Física I

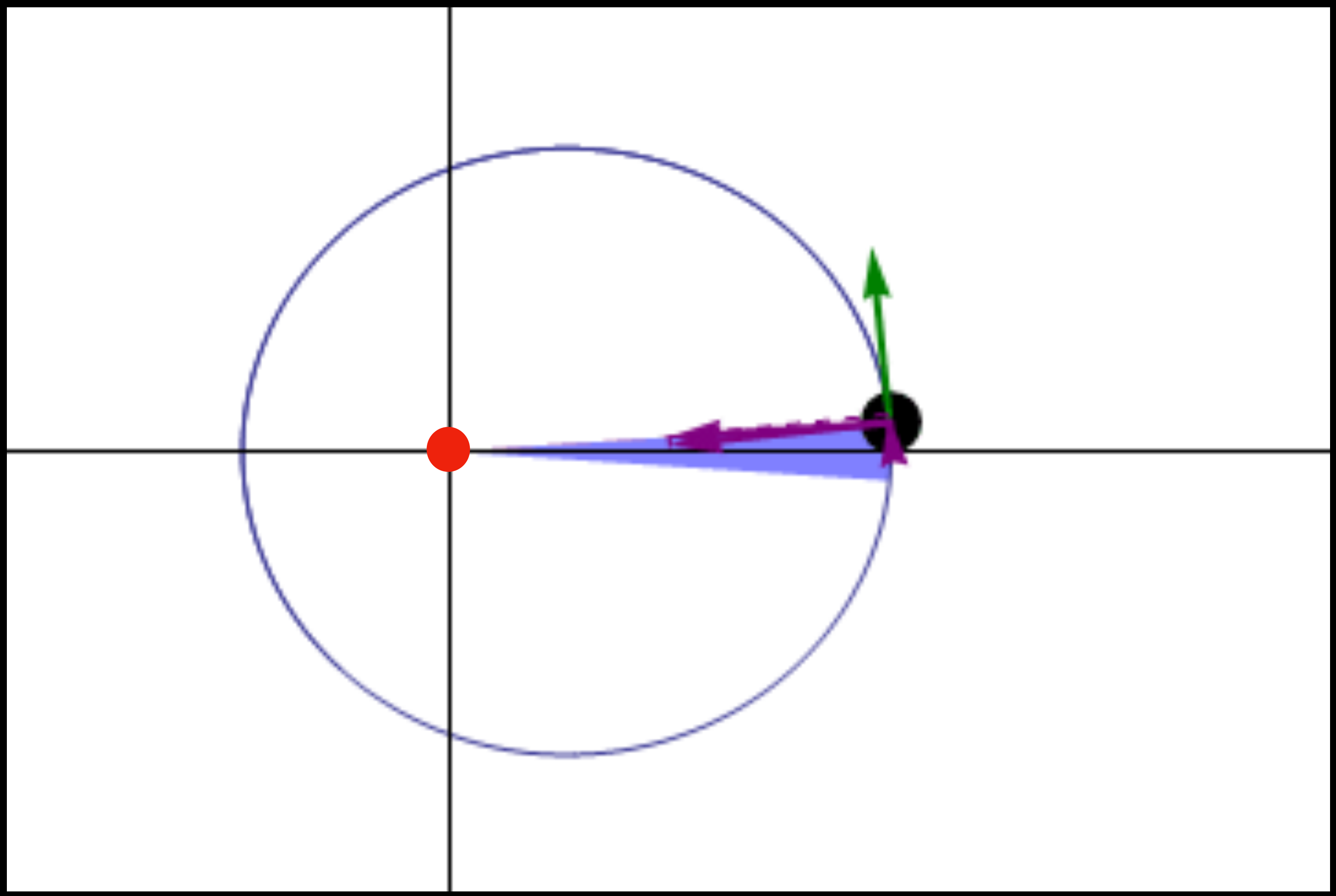
A Lei da Gravitação Universal

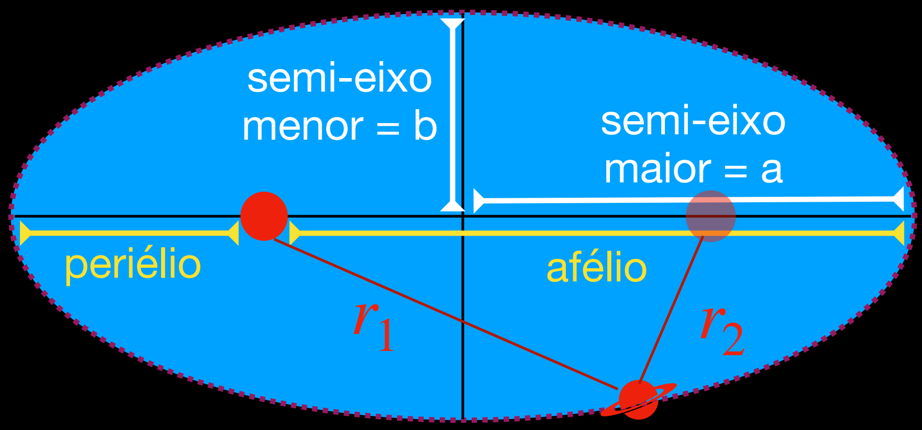
Física I

Módulo IV, aula 3:
Lei da Gravitação Universal:

As órbitas Keplerianas
O vetor de Laplace-Runge-Lenz
As seções cônicas
O potencial efetivo

As órbitas Keplerianas (elipses)

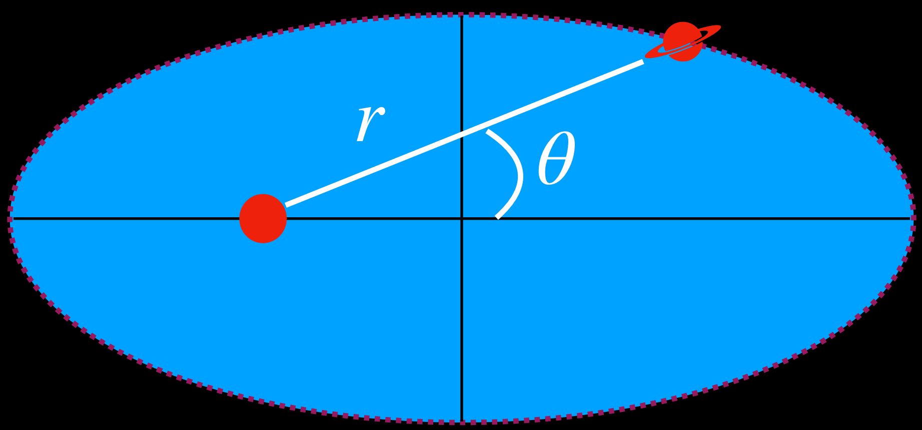




$$r_1 + r_2 = a + b$$

Um corpo em órbita ao redor do Centro de Massa de um sistema de 2 corpos se move numa elipse

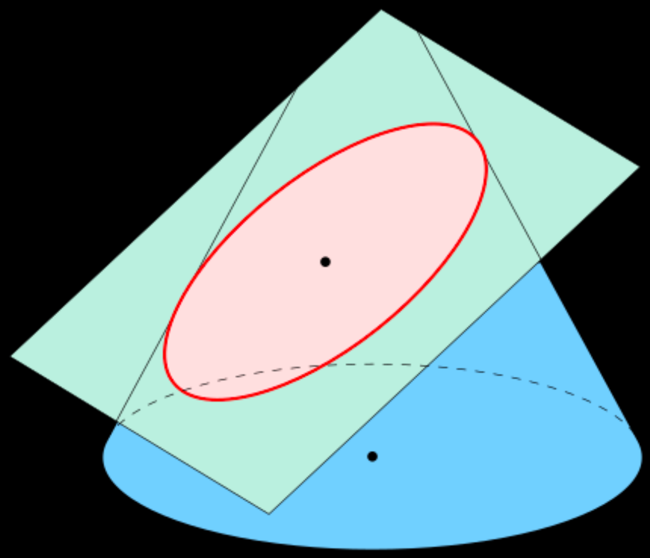
As órbitas Keplerianas (elipses)

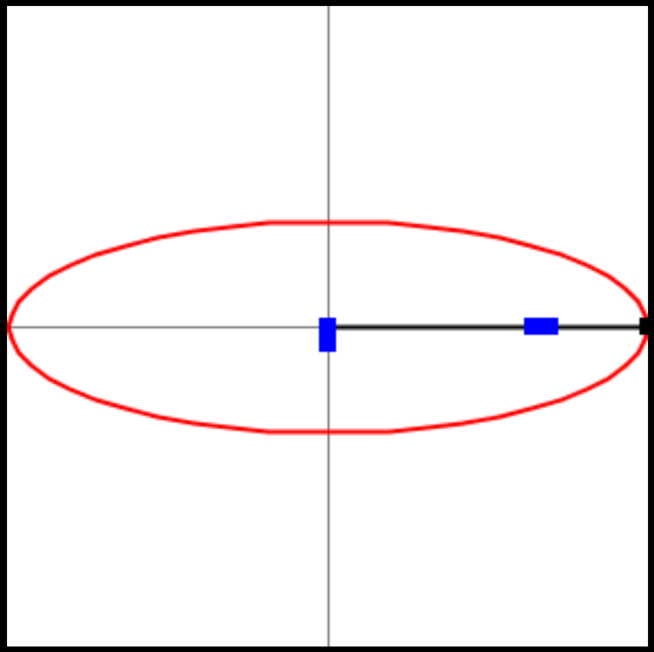


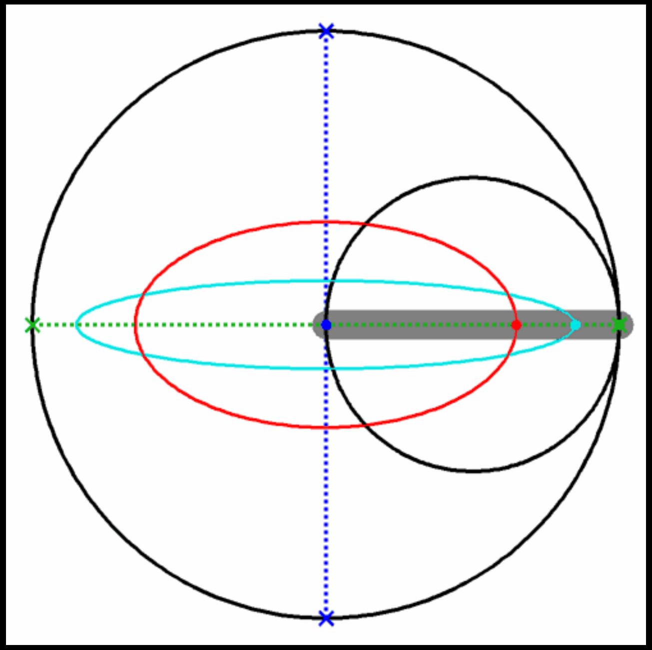
$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm \cos\theta} \qquad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

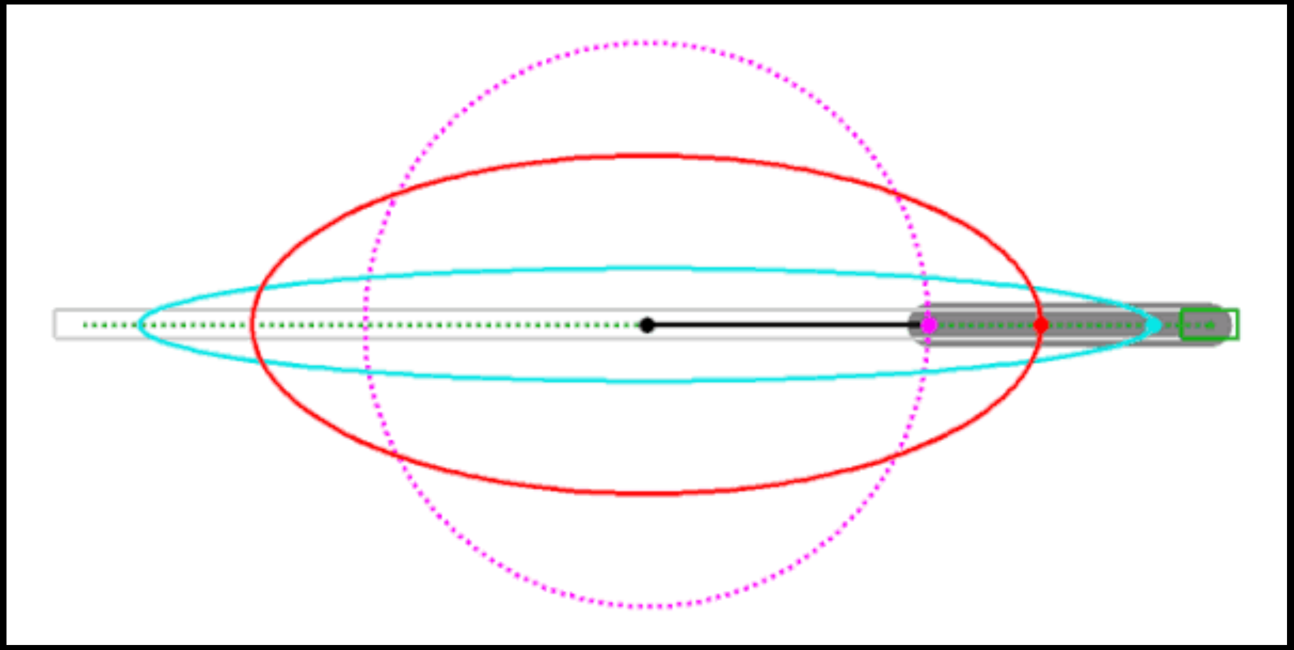
As elipses são curvas realmente mágicas…
veja https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse

As órbitas Keplerianas (elipses)









As elipses são curvas realmente mágicas…
veja https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse

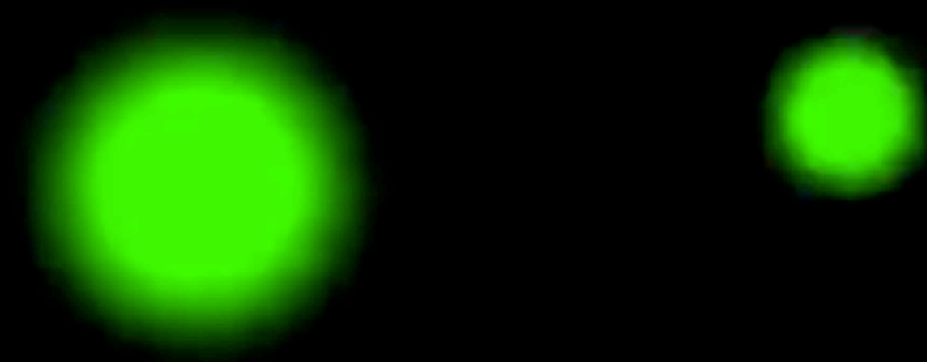
As órbitas Keplerianas (elipses)

time : 0.1000

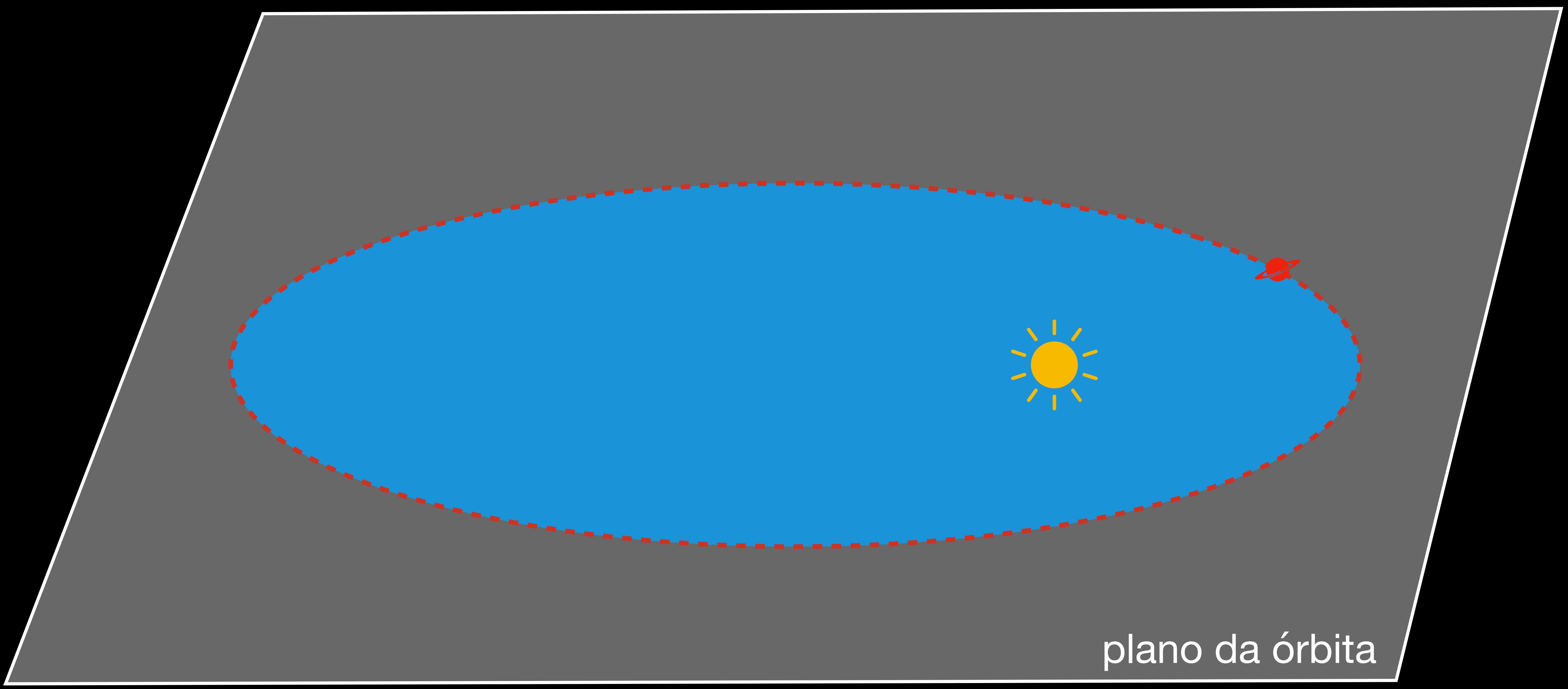
Simulações de Rubens Machado (UFOP)

circular orbit

http://professor.ufop.br/rgmachado/hist%C3%B3ria-da-astronomia

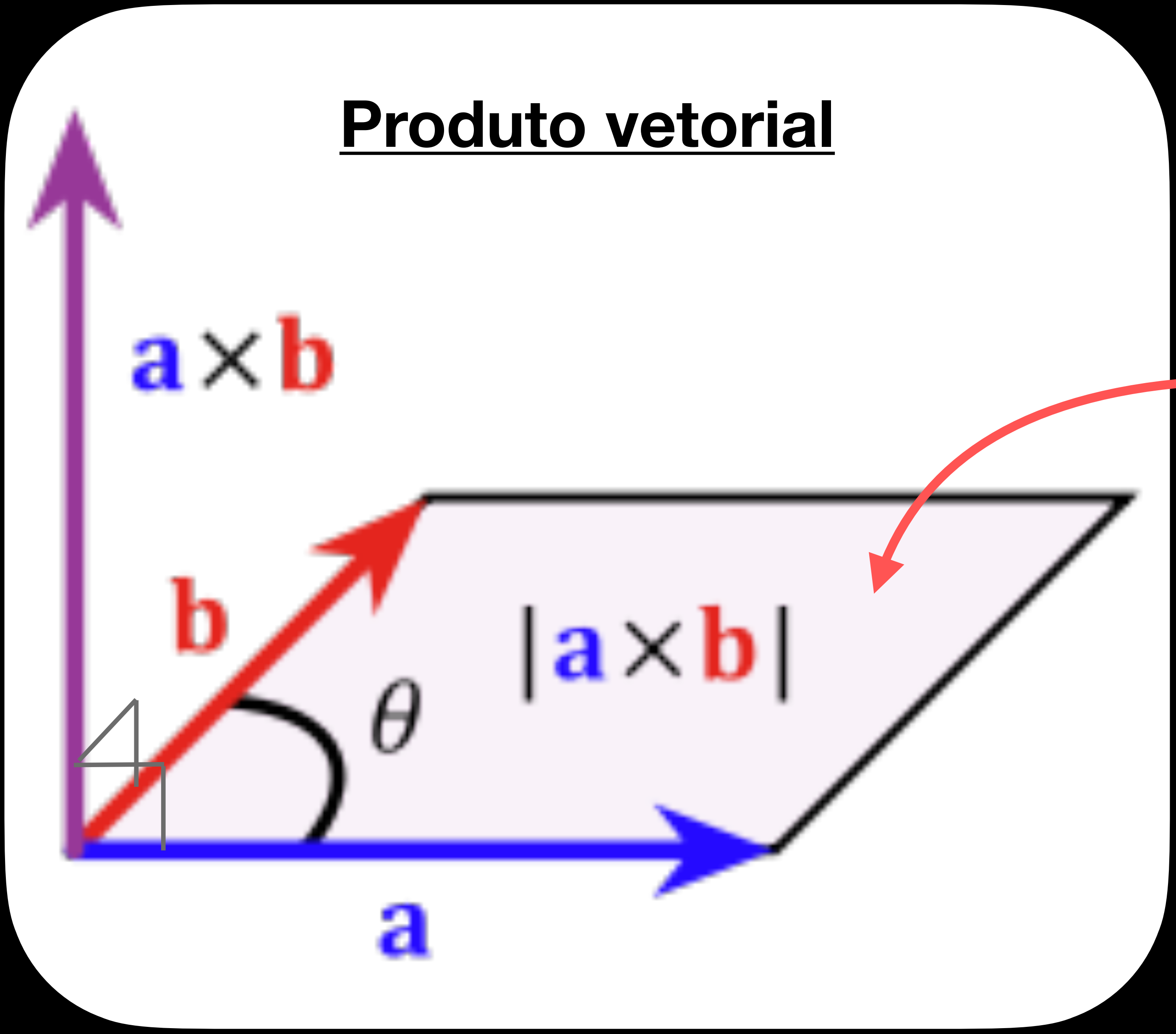


O plano da órbita



Mas vamos retornar ao problema de 2 corpos.
Comece notando que o plano da órbita ***não muda***.

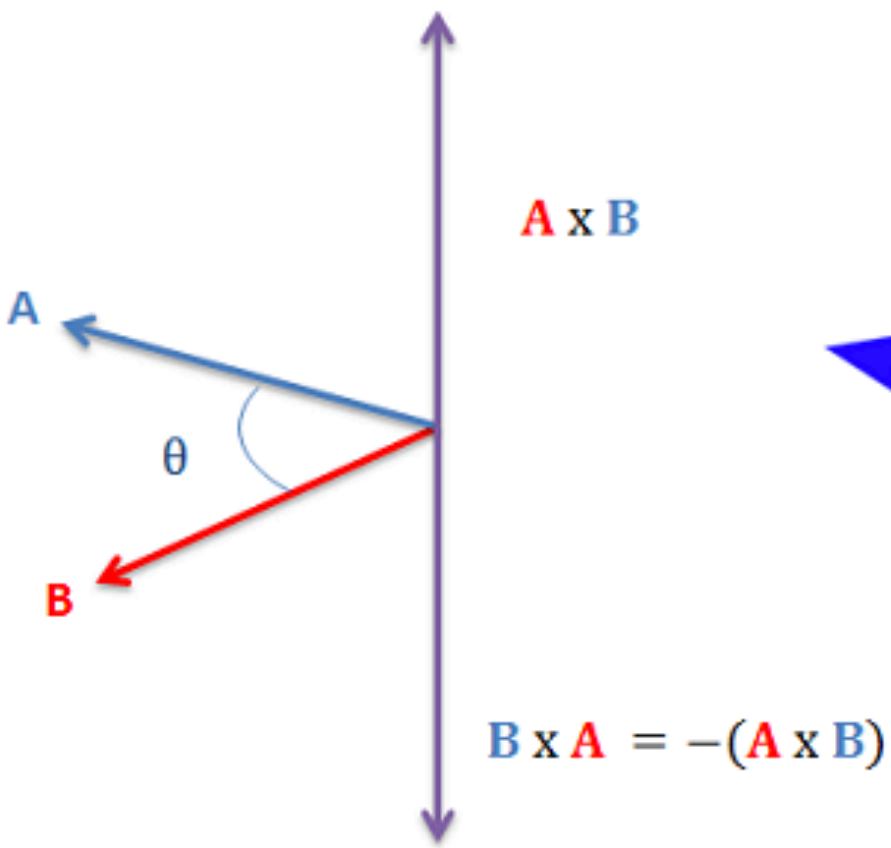
O plano da órbita

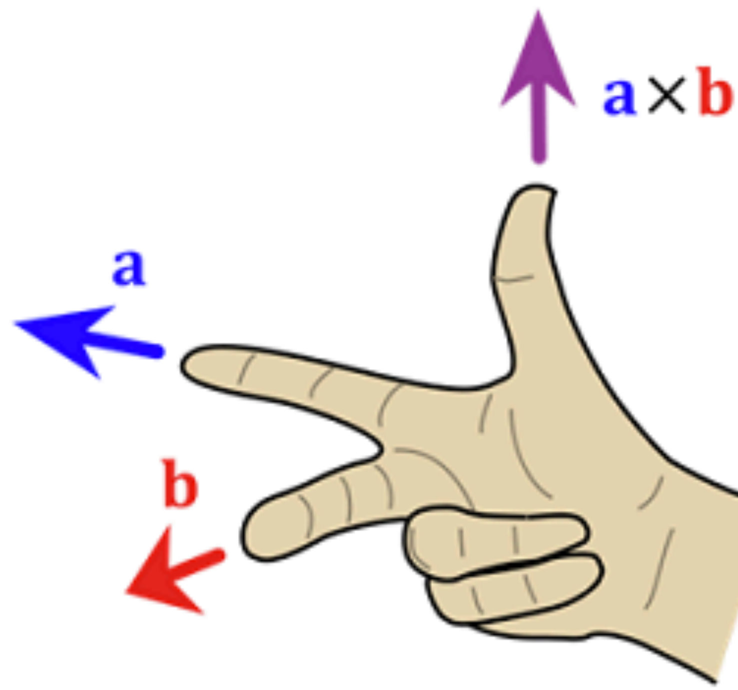


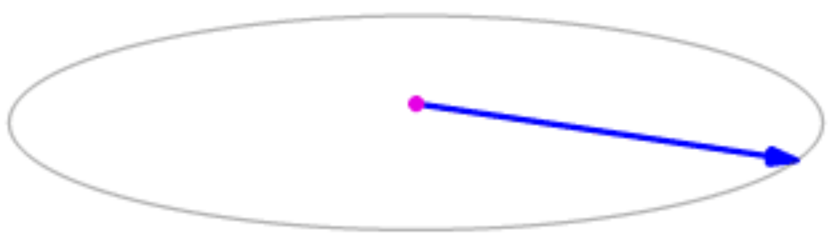
Área do paralelogramo

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a\, b\, \mathrm{sen}\, \theta$$

O plano da órbita

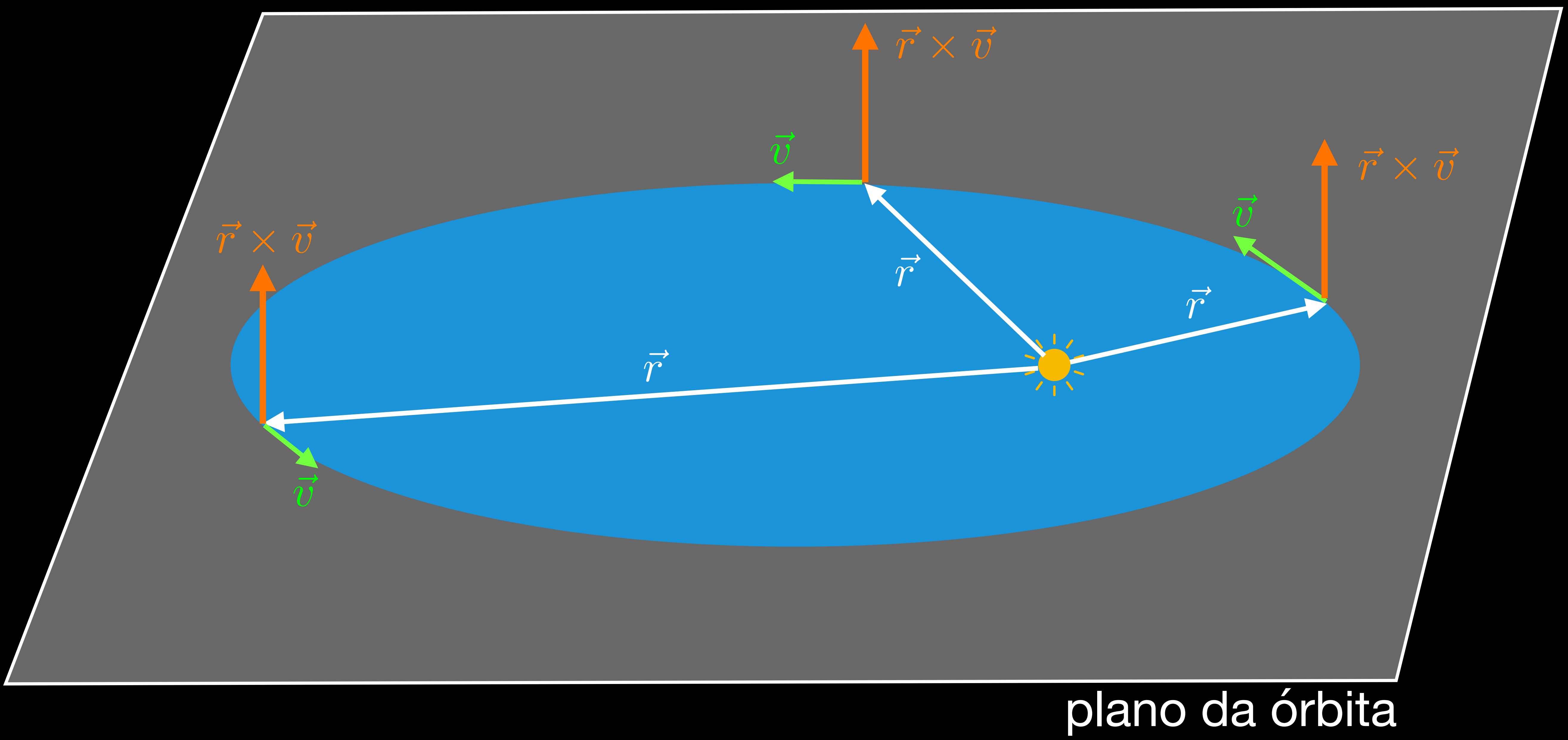






Regra da mão direita

O plano da órbita



Duas observações, três teoremas

- Vamos partir da observação de ***duas propriedades das órbitas***:

  (a) O ***plano da órbita*** não muda com o tempo: o eixo perpendicular ao movimento é fixo.

  (b) A ***direção do semi-eixo maior*** da elipse é uma outra direção fixa (não muda com o tempo). Isso é equivalente a dizer que as ***órbitas são fechadas***.

- Essas propriedades seguem de três Teoremas, que vamos provar nesta aula:

  (i) Para forças centrais ($\overrightarrow{F} \sim \hat{r}$), a quantidade $\overrightarrow{\ell} = \vec{r} \times \overrightarrow{v}$ (o vetor perpendicular ao plano da órbita) permanece constante.

  (ii) No caso específico de uma força central que decai com $\sim 1/r^2$, a direção do semi-eixo maior pode ser expressa pelo vetor de Laplace-Runge-Lenz, e esse vetor também permanece constante.

  (iii) No caso particular da força Newtoniana, as trajetórias são seções cônicas.

Duas observações, três teoremas

Teorema (i)

- Vamos mostrar agora que, quando a força é na direção radial $\vec{F} \sim \hat{r}$, a quantidade $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v}$ se conserva (ou seja, ela permanece constante).

- Se $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v}$ é constante, então sua derivada deve ser nula:

$$\frac{d}{dt}\vec{\ell} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = \dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}}$$

$$= \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = 0 + \vec{r} \times \frac{\vec{F}}{m}$$

A rigor, aqui em vez de m deveríamos escrever a ***massa reduzida***, μ ; e o raio r se refere à distância entre as duas massas (M e m).

- Mas forças centrais são tais que $\vec{F} \sim \hat{r}$, portanto $\vec{r} \times \vec{F} \sim \vec{r} \times \hat{r} = 0$.

- Portanto, está demonstrado que $\vec{\ell}$ é uma ***constante do movimento***.

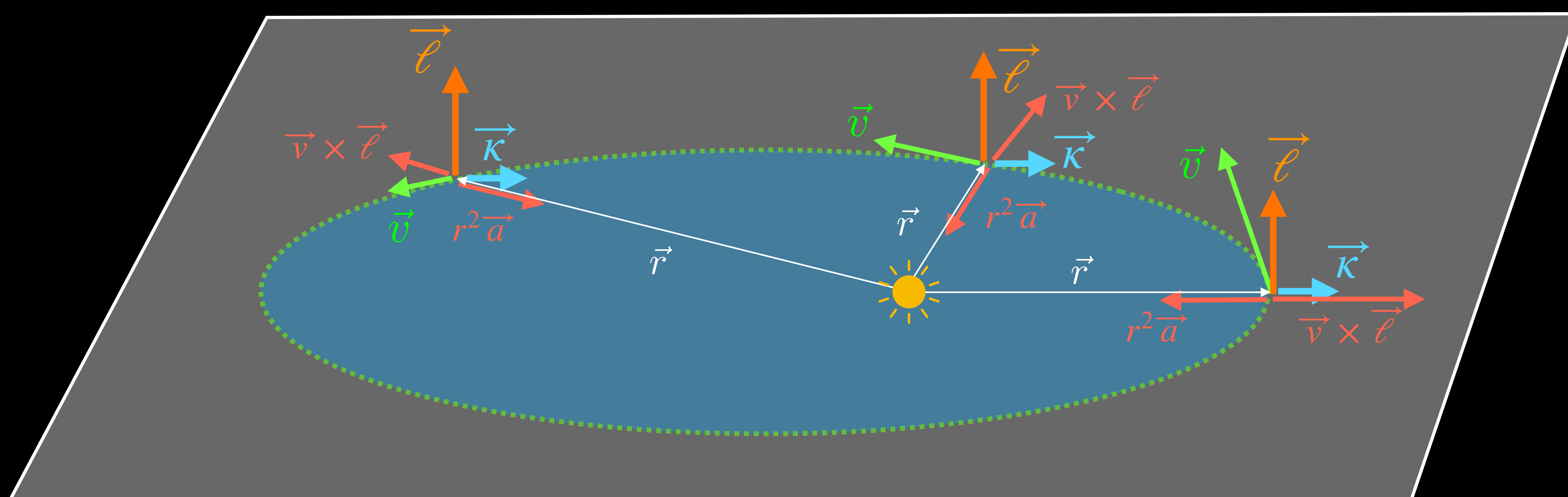
Duas observações, três teoremas

Teorema (ii)

- Vamos introduzir o ***vetor de Laplace-Runge-Lenz*** (às vezes chamado de ***vetor de Lenz***), e mostrar que ele ***se conserva***. Pela definição:

$$\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} + \frac{r^2 \vec{F}}{m} = \vec{v} \times \vec{\ell} + r^2 \vec{a} \qquad , \quad \text{com } \vec{F} = m\vec{a} \sim r^{-2}\,\hat{r}$$

- É útil, antes de demonstrar esse teorema, visualizar esse vetor:



Duas observações, três teoremas

Teorema (ii)

- Vamos demonstrar que de fato $\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} + r^2\,\vec{F}/m = \vec{v} \times \vec{\ell} - GM\,\hat{r}$ é um vetor "conservado" (constante). Vejamos:

$$\frac{d}{dt}\vec{\kappa} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} \times \vec{\ell}\right) - \frac{d}{dt}\left(GM\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{a} \times \vec{\ell} - GM\left(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\dot{r}\,\vec{r}}{r^2}\right) \quad ,$$

onde note que $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, mas $\dot{r}\hat{r} \neq \vec{v}$!

- Agora, lembre-se que, por hipótese, $\vec{a} = \vec{F}/m = -\,GM\vec{r}/r^3$, logo, usando $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v}$:

$$\frac{d}{dt}\vec{\kappa} = -\frac{GM}{r^3}\,\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v}) - GM\left(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\dot{r}\,\vec{r}}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{GM}{r^3}\,\left[\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{v}) - \vec{v}(\vec{r}\cdot\vec{r})\right] - GM\left(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\dot{r}\,\vec{r}}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{GM}{r^3}\,\left[\cancel{\vec{r}(r\dot{r})} - \cancel{\vec{v}r^2}\right] - GM\left(\cancel{\frac{\vec{v}}{r}} - \cancel{\frac{\dot{r}\,\vec{r}}{r^2}}\right)$$

$= 0$!!!

$\blacksquare$

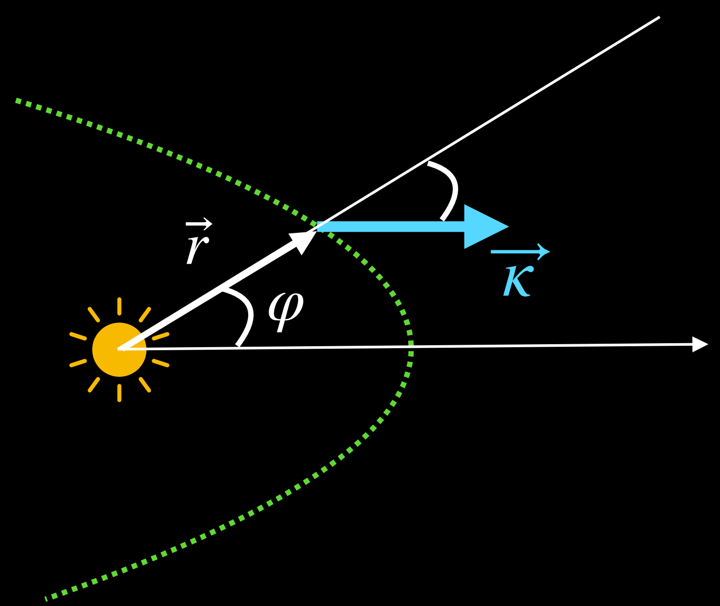
Duas observações, três teoremas

Teorema (iii)

- Finalmente, vamos agora mostrar que, no caso da força da gravidade de Newton, que é atrativa, e cai com a distância como $1/r^2$, as trajetórias e órbitas são sempre ***seções cônicas***.

- Lembrando que o vetor de Laplace-Runge-Lenz é $\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} - GM\hat{r}$, e notando que ele é ***constante*** no caso da Lei da Gravitação, vamos ver como a posição $\vec{r}$ se orienta com relação a $\vec{\kappa}$:

$$\vec{r} \cdot \vec{\kappa} = r\,\kappa\,\cos\varphi$$



A rigor, aqui o raio r se refere à distância entre o CM (o foco da elipse) e a massa m. Porém, até agora estávamos usamos r como sendo a distância entre as duas massas (M e m).
Para corrigir isso, lembre-se da relação obtida na aula passada (Aula 2):
$r_{CM\leftrightarrow m} = \dfrac{M}{M+m}\, r_{M\leftrightarrow m}$
A partir disso você pode corrigir os meus resultados por esse fator, $M/(M+m)$.

Duas observações, três teoremas

Teorema (iii)

- Vamos abrir essa expressão:

$$\vec{r} \cdot \vec{\kappa} = \vec{r} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{\ell}\right) - \vec{r} \cdot \left(GM\hat{r}\right)$$

$$= \vec{\ell} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) - GMr = \vec{\ell} \cdot \vec{\ell} - GMr$$

- Portanto, temos que:

$$\vec{r} \cdot \vec{\kappa} = r\,\kappa\,\cos\varphi = \ell^2 - GM\,r$$

- Invertendo isso em termos de r obtemos:

$$r\,(GM + \kappa\,\cos\varphi) = \ell^2$$

$$\implies \quad r = \frac{\ell^2}{GM + \kappa\,\cos\varphi}$$

- Ou, usando uma notação mais adequada:

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon\,\cos\varphi}$$, onde $r_0 = \ell^2/(GM)$ e $\epsilon = \kappa/(GM)$ é a ***excentricidade***

Trajetórias: seções cônicas!

Teorema (iii)

- Isso não é nada mais, nada menos do que a ***equação para seções cônicas***:

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \, \cos\varphi} \quad ,$$

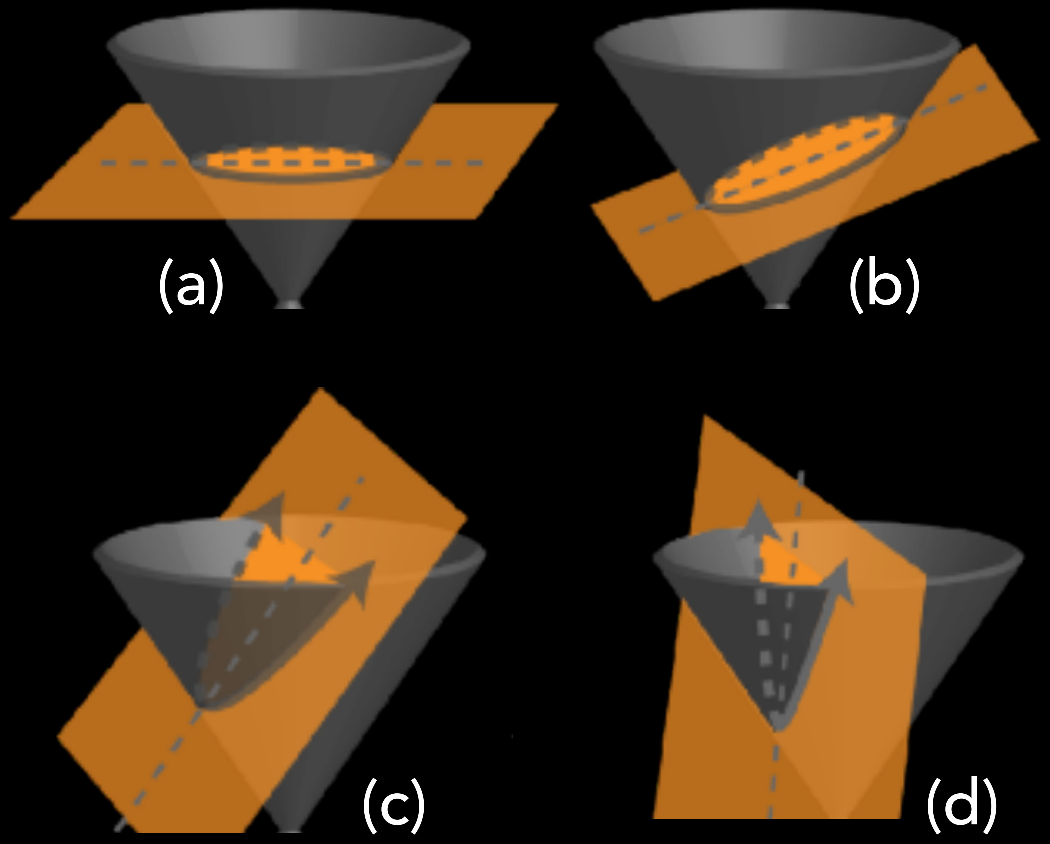
onde:

(a) $\epsilon = 0$ são círculos

(b) $0 < \epsilon < 1$ são elipses

(c) $\epsilon = 1$ são parábolas

(d) $\epsilon > 1$ são hipérboles



Trajetórias: seções cônicas!

- Seções cônicas: $r = \dfrac{r_0}{1 + \epsilon \cos\varphi}$,

onde $r_0 = \ell^2/(GM)$ e $\epsilon = \kappa/(GM)$ é a ***excentricidade***

(a) Órbita circular ($\epsilon = 0$)

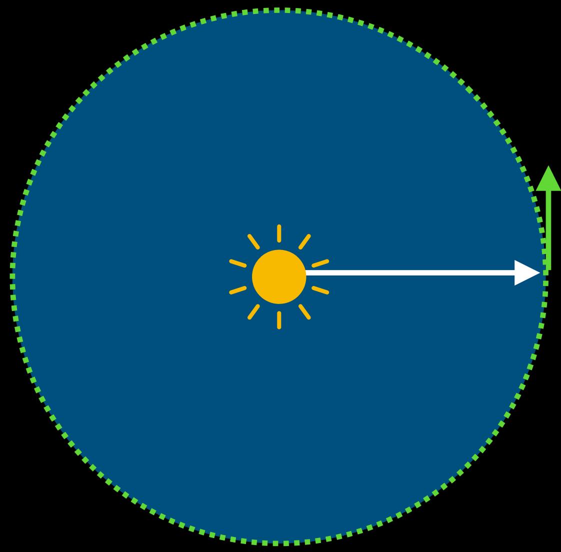
$$r = r_0\,\hat{r} \quad , \quad v_0 = \omega_0\, r_0$$

$$\overrightarrow{a} = -\,\omega_0^2 r_0 \hat{r} = -\frac{GM}{r_0^2}\hat{r} \quad , \quad GM = \omega_0^2\, r_0^3$$

$$\overrightarrow{\ell} = r_0\, v_0\, \hat{z} = \omega_0\, r_0^2\ \hat{z}$$

$$\overrightarrow{\kappa} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\ell} - G\,M\,\hat{r} = \omega_0^2\, r_0^3\, \hat{r} - (\omega_0^2\, r_0^3\, \hat{r}) = 0\,!$$

$$\Longrightarrow \quad r(\varphi) = \frac{(\omega_0 r_0^2)^2/(\omega_0^2 r_0^3)}{1 + 0\,\cos\varphi} = r_0\ \ !$$



Trajetórias: seções cônicas!

- Seções cônicas: $r = \dfrac{r_0}{1 + \epsilon \cos\varphi}$,

onde $r_0 = \ell^2/(GM)$ e $\epsilon = \kappa/(GM)$ é a ***excentricidade***

(b) Órbita elíptica $(0 < \epsilon < 1)$

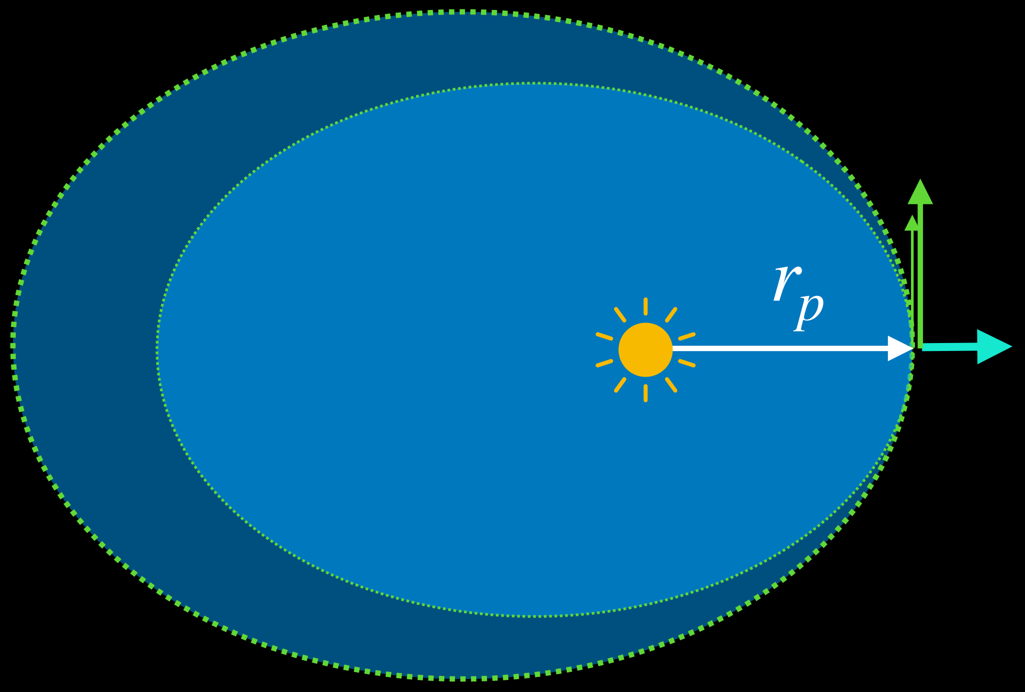
Aqui é útil tomar o periélio:

$$\vec{r}(r_p) = r_p\,\hat{i} \quad , \quad \vec{v}(r_p) = v_{max}\,\hat{j} \quad , \quad \vec{\ell} = r_p\, v_{max}\,\hat{z}$$

$$\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} - GM\,\hat{r} \xrightarrow{r_p} r_p v_{max}^2 \hat{i} - GM\hat{i} \quad ,$$

$r_0 = \ell^2/(GM)$ e portanto $\epsilon = \ell^2/(r_p\, GM) - 1$

$$\Longrightarrow \quad r(\varphi) = \frac{\ell^2/GM}{1 + \left(\dfrac{\ell^2}{r_p GM} - 1\right)\cos\varphi}$$



Trajetórias: seções cônicas!

- Seções cônicas: $r = \dfrac{r_0}{1 + \epsilon \cos\varphi}$,

onde $r_0 = \ell^2/(GM)$ e $\epsilon = \kappa/(GM)$ é a ***excentricidade***

(c) Órbita parabólica ($\epsilon = 1$)

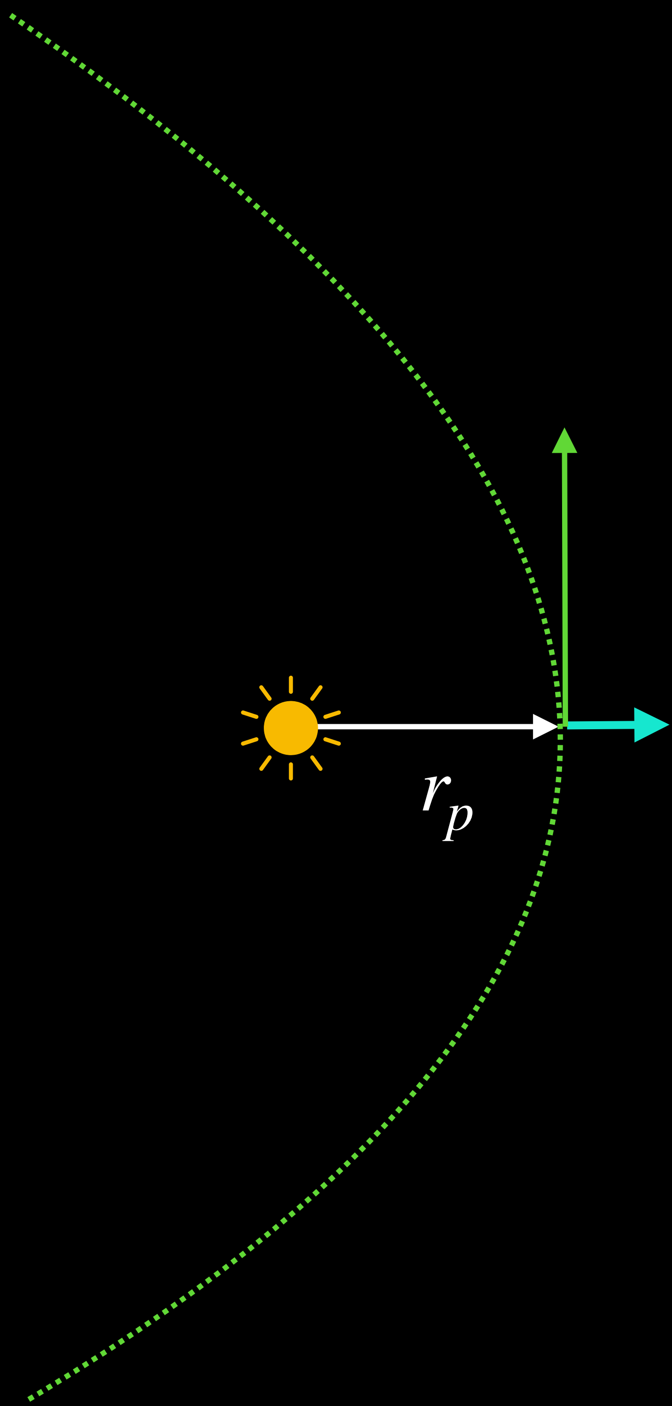
A partícula vem do infinito, atinge um ponto de máxima aproximação, e depois retorna ao infinito

$$\vec{r}(r_p) = r_p\,\hat{i} \quad , \quad \vec{v}(r_p) = v_{max}\,\hat{j} \quad , \quad \vec{\ell} = r_p\,v_{max}\,\hat{z}$$

$$\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} - G\,M\,\hat{r} \xrightarrow{r_p} r_p v_{max}^2 \hat{i} - GM\hat{i} \quad ,$$

$$r_0 = \ell^2/(GM) \ , \epsilon = \ell^2/(r_p\,GM) - 1 = 1$$

$$\Longrightarrow \quad r(\varphi) = \frac{\ell^2/GM}{1 + \left(\frac{\ell^2}{r_p GM} - 1\right)\cos\varphi} = \frac{2\,r_p}{1 + \cos\varphi}$$



Trajetórias: seções cônicas!

- Seções cônicas: $r = \dfrac{r_0}{1 + \epsilon \, \cos\varphi}$,

onde $r_0 = \ell^2/(GM)$ e $\epsilon = \kappa/(GM)$ é a ***excentricidade***

(d) Órbita hiperbólica ($\epsilon > 1$)

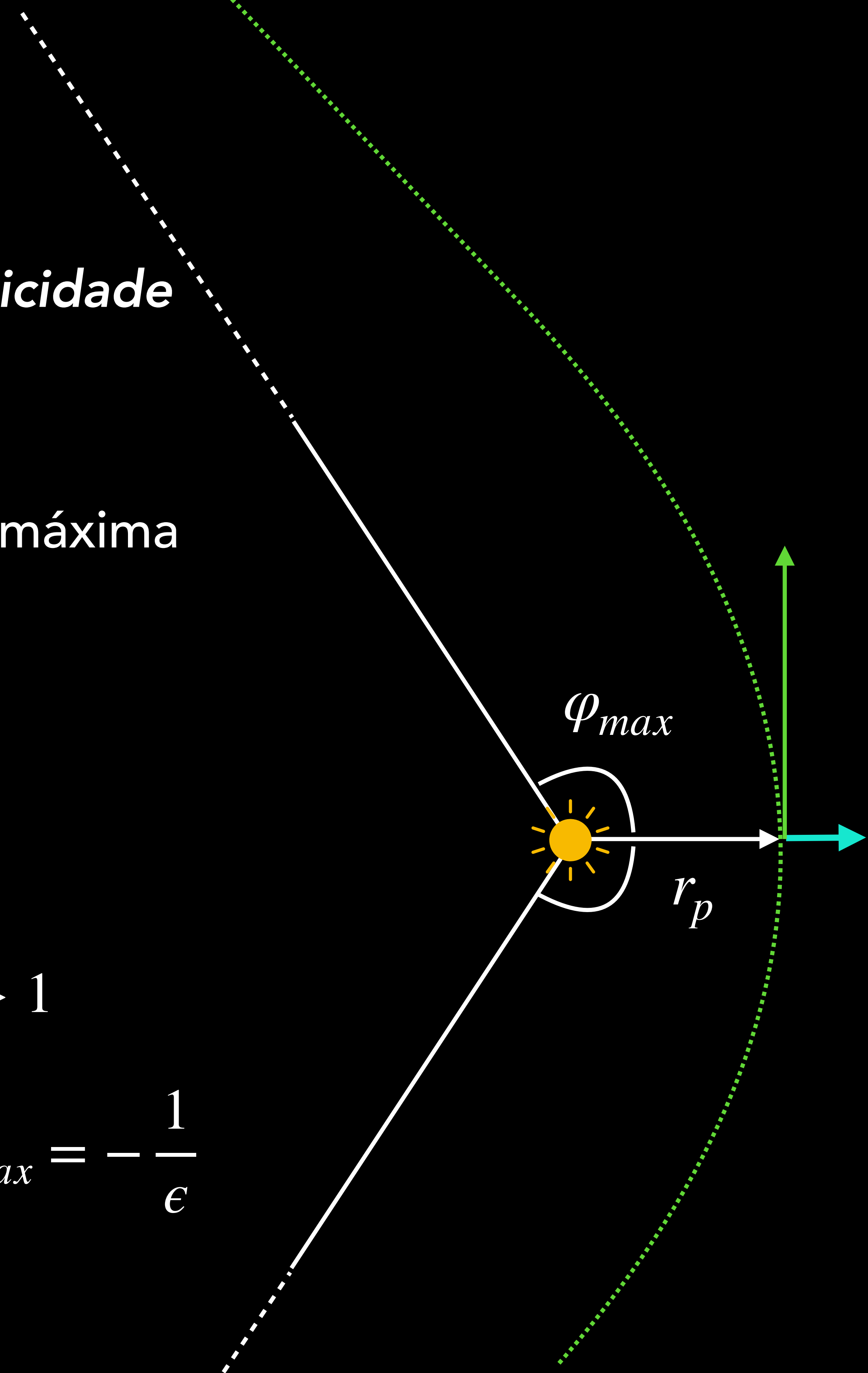
A partícula vem do infinito, atinge um ponto de máxima aproximação, e depois retorna ao infinito

$$\vec{r}(r_p) = r_p \, \hat{i} \quad , \quad \vec{v}(r_p) = v_{max} \, \hat{j} \quad , \quad \vec{\ell} = r_p \, v_{max} \, \hat{z}$$

$$\vec{\kappa} = \vec{v} \times \vec{\ell} - G\,M\,\hat{r} \xrightarrow{r_p} r_p v_{max}^2 \hat{i} - GM\hat{i} \quad ,$$

$r_0 = \ell^2/(GM)$ e portanto $\epsilon = \ell^2/(r_p\,GM) - 1 > 1$

$$\Longrightarrow \quad r(\varphi) = \frac{\ell^2/GM}{1 + \left(\frac{\ell^2}{r_p GM} - 1 \right) \cos\varphi} \quad , \; \cos\varphi_{max} = -\frac{1}{\epsilon}$$



A energia potencial e o potencial efetivo

- Vimos na aula passada que, se as ***forças*** são ***conservativas***, existe um ***balanço*** entre a energia cinética e a energia potencial, de tal forma que a ***energia total se conserva***:

$$E = K + U \quad \Longrightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0 = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt}$$

- Para uma única partícula, e em ***uma dimensão*** (x), $K = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2$, e $U = U(x)$, assim:

$$0 = \frac{1}{2} m\, 2\, \dot{x}\, \ddot{x} + \frac{d\,U}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\left(m\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\right)$$

- Em 3D temos $K = \frac{1}{2} m\, \vec{v}^{\,2}$, e $U = U(\vec{r}\,)$, assim:

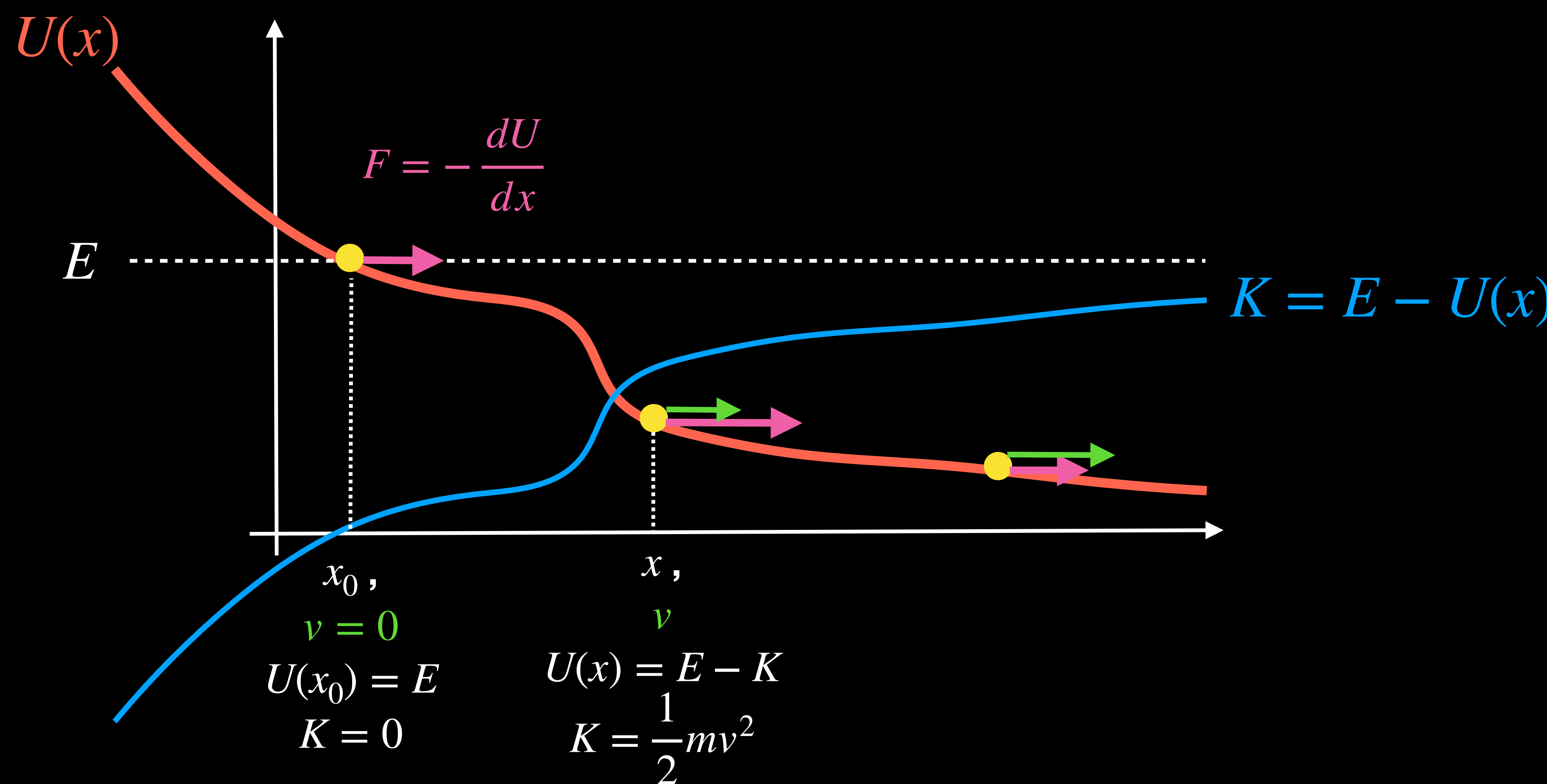
$$0 = \frac{1}{2} m\, 2\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{v} \cdot \left(m\,\vec{a} + \vec{\nabla}\, U\right)$$

- Ou seja, a ***conservação de energia*** implica na 2a Lei de Newton: $m\,\vec{a} = -\,\vec{\nabla}\, U = \vec{F}$
- A equação $E = K + U$ é uma "***primeira integral***" da equação de movimento $\vec{F} = m\,\vec{a}$

A energia potencial e o potencial efetivo

- É interessante analisar o movimento do ponto de vista da equação $E = K + U$, com a energia E sendo uma constante.

- A ilustração abaixo mostra como se dá esse balanço para um movimento em uma dimensão (x), detalhando a energia potencial $U(x)$ e a energia cinética K.



A energia potencial e o potencial efetivo

- Agora vamos retornar ao nosso problema das trajetórias e órbitas no contexto da Lei da Gravitação Universal de Newton.
- Nesse caso, podemos nos ater ao ***plano da trajetória***, definido como sendo o plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{\ell} = \vec{r} \times \overrightarrow{v}$ — que, lembre-se, pelo Teorema (ii), é conservada.
- Nesse caso a velocidade pode ser decomposta em uma ***componente paralela*** à posição $\vec{r}$, e o movimento na direção ***perpendicular***:

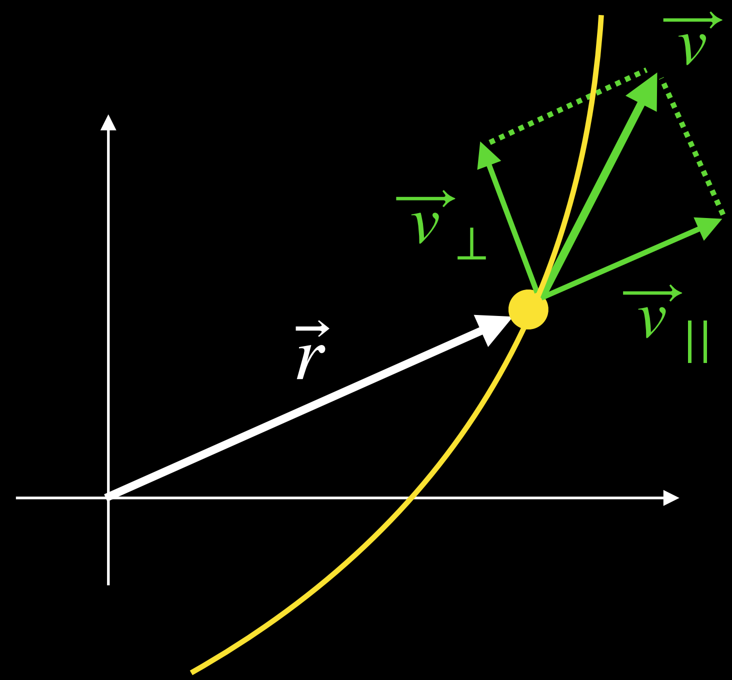
$$\overrightarrow{v} = v_{||}\,\hat{r} + \overrightarrow{v}_{\perp} \quad , \quad \text{onde} \quad v_{||} = \dot{r} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v}_{\perp} \cdot \hat{r} = 0$$

- Agora, note que:

$$|\,\overrightarrow{\ell}\,| = |\,\vec{r} \times \overrightarrow{v}\,| = r\,v_{\perp}$$

- Portanto, podemos escrever:

$$\overrightarrow{\ell}^{\,2} = r^2 v_{\perp}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad v_{\perp}^2 = \ell^2 / r^2$$



A energia potencial e o potencial efetivo

- Escrevendo então $v_\perp^2 = \ell^2/r^2$ (onde, lembre-se, ℓ é constante), podemos escrever a energia cinética da partícula como:

$$K = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right)$$

- Agora podemos substituir isso na expressão para a conservação da energia, obtendo:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m\,\ell^2}{2\,r^2} + U(r)$$

$$= K_r + U_{ef}(r) \quad , \quad \text{onde} \quad K_r = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \quad \text{e} \quad U_{ef}(r) = U(r) + \frac{m\,\ell^2}{2\,r^2}$$

- Dado o potencial Newtoniano $U(r) = -\,G\,M\,m/r$, temos:

$$U_{ef}(r) = -\,\frac{GMm}{r} + \frac{m\,\ell^2}{2\,r^2}$$

- Reduzimos, assim, um problema em 3D a um problema em 1D (o raio r):

A energia potencial e o potencial efetivo

- O potencial efetivo para as trajetórias e órbitas de partículas são, portanto, determinadas em termos do potencial efetivo para o movimento radial:

$$U_{ef}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{m\,\ell^2}{2\,r^2}$$

$$\boxed{K_r + U_{ef} = E = \textbf{constante}}$$

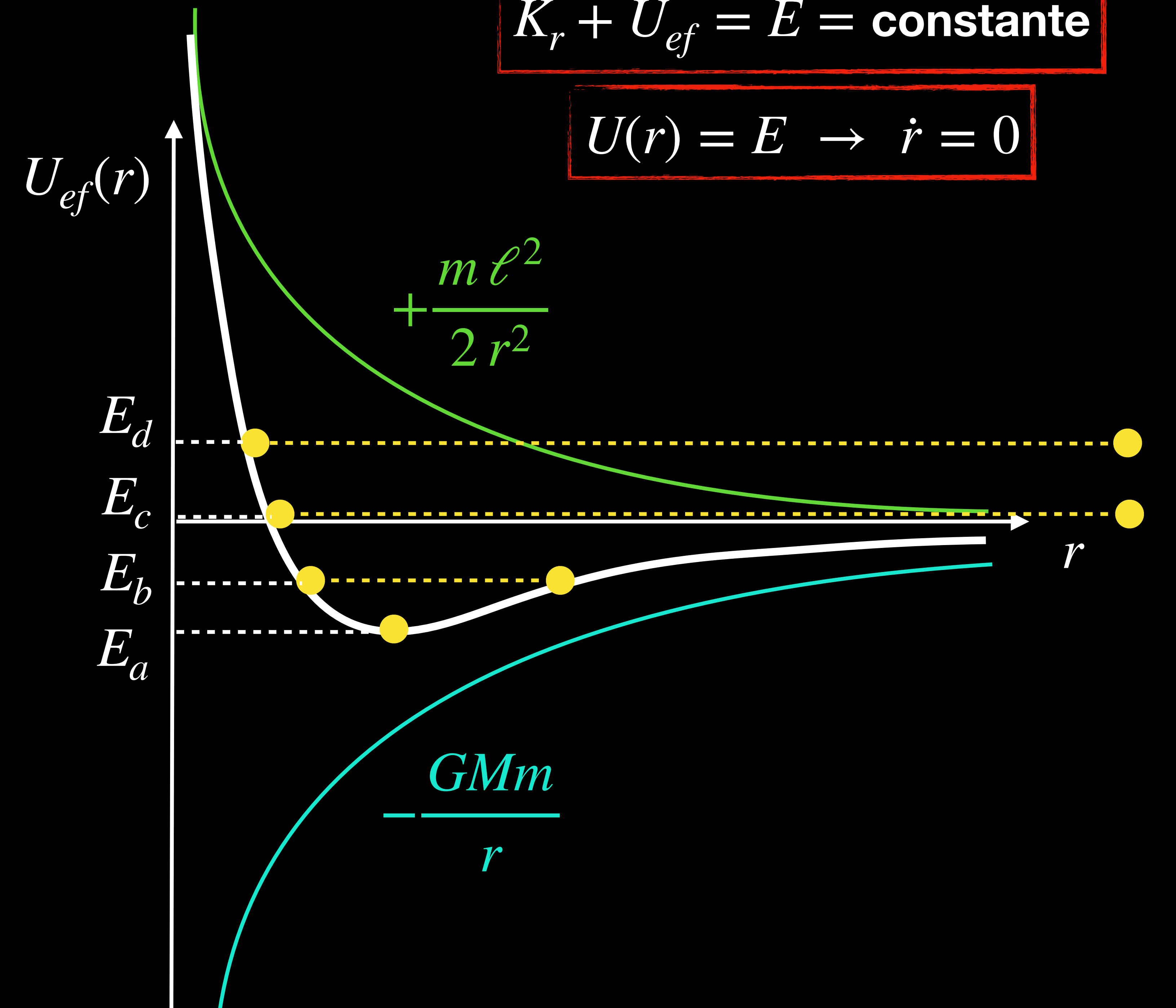
$$\boxed{U(r) = E \;\rightarrow\; \dot{r} = 0}$$

(a) Órbita circular

(b) Órbita elíptica

(c) Trajetória parabólica

(d) Trajetória hiperbólica



Física I

Fim da Aula 3

Próxima aula:

Momento angular