ficará clara daqui a pouco!)

- Mas para cada direção espacial de propagação, $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, podemos fazer tudo isso para cada $\overrightarrow{k}$ independentemente. Logo, temos $3 \times 2 = 6$ graus de liberdade no total — o que está correto, pois $6 = 10 - 4$!!! (10 menos os 4 dos vínculos da fixação do gauge.)

- A seguir vamos estudar algumas propriedades dessa onda gravitacional, e como ela age quando "encontra" matéria pela frente.

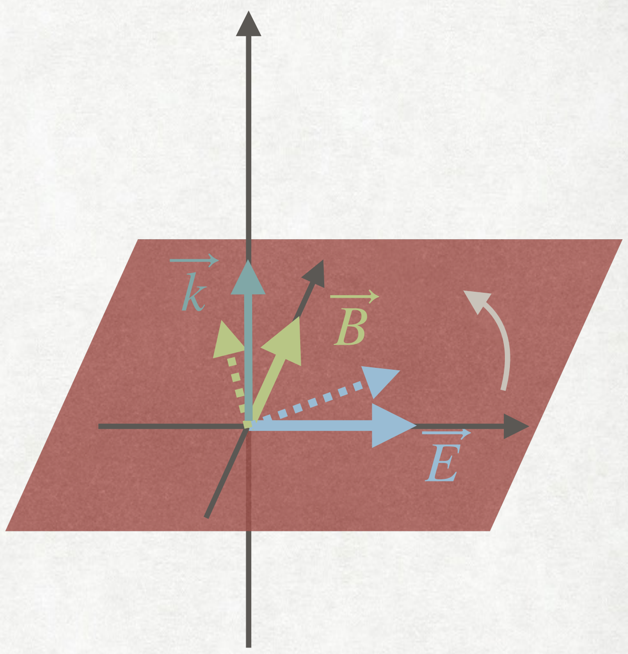
O SPIN DO GRAVITON

- As ondas gravitacionais encontradas acima são os graus de liberdade "puros" do campo gravitacional: eles existem independentemente de qualquer matéria, se propagando livremente no vácuo — chamamos isso de "***campo do graviton***".

- Uma pergunta interessante que podemos fazer é: quais as propriedades dessa onda se propagando na direção $\hat{z}$ sob ***rotações***?

- Sabemos que os campos elétrico e magnético giram normalmente sob rotações, como qualquer vetor 3-dimensional. Mas e as nossas ondas gravitacionais?

- Vamos considerar uma ***rotação*** de um ângulo φ em torno do eixo z, expressa como:



$x^\alpha = R^\alpha_{\ \beta}\, x'^\beta$, sendo a matriz de rotação (*não é o tensor de Ricci!*) dada por:

$$R^\alpha_{\ \beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- As perturbações da métrica se transformam como:

$$h'_{\mu\nu} = R^\alpha_{\ \mu}\, R^\beta_{\ \nu}\, h_{\alpha\beta} \quad \Longrightarrow \quad \epsilon'_{\mu\nu} = R^\alpha_{\ \mu}\, R^\beta_{\ \nu}\, \epsilon_{\alpha\beta}$$

(Lembre-se que $g'_{\mu\nu} = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\, g_{\alpha\beta}$)

O SPIN DO GRAVITON

- É fácil mostrar (Exercício da Lista!) que no referencial "girado" a polarização dessa onda em $\hat{z}$ fica:

$$\epsilon'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h'^{+} & h'^{\times} & 0 \\ 0 & h'^{\times} & -h'^{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $h'^{+} = h^{+} \cos 2\varphi - h^{\times} \operatorname{sen} 2\varphi$ e $h'^{\times} = h^{\times} \cos 2\varphi + h^{+} \operatorname{sen} 2\varphi$.

- Ou seja, as polarizações da onda gravitacional "giram" por um ângulo $2 \times \varphi$! Por outro lado, um vetor "normal" gira pelo mesmo ângulo, $1 \times \varphi$. E um escalar não gira — ou seja, ele gira por $0 \times \varphi$.

- Esse multiplicador de $s \times \varphi$ é o ***spin (s) do campo*** (ou, mais exatamente, a ***helicidade***). Campos escalares têm spin $s = 0$; campos vetoriais (p.ex., eletromagnetismo) têm $s = 1$; e o ***graviton tem spin*** $s = 2$ **!**

- Isso fica ainda mais claro quando expressamos as polarizações em termos dos parâmetros de Stokes:

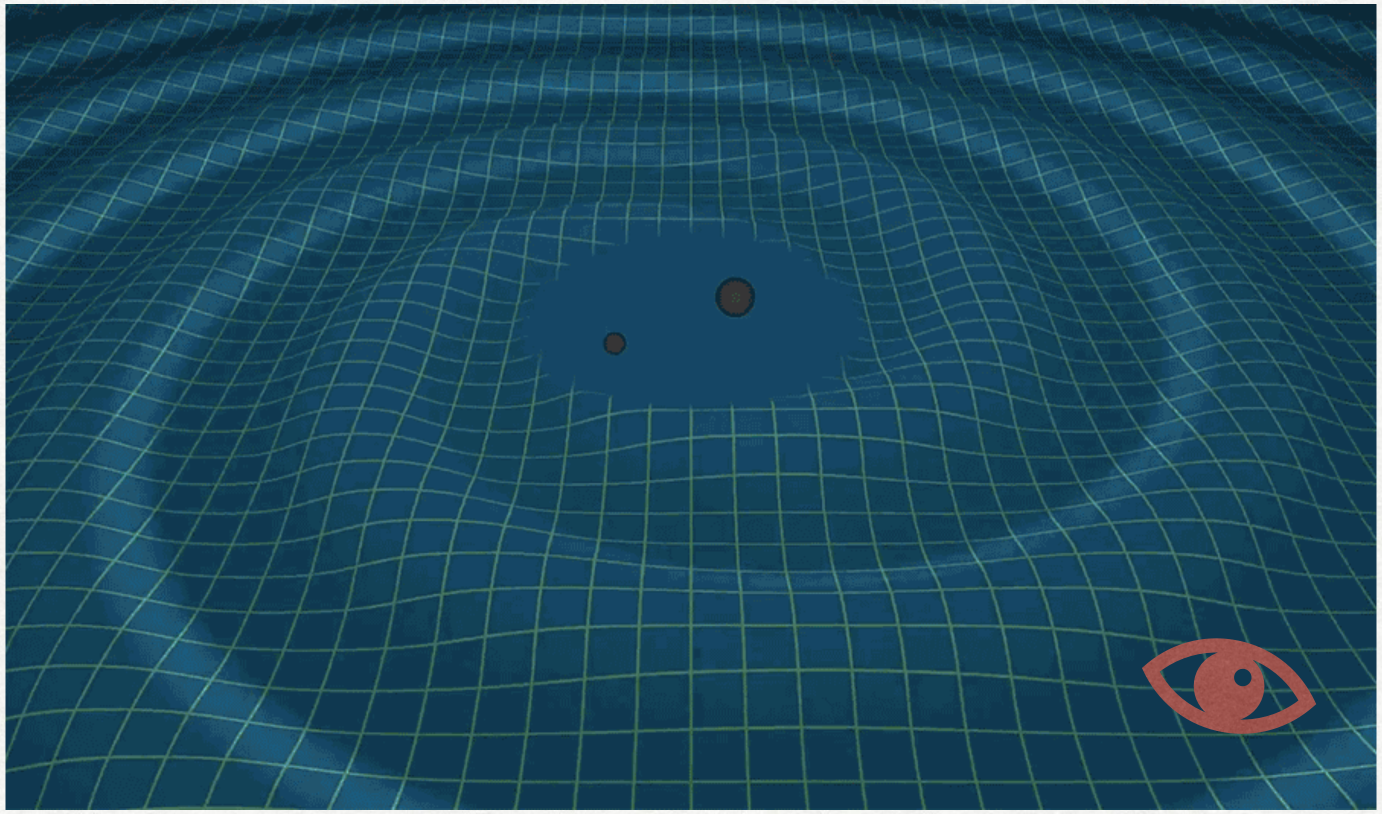
$$h_{\oplus} = h^{+} + i\, h^{\times} \quad \rightarrow \quad h'_{\oplus} = e^{+2i\varphi} h_{\oplus}$$

$$h_{\ominus} = h^{+} - i\, h^{\times} \quad \rightarrow \quad h'_{\ominus} = e^{-2i\varphi} h_{\ominus}$$

O graviton é o
um campo de spin 2 (boson) e massa zero. Um teorema (Weinberg, 1965) diz basicamente que, qualquer que seja a teoria da gravitação, ela **tem** que ser mediada por um bóson de massa nula e spin 2.

EFEITO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS NA MATÉRIA

- Antes de partirmos (na aula que vem) para calcular como uma configuração de massas aceleradas pode ***gerar*** ondas gravitacionais, vamos tentar entender o ***que acontece*** quando uma onda (tal como as vistas anteriormente) ***passa*** por um lugar onde tenhamos matéria.



- Isso nos leva diretamente a uma equação muito importante na Relatividade Geral, a ***Equação do Desvio Geodésico***.

EFEITO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS NA MATÉRIA

- Vamos considerar as duas polarizações de uma onda se propagando na direção $+\hat{z}$:

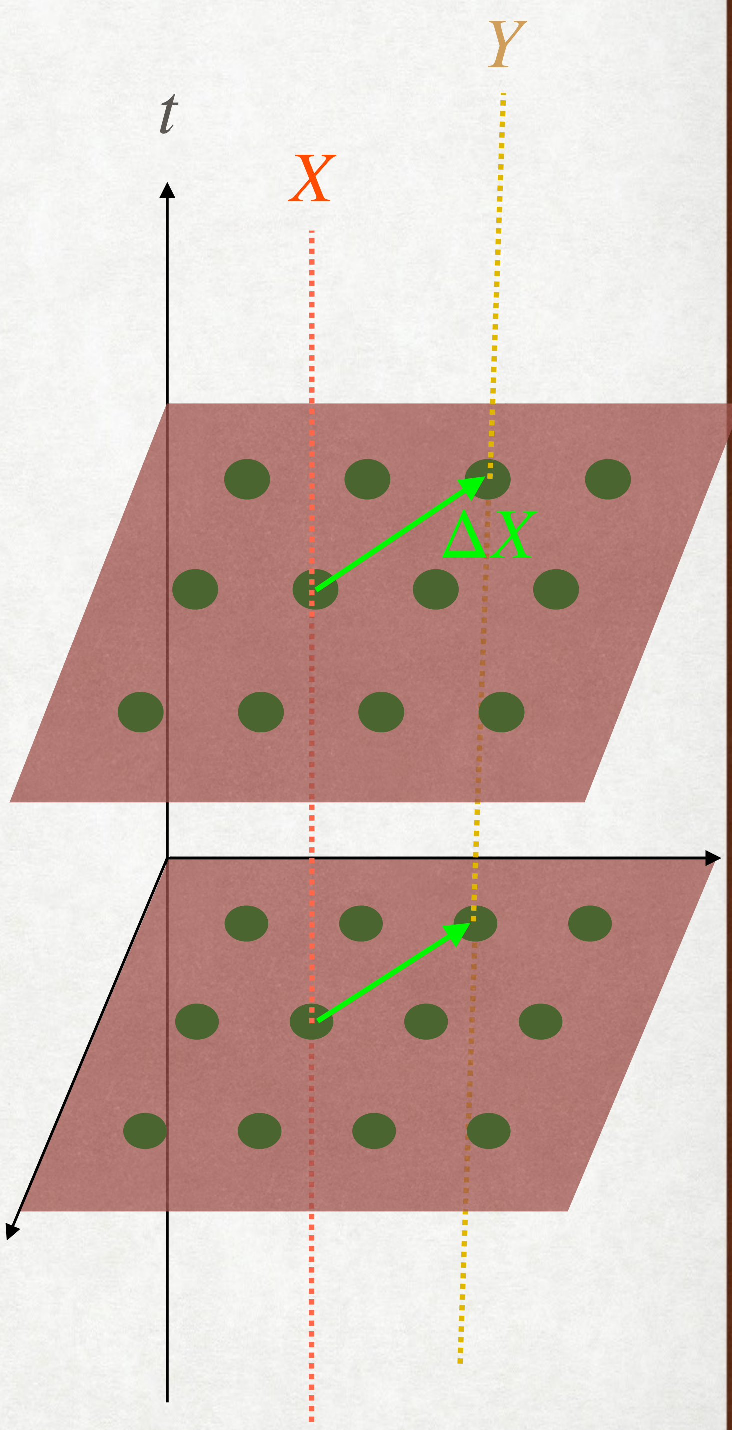
$$h_{11} = -\,h_{22} = h^{+}\,e^{-ik(t-z)} \quad , \quad \text{e}$$

$$h_{12} = h_{21} = h^{\times}\,e^{-ik(t-z)} \quad .$$

- Mas como essa perturbação da métrica **afeta as trajetórias** de partículas-teste (p.ex., ***massas pontuais***) à medida que a onda passa?

- A equação que determina as trajetórias é a Equação da Geodésica. Mas não estamos interessados na trajetória em si, e sim no ***desvio*** que a onda gravitacional causa nas trajetórias das partículas.

- Em outras palavras, digamos que $X^{\mu}(\tau)$ é a trajetória do nosso observador (o "laboratório"); e $Y^{\mu} = X^{\mu} + \Delta X^{\mu}$ é a trajetória de uma partícula no nosso laboratório cuja posição medimos com cuidado. A pergunta então é: que equação esse desvio $\Delta X^{\mu}(\tau)$ obedece, e como ele é alterado pela passagem da onda gravitacional?



EFEITO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS NA MATÉRIA

- Devemos então escrever as Equações da Geodésica para as trajetórias $X^\mu(\tau)$ e $Y^\mu = X^\mu + \Delta X^\mu$. Lembrando que as conexões são calculadas nos mesmos pontos por onde passam as trajetórias, temos:

$$\frac{d^2X^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}[X]\frac{dX^\alpha}{d\tau}\frac{dX^\beta}{d\tau} = 0 \quad ,$$

$$\frac{d^2(X^\mu + \Delta X^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}[X+\Delta X]\frac{d(X^\alpha + \Delta X^\alpha)}{d\tau}\frac{d(X^\beta + \Delta X^\beta)}{d\tau} = 0 \ .$$

- Abrindo $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}[X+\Delta X] = \Gamma^\mu_{\alpha\beta}[X] + \Delta X^\nu\,\partial_\nu \Gamma^\mu_{\alpha\beta}[X] + \ldots$, subtraindo as duas equações acima e descartando termos $\mathcal{O}(\Delta X^2)$, obtemos:

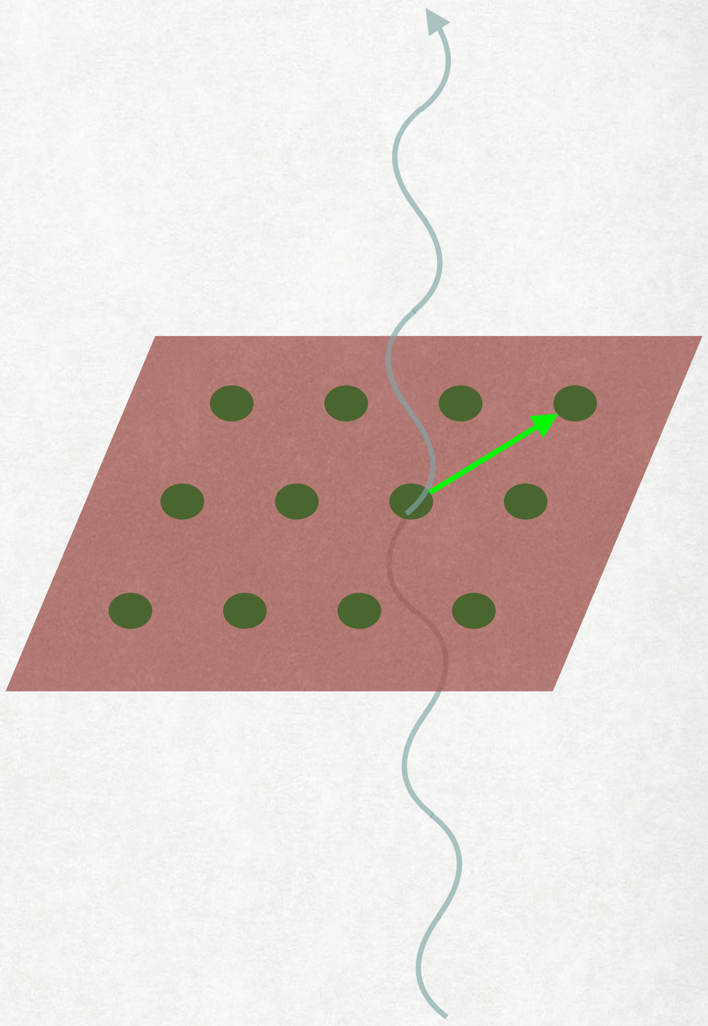
$$\frac{d^2\Delta X^\mu}{d\tau^2} + \partial_\nu \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\Delta X^\nu\,U^\alpha U^\beta + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,U^\alpha\,\frac{d\Delta X^\beta}{d\tau} = 0 \quad , \quad \text{onde } U^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\tau} \ .$$

- Essa é *basicamente* a ***Equação do Desvio Geodésico*** (veja o Carroll, Cap. 3.10).

- Vou deixar como exercício da lista para vocês provarem que essa equação pode ser reescrita como:

$$\frac{D^2\Delta X^\mu}{D\tau^2} = -\,R^\mu{}_{\alpha\nu\beta}\,\Delta X^\nu\,U^\alpha U^\beta \quad , \quad \text{onde definimos a derivada direcional:}$$

$$\frac{D\Delta X^\mu}{D\tau} = \frac{dX^\nu}{d\tau}\,D_\nu(\Delta X^\mu) \quad , \quad \text{sendo } D_\nu \text{ a derivada covariante usual.}$$



EFEITO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS NA MATÉRIA

- Antes de prosseguir, vamos nos recordar que as conexões associadas com perturbações da métrica são dadas por:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha}_{\mu\,,\,\nu} + h^{\alpha}_{\nu\,,\,\mu} - \eta^{\alpha\beta}\, h_{\mu\nu\,,\,\beta}\right)$$

- Estamos interessados num caso muito simples, em que originalmente (antes da onda passar) as partículas encontram-se aproximadamente em repouso, com 4-velocidades $U^{\mu} \simeq \{1, \overrightarrow{0}\}$, e portanto também podemos tomar $\tau \to t$.

- Além disso, queremos calcular desvios que são sempre muito ***pequenos***, e cujas velocidades também são pequenas, $\dfrac{d\Delta \overrightarrow{x}}{d\tau} \to \dfrac{d\Delta \overrightarrow{x}}{cdt} \ll 1$.

- Finalmente, lembrando que o tensor de Riemann é dado por:

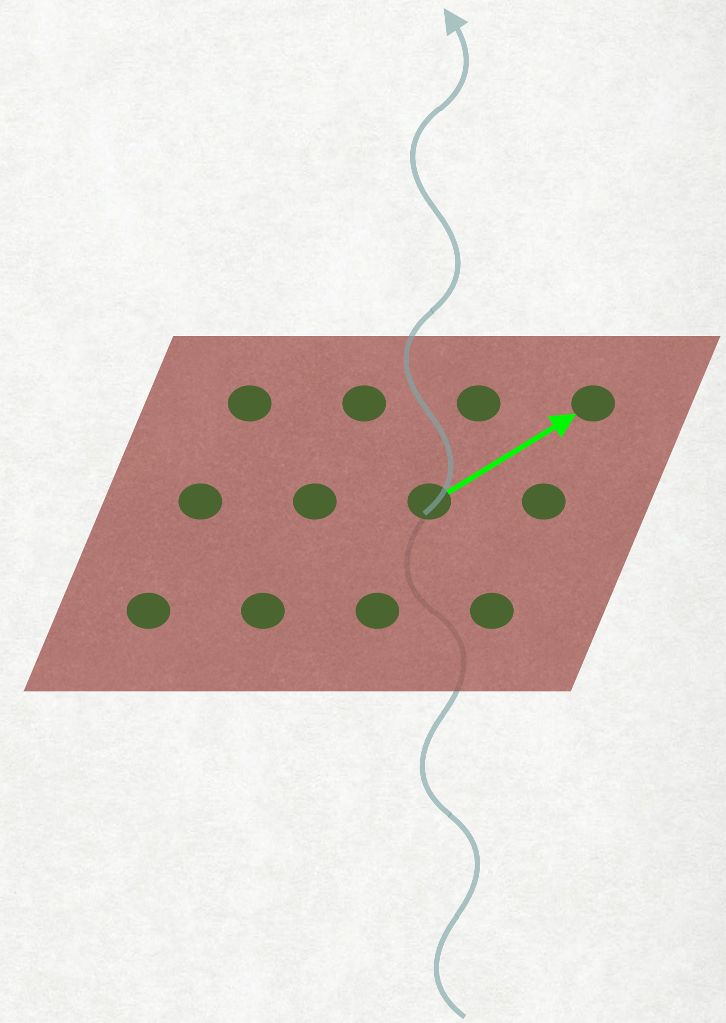
$$R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta} = \partial_\alpha\, \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} - \partial_\beta\, \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\, \Gamma^{\lambda}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}\, \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma} = \partial_\alpha\, \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} - \partial_\beta\, \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} + \mathcal{O}(h^2) \ ,$$

obtemos que a equação que descreve o desvio $\Delta X^i(\tau)$ é, tomando $\tau \to t$:

$$\frac{d^2 \Delta X^i}{dt^2} = -\, R^{i}{}_{\alpha\nu\beta}\, \Delta X^{\nu}\, U^{\alpha} U^{\beta} \simeq -\, R^{i}{}_{0j0}\, \Delta X^{j} \ .$$

- Usando a definição acima para o tensor de Riemann obtemos, finalmente:

$$\frac{d^2 \Delta X^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\, \frac{d^2\, h_{ij}}{dt^2}\, \Delta X^j$$



Ou seja, a **perturbação** no desvio ΔX^i é proporcional à amplitude da onda, h_{ij} . Veremos na aula que vem que essa amplitude é tipicamente **muito pequena** ($10^{-10}, 10^{-20}$...)

EFEITO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS NA MATÉRIA

- Mas vamos nos recordar que a nossa onda gravitacional é dada por:

$$h_{11} = -\,h_{22} = h^{+}\,e^{-ik(t-z)} \quad \text{(polarização longitudinal)}$$

$$h_{12} = h_{21} = h^{\times}\,e^{-ik(t-z)} \quad \text{(polarização transversal)}$$

- Portanto, temos que $\ddot{h}_{ij} = -\,k^2\,h_{ij}$, o que leva a:

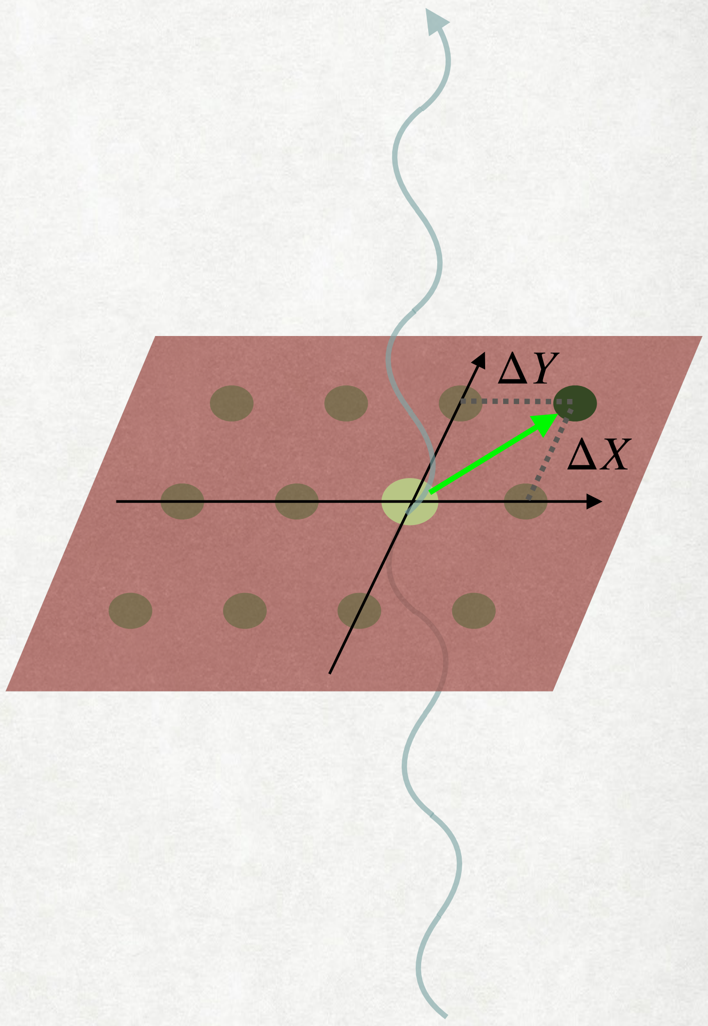
$$\frac{d^2\Delta X^i}{dt^2} = -\,\frac{1}{2}\,k^2\,h_{ij}\,\Delta X^j$$

- Imediatamente vemos que, como $h_{3i} = 0$, o desvio na direção z (paralela à direção de propagação da onda), $\Delta X^3 = \Delta Z$, ***se anula***: como $d^2\Delta Z/dt^2 = 0$, dando condições iniciais $\Delta Z_{in} = \Delta\dot{Z}_{in} = 0$, temos $\Delta Z = 0$ como a única solução.

- Para os desvios nas direções ortogonais, temos que:

(i) $$\frac{d^2\Delta X}{dt^2} = -\,\frac{1}{2}\,k^2\,\left(h^{+}\,\Delta X + h^{\times}\,\Delta Y\right)\,e^{-ik(t-z)}$$

(ii) $$\frac{d^2\Delta Y}{dt^2} = +\,\frac{1}{2}\,k^2\,\left(h^{+}\,\Delta Y - h^{\times}\,\Delta X\right)\,e^{-ik(t-z)}$$



EFEITO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS NA MATÉRIA

- Vamos tomar o primeiro caso, de uma onda com polarização apenas "+", ou seja, vamos fazer $h^\times \to 0$. As duas equações ficam:

(i) $$\frac{d^2\Delta X}{dt^2} = -\frac{1}{2}\,k^2\,h^+\,\Delta X\,e^{-ik(t-z)}$$

(ii) $$\frac{d^2\Delta Y}{dt^2} = +\frac{1}{2}\,k^2\,h^+\,\Delta Y\,e^{-ik(t-z)}$$

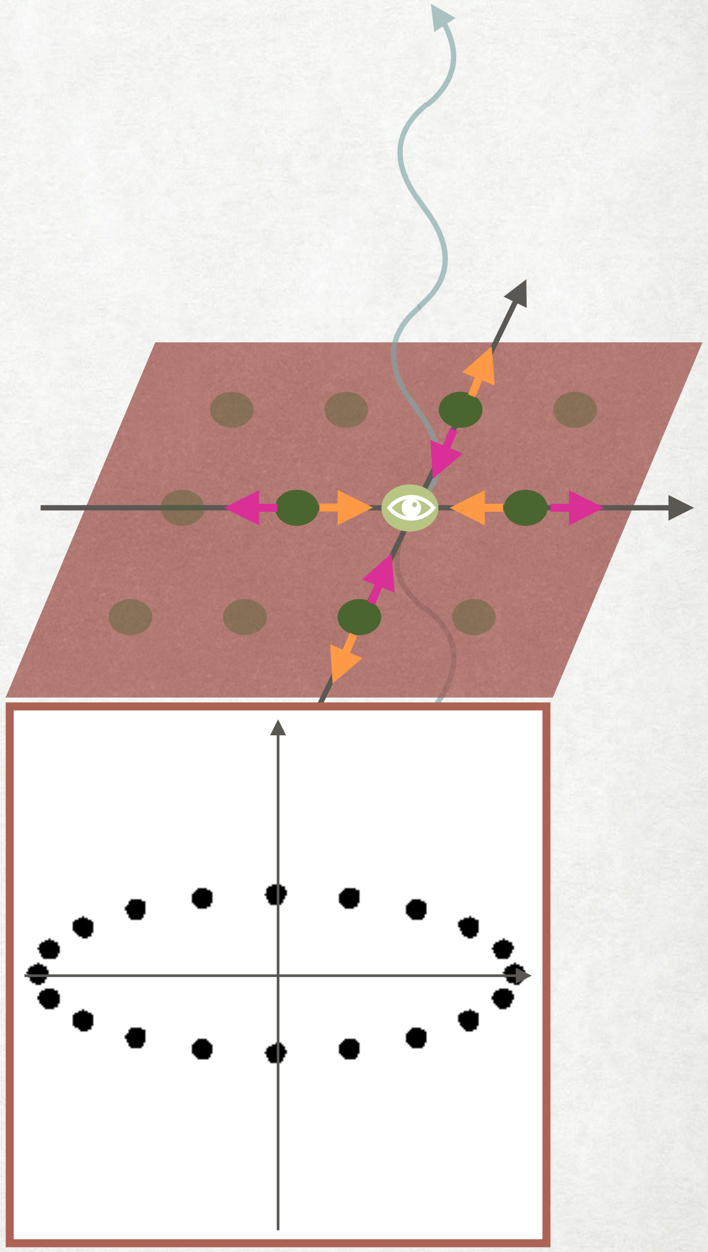
- Sabendo (ou assumindo!) que a amplitude da onda gravitacional é muito pequena, $h^+ \ll 1$, a ***solução aproximada*** dessas equações é:

$$\Delta X \simeq \Delta X_{(0)}\left[1+\frac{1}{2}\,h^+\,e^{-ik(t-z)} + \mathcal{O}(h^+)^2\right] \quad \to \quad \Delta X \simeq \Delta X_{(0)}\left[1+\frac{1}{2}\,h^+\,\cos[k(t-z)]\right]$$

$$\Delta Y \simeq \Delta Y_{(0)}\left[1-\frac{1}{2}\,h^+\,e^{-ik(t-z)} + \mathcal{O}(h^+)^2\right] \quad \to \quad \Delta Y \simeq \Delta Y_{(0)}\left[1-\frac{1}{2}\,h^+\,\cos[k(t-z)]\right]$$

- Ou seja, à medida que a onda se propaga, a coordenada ΔX se contrai enquanto ΔY aumenta; depois de uma fase de π, ΔX aumenta enquanto ΔY diminui; e assim por diante.

- O melhor jeito de interpretar esse resultado é imaginar as coordenadas de uma ***coleção de partículas em torno de você***, que se movem um pouquinho dessas posições à medida que a onda passa. A solução acima indica que esses movimentos são como oscilações harmônicas.



(Deslocamento muito, muito, ***muito exagerado***!)

EFEITO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS NA MATÉRIA

- Agora vamos tomar o caso de uma onda com polarização apenas "×", ou seja, vamos fazer $h^{+} \to 0$. As duas equações ficam agora:

(i) $$\frac{d^2 \Delta X}{dt^2} = -\frac{1}{2} k^2 h^{\times} \Delta Y e^{-ik(t-z)}$$

(ii) $$\frac{d^2 \Delta Y}{dt^2} = -\frac{1}{2} k^2 h^{\times} \Delta X e^{-ik(t-z)}$$

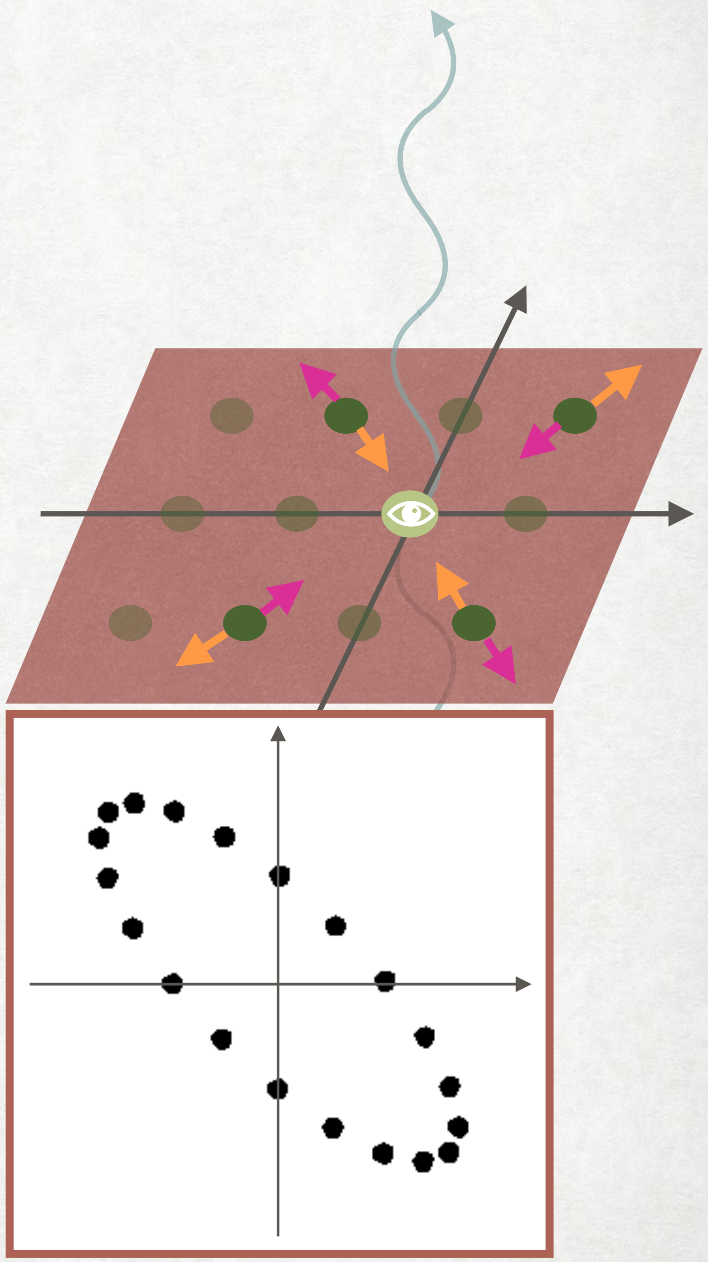
- Novamente, se a amplitude da onda gravitacional é muito pequena, $h^{\times} \ll 1$, a ***solução aproximada*** dessas equações é:

$$\Delta X \simeq \Delta X_{(0)} + \Delta Y_{(0)} \frac{1}{2} h^{\times} \cos[k(t-z)]$$

$$\Delta Y \simeq \Delta Y_{(0)} + \Delta X_{(0)} \frac{1}{2} h^{\times} \cos[k(t-z)]$$

- Ou seja, à medida que a onda se propaga, as coordenadas ao longo de $X = Y$ se expandem, enquanto aquelas ao longo de $X = -Y$ diminuem; depois de uma fase de π, esse padrão troca de sinal.

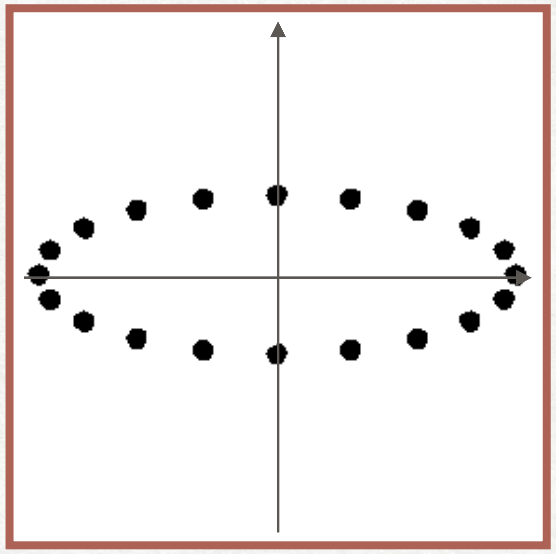
- Novamente, podemos interpretar esse polarização "×" em termos de uma coleção de partículas que se afastam e se aproximam.



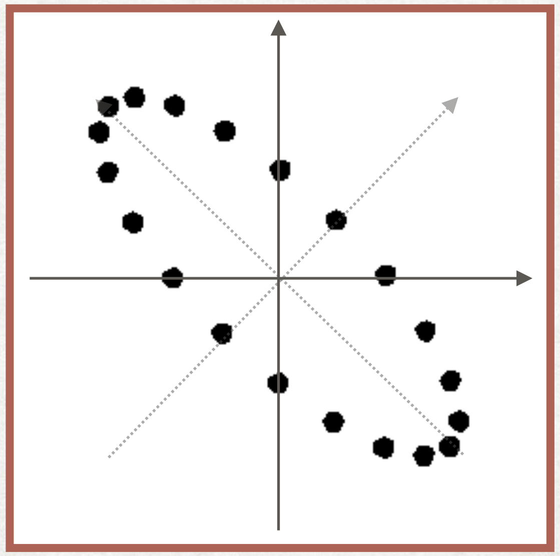
(Deslocamento muito, muito, ***muito exagerado***!)

EFEITO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS NA MATÉRIA

- A ***solução geral*** é, claro, uma ***superposição*** qualquer dessas duas soluções — e com todos os possíveis $\overrightarrow{k}$.
- Claramente, as duas polarizações são ***equivalentes*** a menos de uma rotação de $\pi/4$ (45º).
- Note também que, em qualquer instante, ambas as polarizações são invariantes por uma rotação de π (180º).
- Ou seja, rodando de $\varphi = \pi$ chegamos de volta no mesmo lugar!
- Isso, claro, é uma consequência do fato que o *spin* das ondas gravitacionais (o "graviton") é 2 , o que faz com que uma rotação de $\varphi = \pi$ tenha um efeito, para a onda gravitacional, de uma rotação de 2π !



(Deslocamentos muito, muito, ***muito exagerados***!)



AULA QUE VEM:

- **Gerando ondas gravitacionais**
- **5a Lista de Exercícios: chegando…**
- Leitura: S. Carroll, Capítulo 7