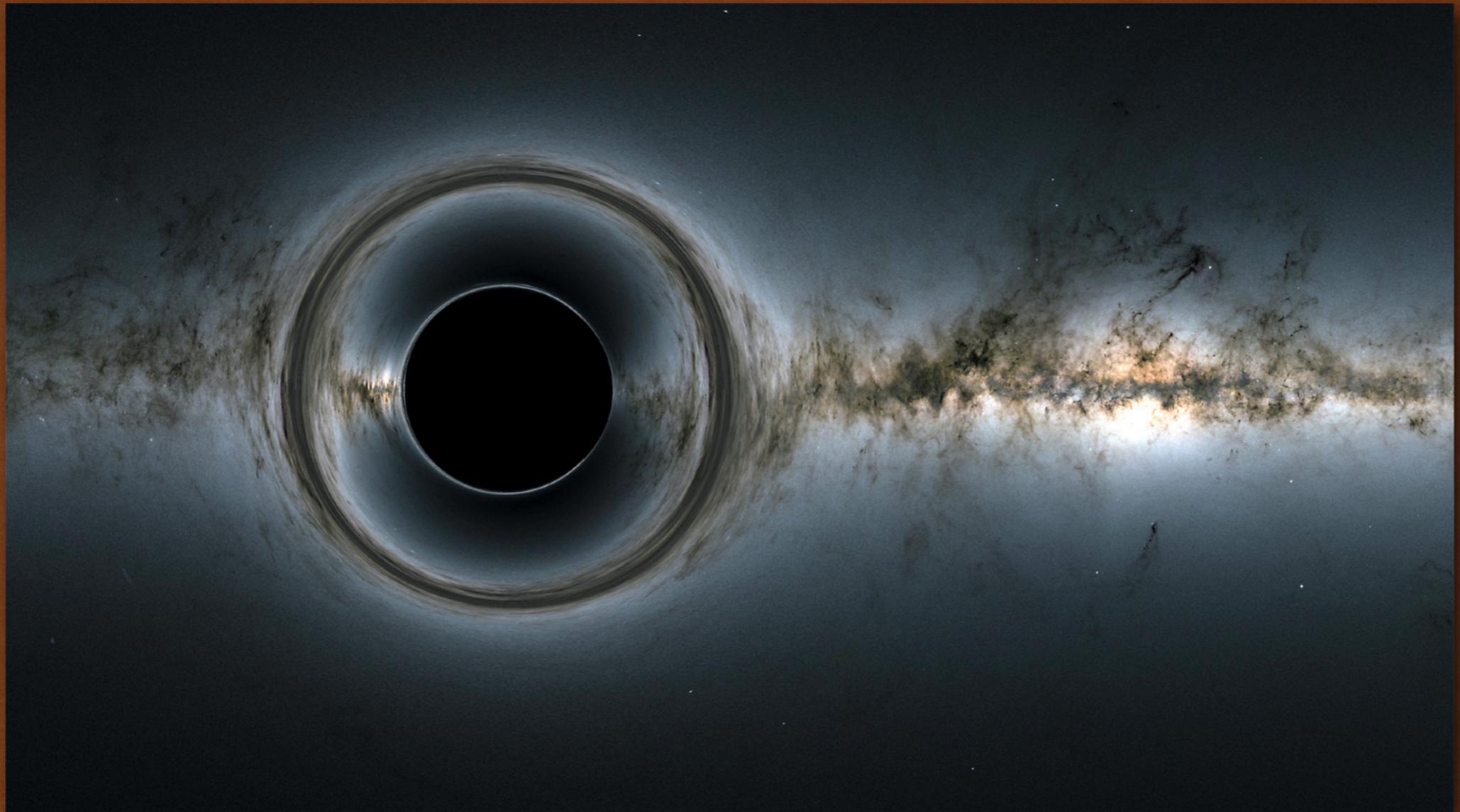


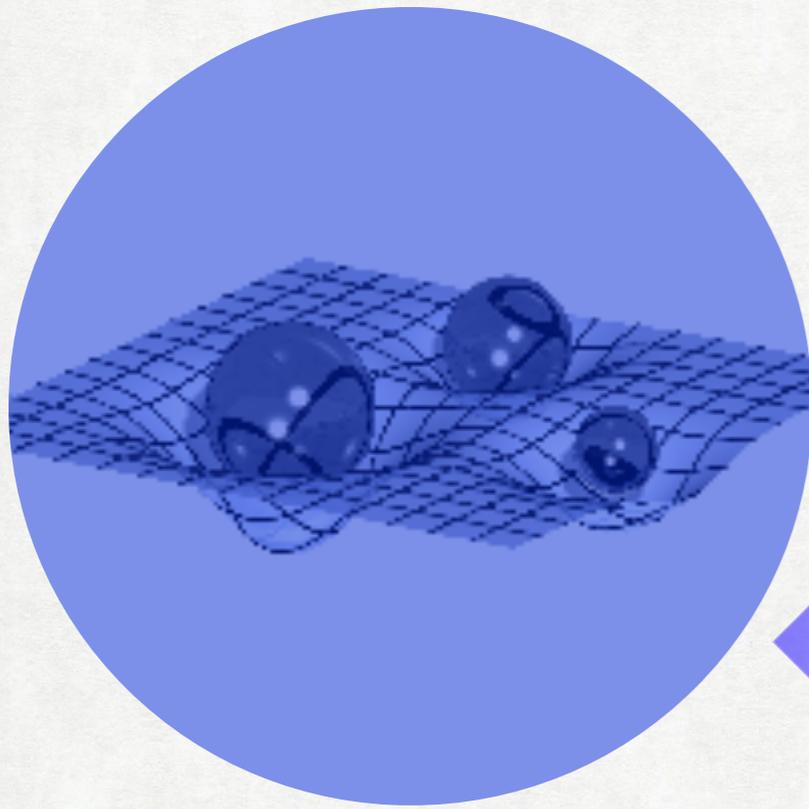
INTRODUÇÃO À



RELATIVIDADE

## AULA 17 - 06/05/2020

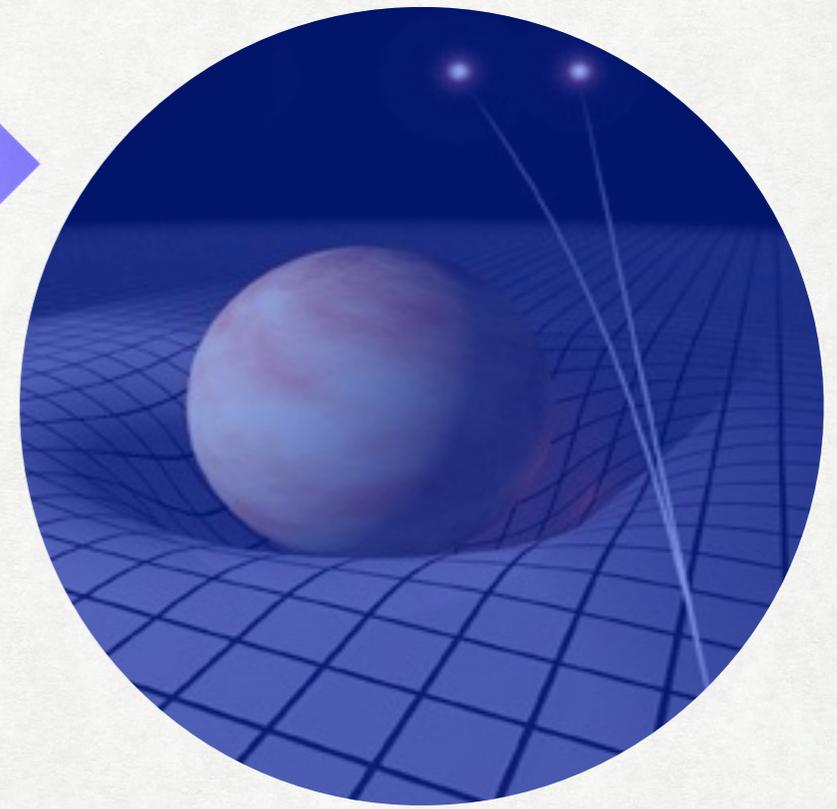
- Órbitas no espaço-tempo de Schwarzschild
- Testes da gravidade I: o desvio gravitacional da luz e as lentes gravitacionais
- Testes da gravidade II: a precessão do periélio de Mercúrio
- **Leitura: Capítulo 5 do Carroll**

UNIDADES "NATURAIS":  $c = 1$ 

A matéria curva o espaço-tempo,  
e determina a métrica...

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

... enquanto a métrica determina  
como a matéria se move.



Estamos usando unidades tais que  $c = 1$ . Sempre que aparecer "tempo", temos que nos lembrar que esse "tempo" é na verdade  $ct$ , que tem dimensões de distância. A *velocidade*, nessas unidades, é *adimensional*. Para recobrar a velocidade "real", basta tomar  $v(\text{km/s}) = v_{(c=1)} \times c$ .

Frequentemente vocês terão que "colocar" fatores de  $c$  nas fórmulas, para chegar no valor no SI. Em particular, sempre que aparecer um "s", multiplique por  $c$ .

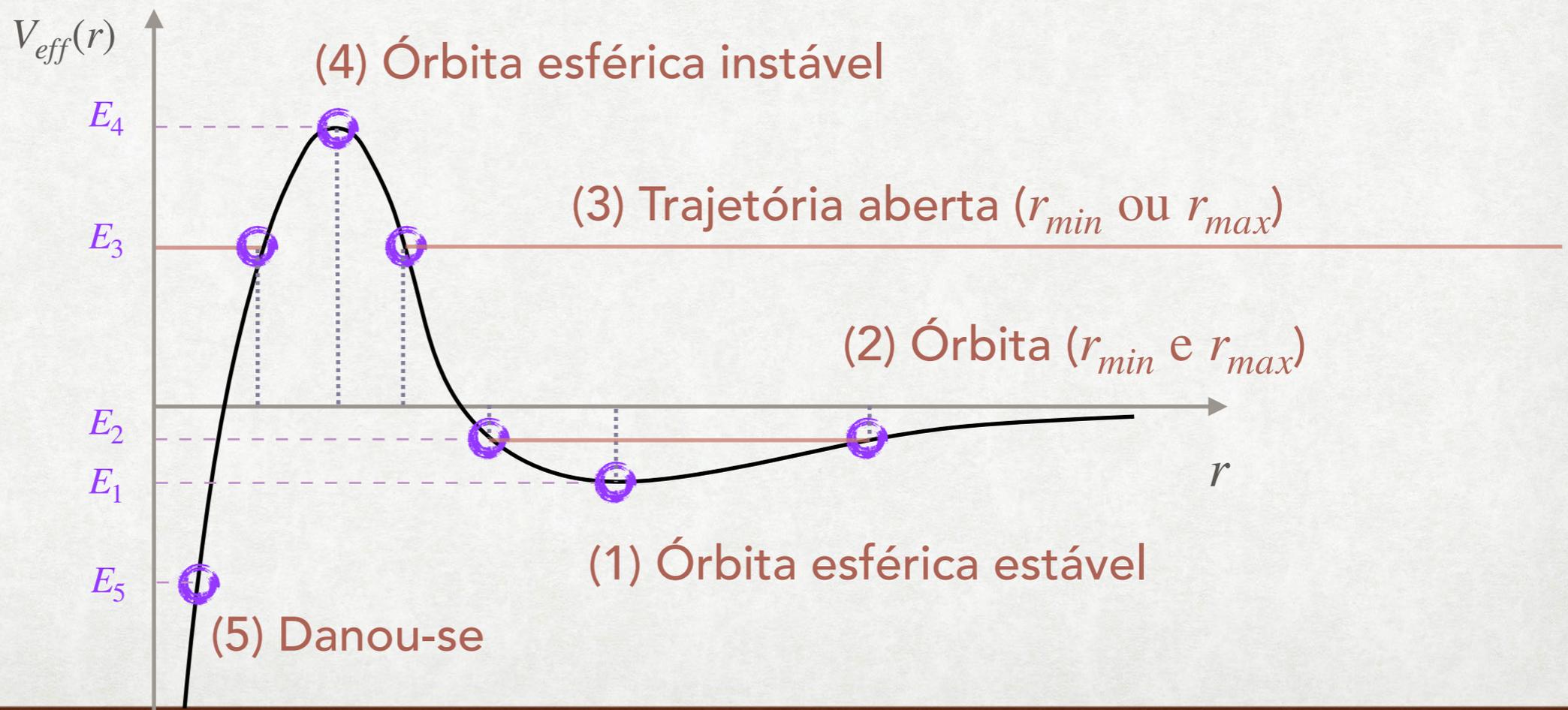
# TRAJETÓRIAS NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- A métrica de Schwarzschild, que estamos estudando, tem a forma:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 ,$$

onde  $R_S = 2GM$  é o *raio de Schwarzschild*.

- Na aula passada vimos que as trajetórias podem ser descritas em termos de um *potencial efetivo*:



# TRAJETÓRIAS NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Na aula passada também vimos que as trajetórias podem ser obtidas integrando diretamente o elemento de distância  $ds^2$ , ao invés de resolver a Equação da Geodésica.
- O resultado obtido foi:

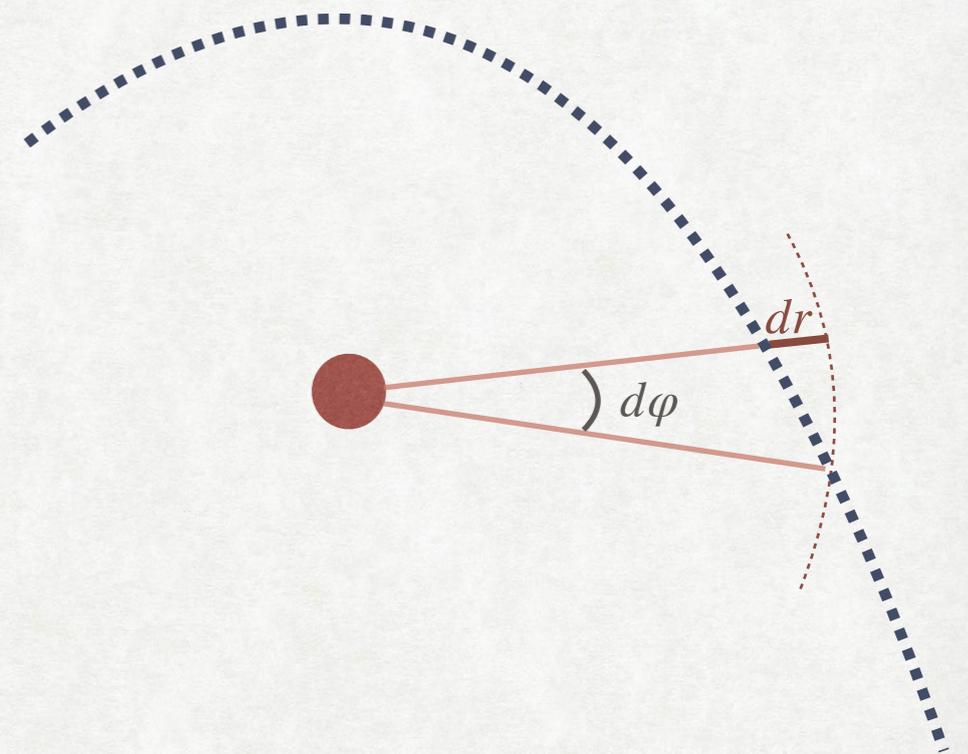
$$\varphi(r) = \int dr \frac{j}{\sqrt{r^4 C^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r^2 (j^2 + u^2 r^2)}} ,$$

onde as constantes são:

A.  $j \iff$  *momento angular*

B.  $C^2 - 1 = 2E \iff$  *energia*  $> -1/2$  ,  $C^2 > 0$

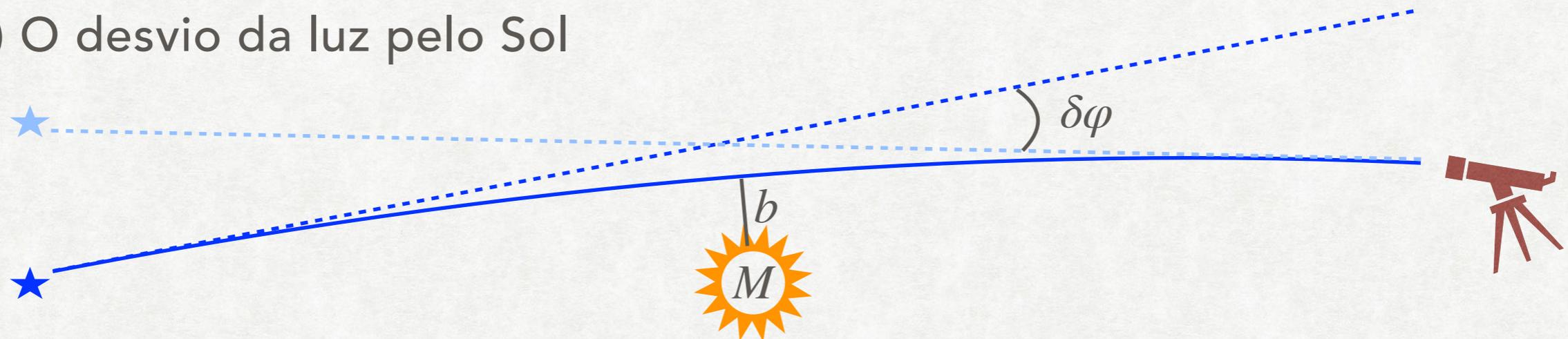
C.  $u^2 = 1$  se  $m \neq 0$  , ou  $u^2 = 0$  se  $m = 0$  (luz)



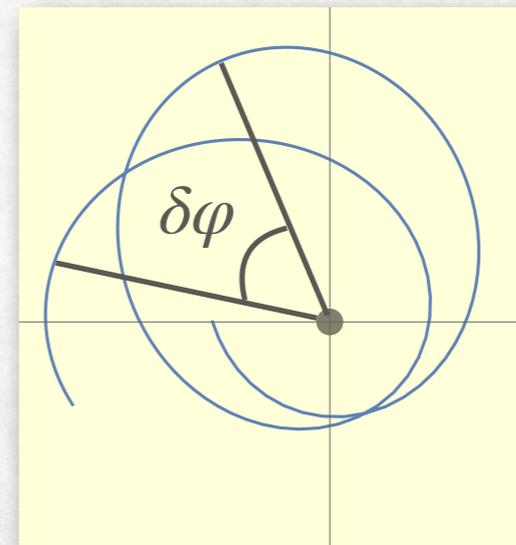
# TRAJETÓRIAS NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Nesta aula vamos discutir dois casos de trajetórias que tiveram um papel fundamental no estabelecimento da Relatividade Geral como a teoria padrão da gravitação:

- (a) O desvio da luz pelo Sol



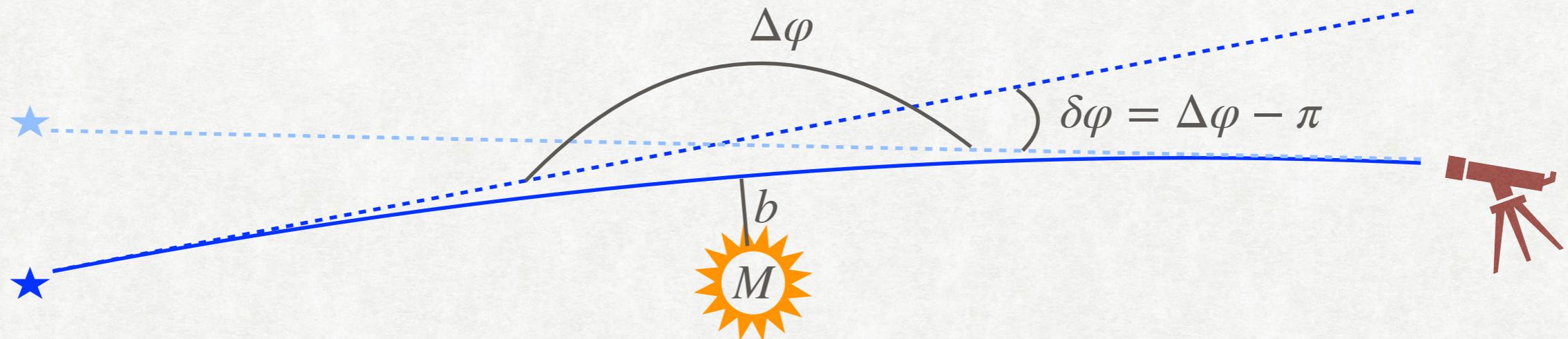
- (b) A precessão do periélio de Mercúrio



# TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL:

## 1 - O DESVIO DA LUZ

- Vamos calcular a **deflexão** de um raio de luz que é gerada pela presença de um corpo de massa  $M$ , como na figura abaixo:

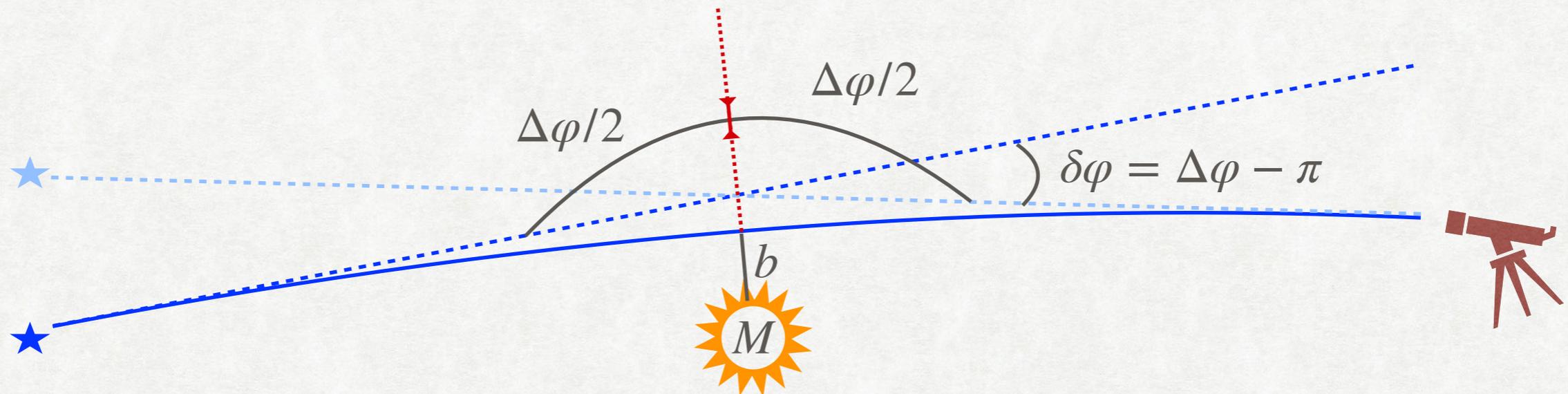


- Na aula passada vimos que o movimento é determinado pela integral:

$$\Rightarrow \varphi(r) = \int dr \frac{1}{\sqrt{r^4 \frac{C^2}{j^2} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r^2 \left(1 + \frac{u^2}{j^2} r^2\right)}}$$

# TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL: 1 - O DESVIO DA LUZ

- Vamos calcular a *deflexão* de um raio de luz que é gerada pela presença de um corpo de massa  $M$ , como na figura abaixo:



- Na aula passada vimos que o movimento é determinado pela integral:

$$\Rightarrow \Delta\varphi = 2 \int_b^{\infty} dr \frac{1}{\sqrt{r^4 \frac{C^2}{j^2} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r^2 \left(1 + \frac{u^2}{j^2} r^2\right)}}, \quad u^2 = 0 \text{ (fótons)}$$

# TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL:

## 1 - O DESVIO DA LUZ

- Para raios de luz, portanto, temos:

$$\frac{1}{2}\Delta = \int_b^{\infty} dr \frac{1}{\sqrt{r^4 \frac{C^2}{j^2} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r^2}}$$

- Note que, como  $dr/d\lambda = 0 = dr/d\varphi$  quando  $r = b$ . Mas nesse ponto:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = C^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \frac{j^2}{r^2} \implies 0 = \frac{C^2}{j^2} - \left(1 - \frac{R_S}{b}\right) \frac{1}{b^2}$$

- Portanto, substituindo essa constante obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta = \int_b^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{R_S}{b}\right) \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \frac{1}{r^2}}},$$

o que é uma integral chatinha de resolver. Mas é possível!

# TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL:

## 1 - O DESVIO DA LUZ

- Vamos introduzir a variável adimensional  $x = r/b$ , e vamos assumir que o ponto de máxima aproximação é muito maior que o raio de Schwarzschild,  $x_S = R_S/b \ll 1$ . Temos então:

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi = \int_1^\infty \frac{dx}{x} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{1 - x_S - \frac{x_S}{x(1+x)}}}$$

- Agora, a última raiz quadrada é bem comportada quando  $x \rightarrow 1$ . Podemos então expandir essa expressão usando  $x_S \ll 1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x_S - \frac{x_S}{x(1+x)}}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left( x_S + \frac{x_S}{x(1+x)} \right) + \dots$$

- Portanto, obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi = \int_1^\infty \frac{dx}{x} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \left[ 1 + \frac{1}{2}x_S + \frac{1}{2} \frac{x_S}{x(1+x)} + \dots \right]$$

# TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL:

## 1 - O DESVIO DA LUZ

- Temos aqui duas integrais:

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi = \left(1 + \frac{1}{2}x_S\right) \int_1^\infty \frac{dx}{x} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x_S}{2} \int_1^\infty \frac{dx}{x} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{x(1+x)} + \dots$$

- A primeira integral é muito fácil de fazer: basta tomar  $x = 1/\sin\theta$  e ver que:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \int_{-\pi/2}^0 (-d\theta) = \frac{\pi}{2}$$

- Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{x+1} &= \left( \frac{(2x+1)(x-1)}{x\sqrt{x^2-1}} + \cot^{-1}\sqrt{x^2-1} \right)_1^\infty \\ &= 2 - 0 + \cot^{-1}(-\infty) - \cot^{-1}(0) \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

# TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL:

## 1 - O DESVIO DA LUZ

- Juntando as duas integrais obtemos que:

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi \simeq \left(1 + \frac{1}{2}x_S\right) \times \frac{\pi}{2} + \frac{x_S}{2} \times \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

- Ou seja, obtivemos que:

$$\Delta\varphi = \pi + 2x_S = \pi + 2\frac{R_S}{b}$$

- Em outras palavras, determinamos que o desvio sofrido por um raio de luz ao passar próximo de um corpo de massa  $M$  é dado por:

$$\delta\varphi = \frac{4GM}{c^2b}, \quad \text{onde } b \text{ é o ponto de máxima aproximação do raio de luz.}$$

- É fácil ver (*exercício!*) que o resultado "clássico", obtido ao negligenciar o termo  $1/r^3$  do potencial efetivo, é dado por:

$$\delta\varphi_{\text{Class.}} = \frac{2GM}{c^2b}, \quad \text{ou seja, } \textit{metade} \text{ do resultado que se espera na Relatividade Geral!}$$

# TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL:

## 1 - O DESVIO DA LUZ

- No caso específico do Sol, temos que

$$R_S \rightarrow 2.95 \text{ km} \quad ,$$

enquanto o próprio raio do Sol é:

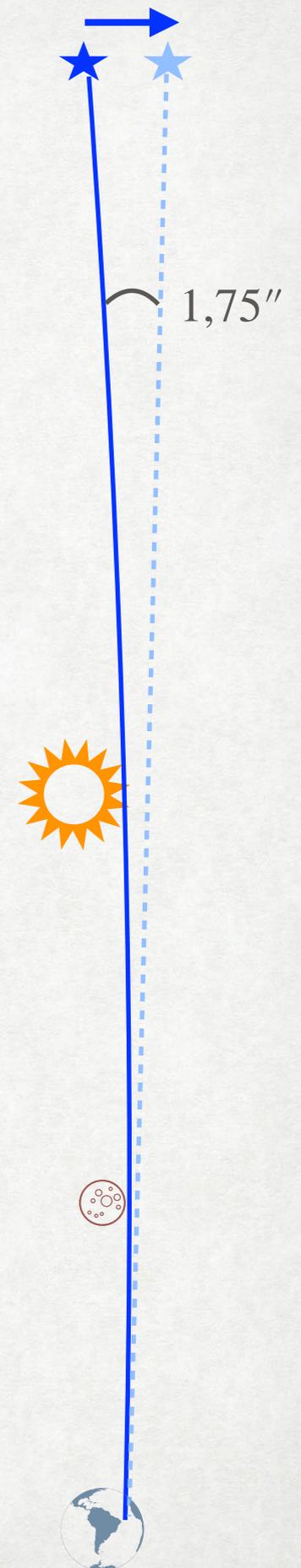
$$b \rightarrow R_{\odot} = 6,95 \times 10^5 \text{ km}$$

- Portanto, se a Relatividade Geral estivesse certa, então uma estrela que surja exatamente por trás do Sol deveria ter um desvio angular de:

$$\delta\varphi = \frac{2R_S}{R_{\odot}} = 9,916 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1,75''$$

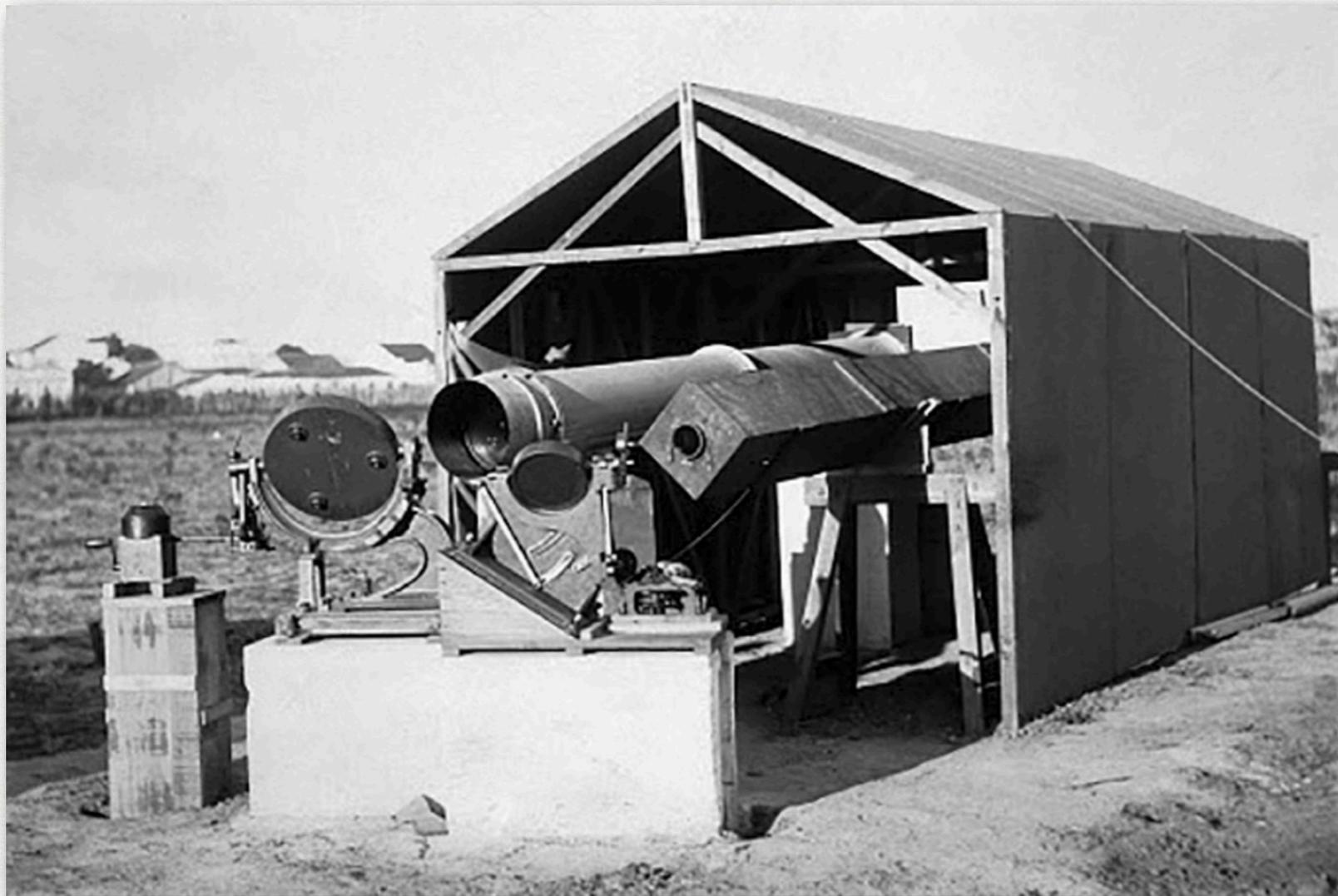
- Esse foi o *primeiro teste experimental da Relatividade Geral*, feito em 1919 por um time de astrônomos liderado por Arthur Eddington e Frank Dyson.
- Eles se aproveitaram de um *eclipse solar* para observar estrelas por trás do Sol. A posição dessas estrelas deveria estar desviada segundo a fórmula acima,

$$\delta\varphi = 1,75'' \times \frac{R_{\odot}}{b}$$

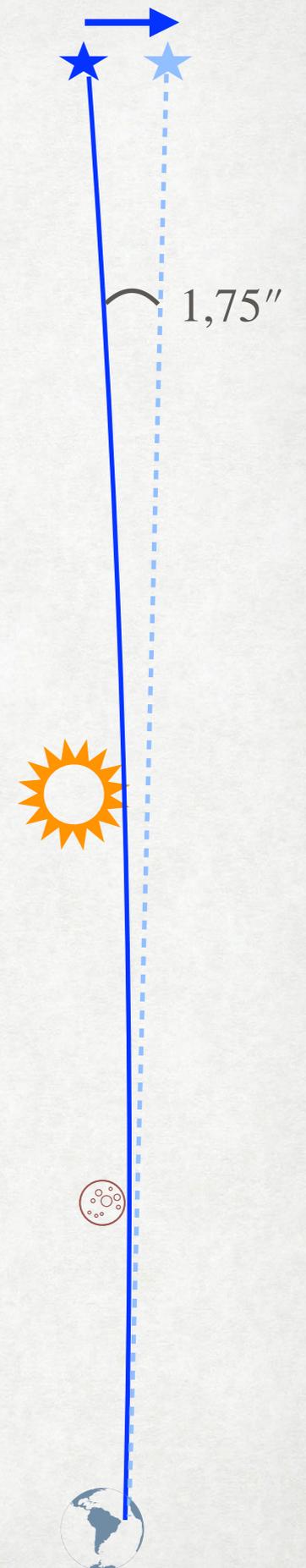


# TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL: 1 - O DESVIO DA LUZ

- A equipe se dividiu em dois times: um foi para Sobral, no Ceará; e o outro foi para a ilha de Príncipe, na costa ocidental da África.

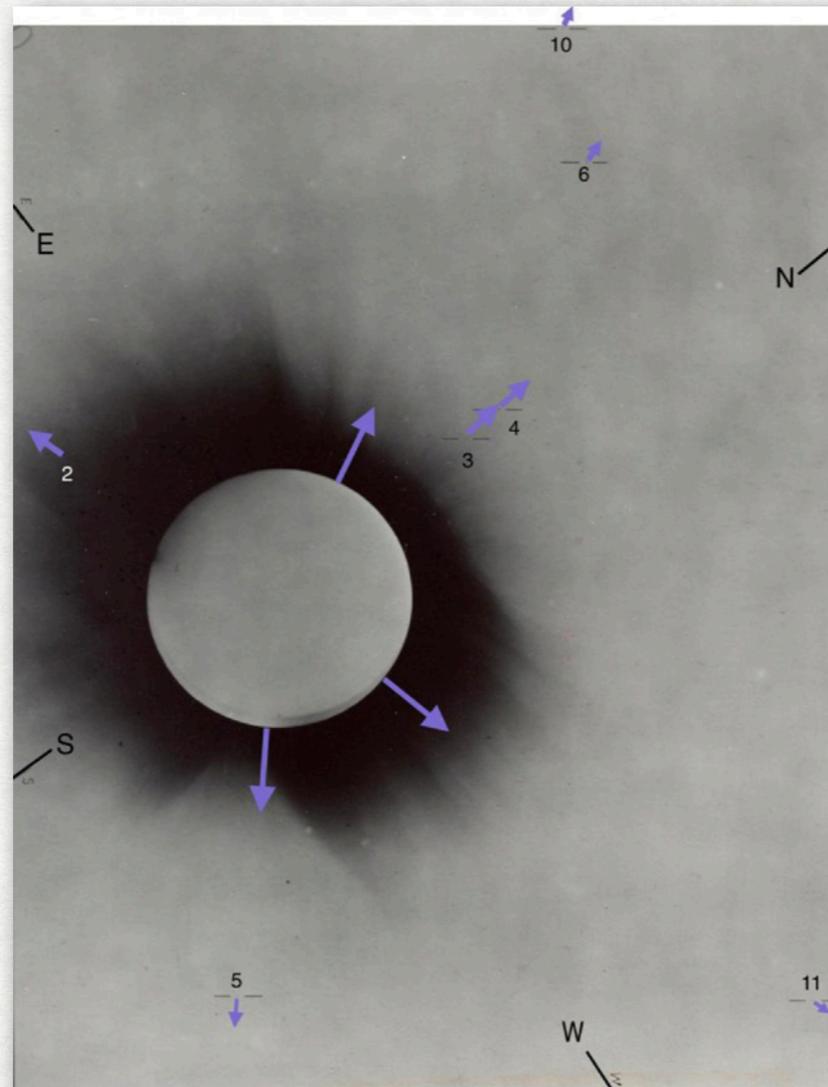


Telescópios da equipe de F. Dyson levados a Sobral (CE)

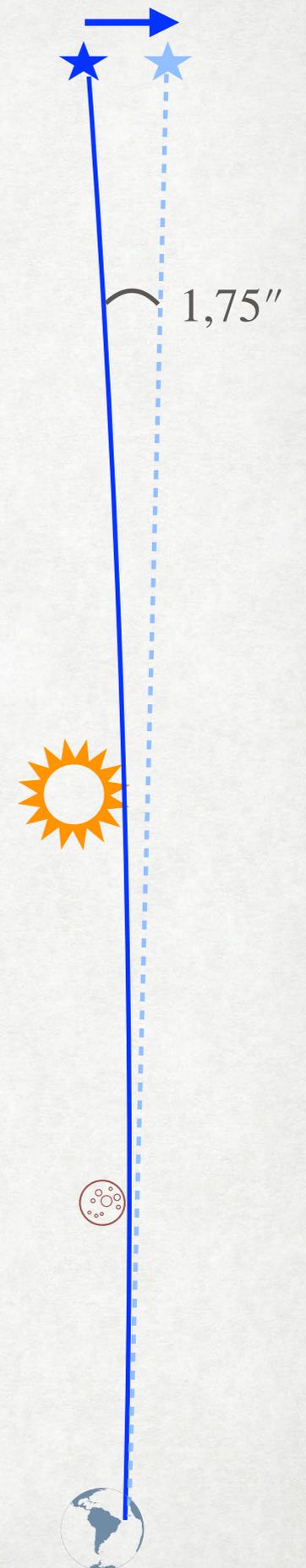


# TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL: 1 - O DESVIO DA LUZ

- A equipe se dividiu em dois times: um foi para Sobral, no Ceará; e o outro foi para a ilha de Príncipe, na costa ocidental da África.

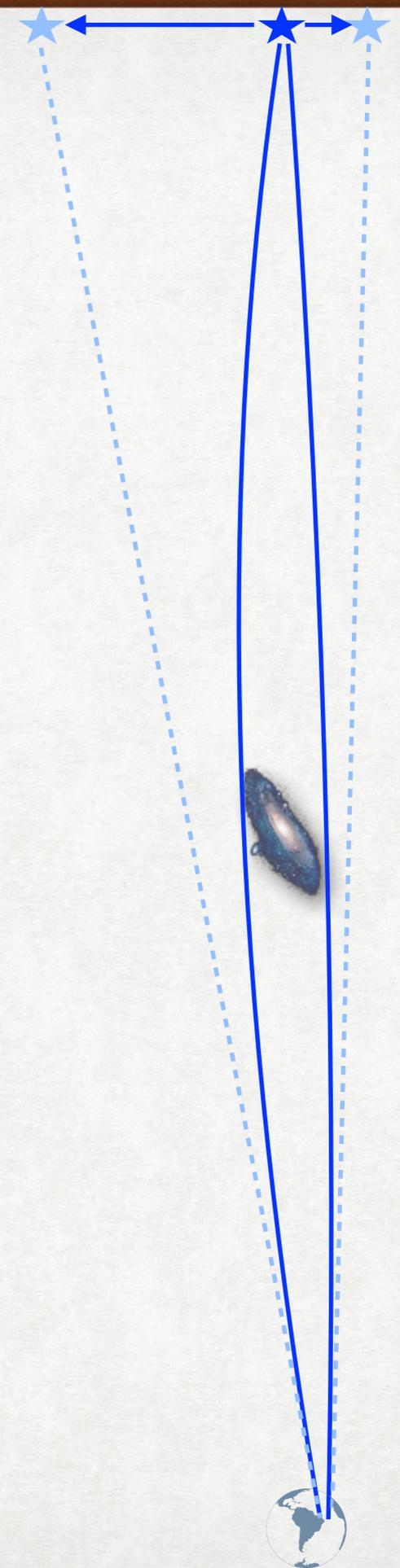


Algumas das estrelas usadas para testar o desvio da luz



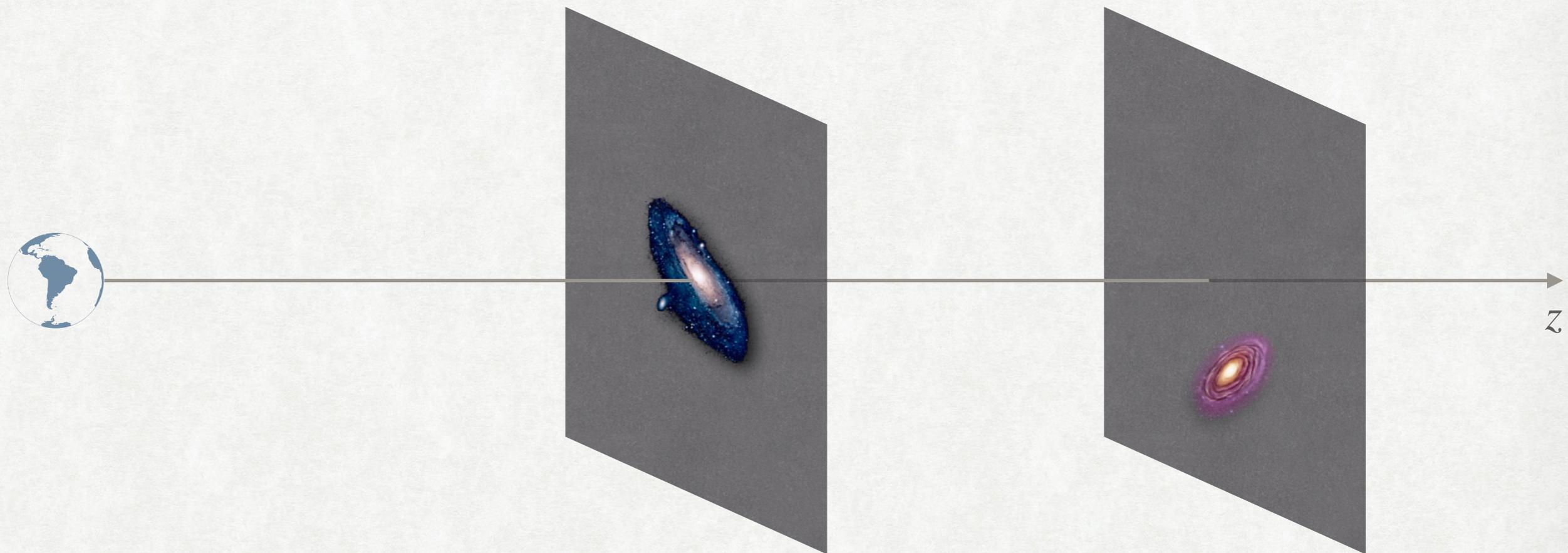
# LENTEs GRAVITACIONAIS

- Mas o Sol é apenas uma estrelinha qualquer... O universo, por outro lado, está cheio de objetos com massas muito maiores.
- Por exemplo, existem *galáxias* cujas massas ultrapassam  $10^{13} M_{\odot}$ . Além delas, existem *aglomerados de galáxias* de massa  $> 10^{15} M_{\odot}$  !
- Apesar desses objetos não serem esféricos, essa ainda é uma boa aproximação!
- Essas galáxias e aglomerados *desviam* a luz de objetos no fundo ("imagens"), agindo como *lentes gravitacionais*. Um exemplo disso são as *imagens múltiplas* dos mesmos objetos.



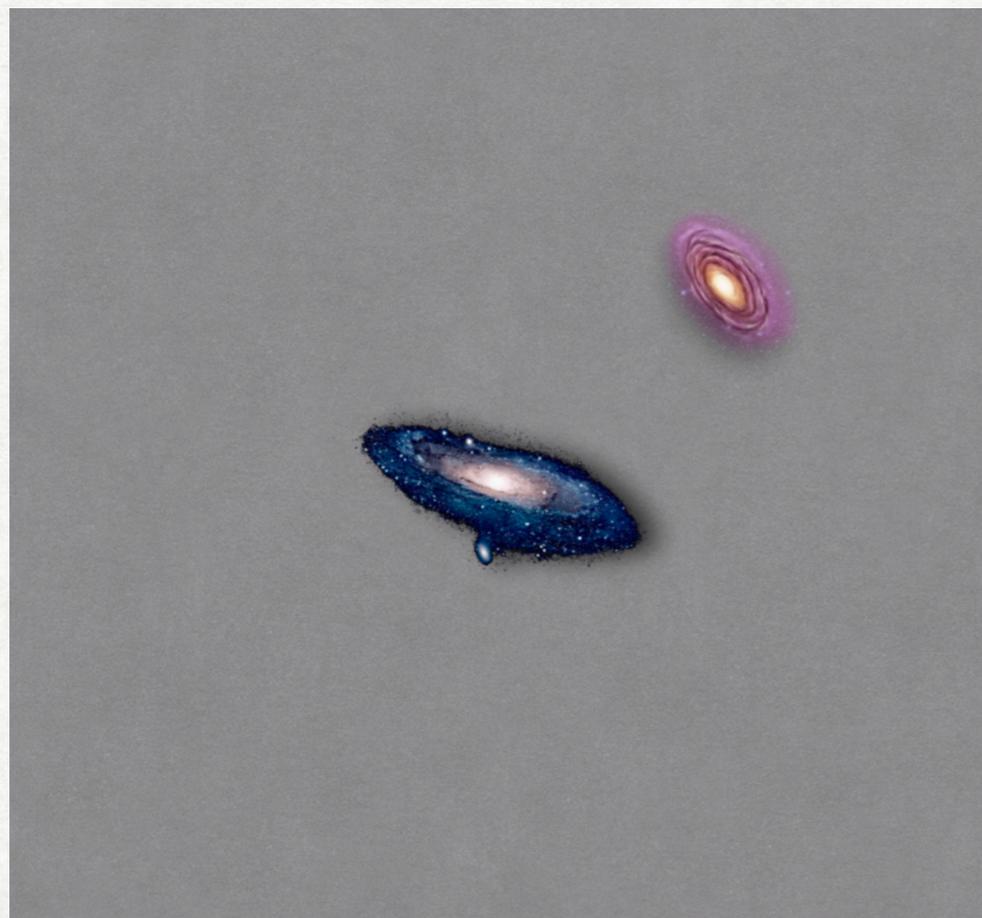
# LENTEs GRAVITACIONAIS

- Vamos projetar tudo num só plano, superpondo o plano da *lente* (tipicamente uma galáxia) e o plano da *imagem* (pode ser uma outra galáxia).

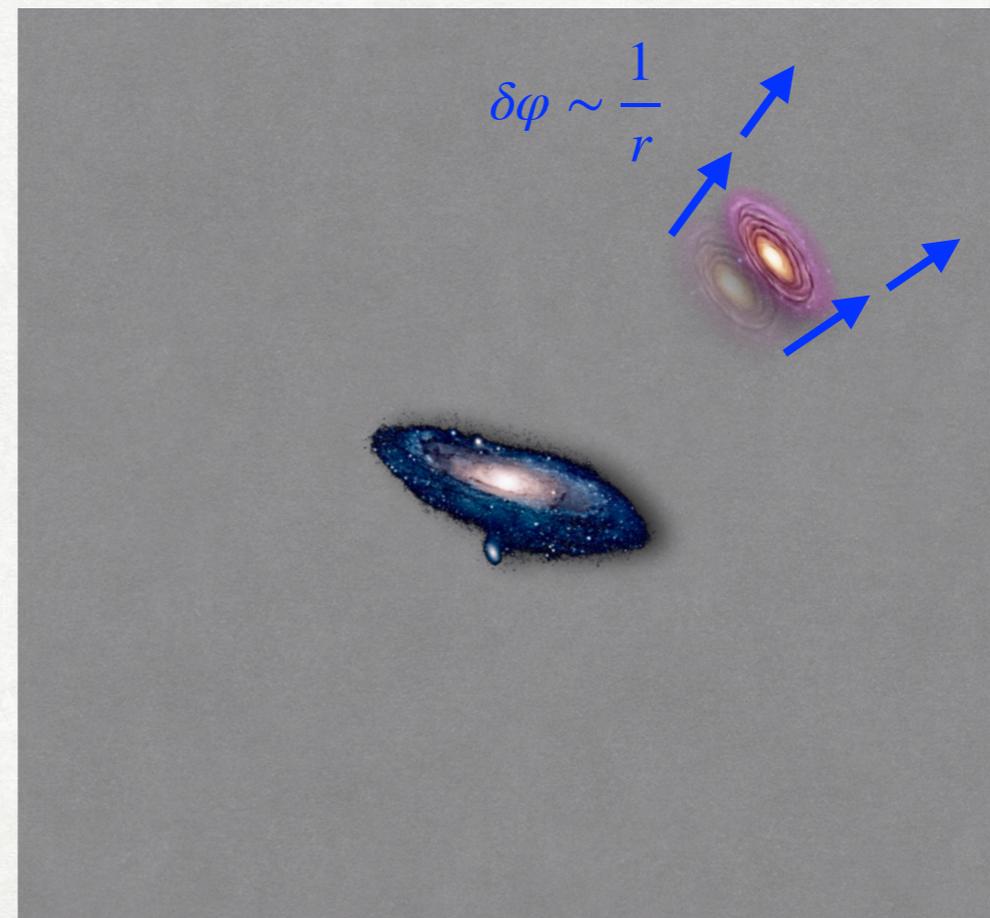


# LENTE GRAVITACIONAL

- Vamos projetar tudo num só plano, superpondo o plano da *lente* (tipicamente uma galáxia) e o plano da *imagem* (pode ser uma outra galáxia). Quando o efeito é "pequeno" temos algo assim:



Posição "real"



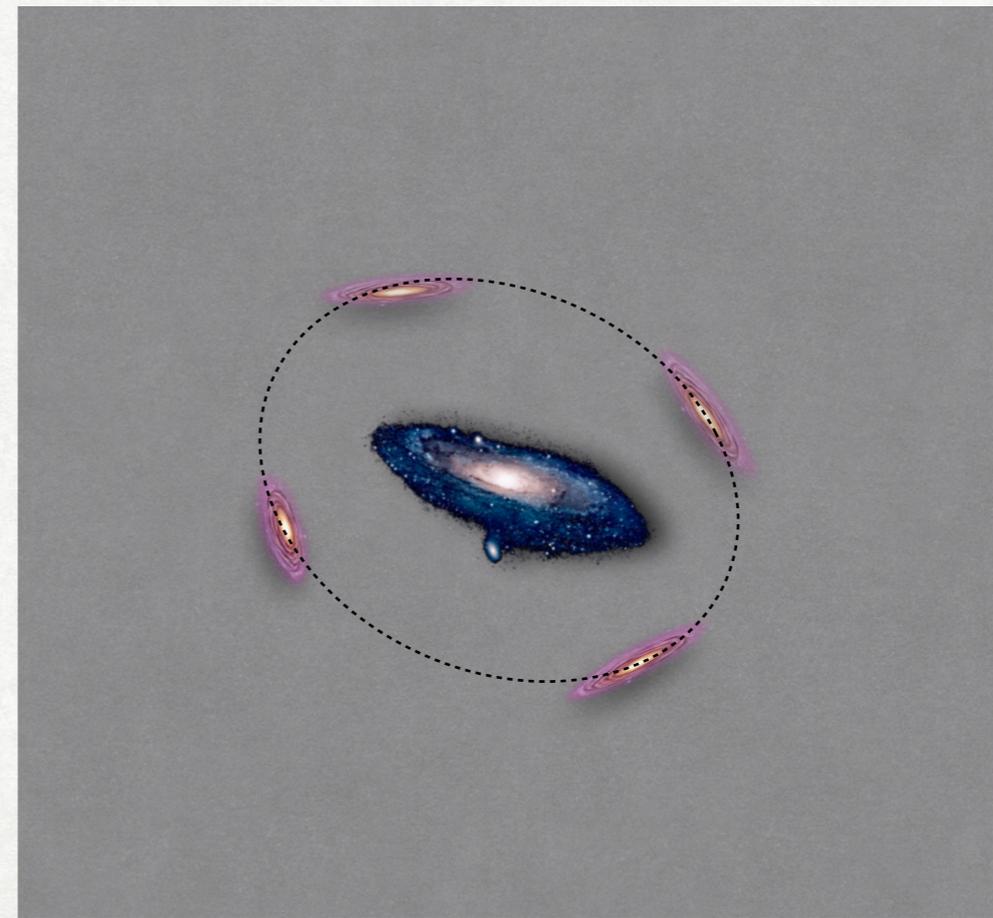
Posição observada

# LENTEs GRAVITACIONAIS

- Quando o efeito é "forte" temos imagens mais dramáticas:



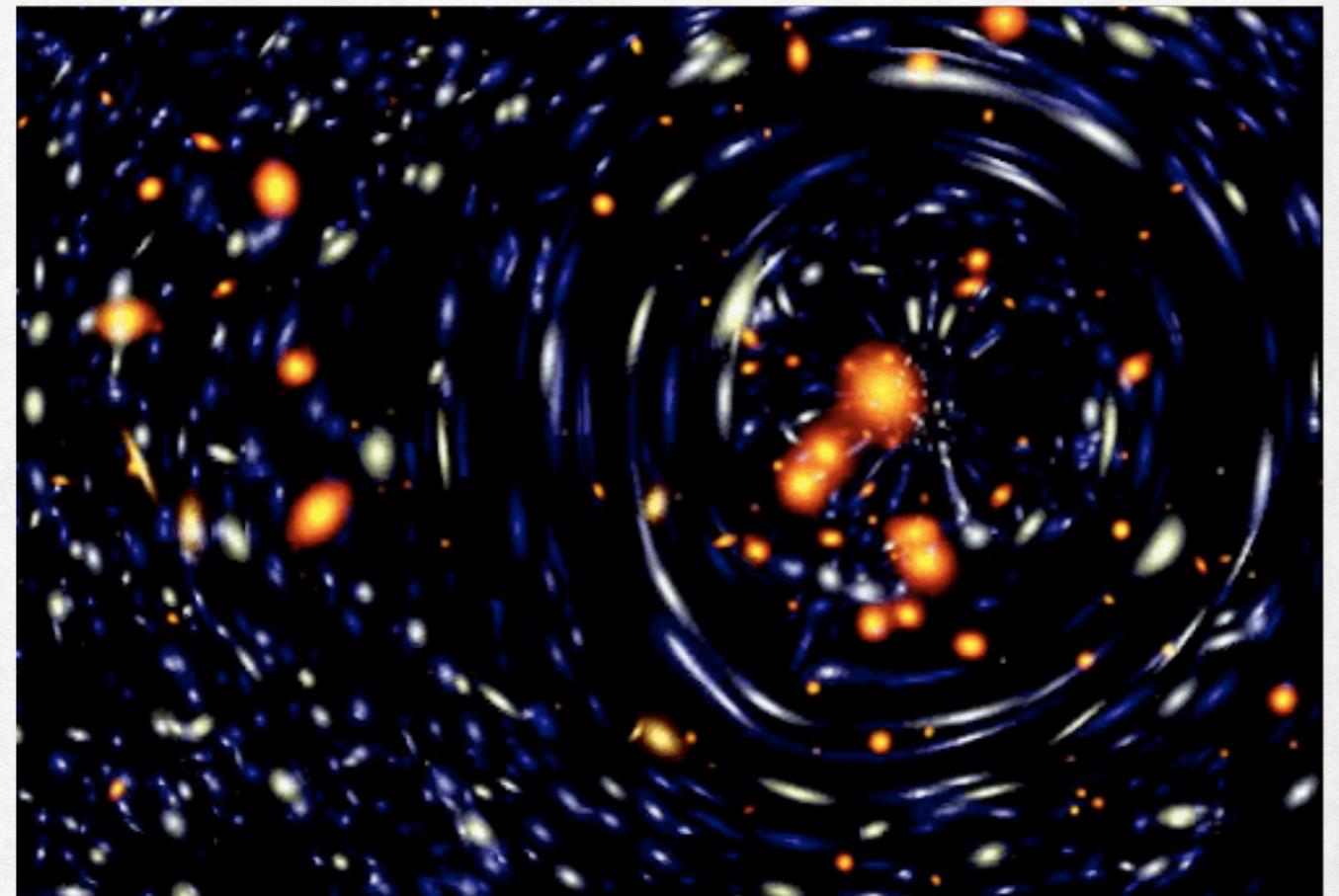
Posição "real"



Posição observada

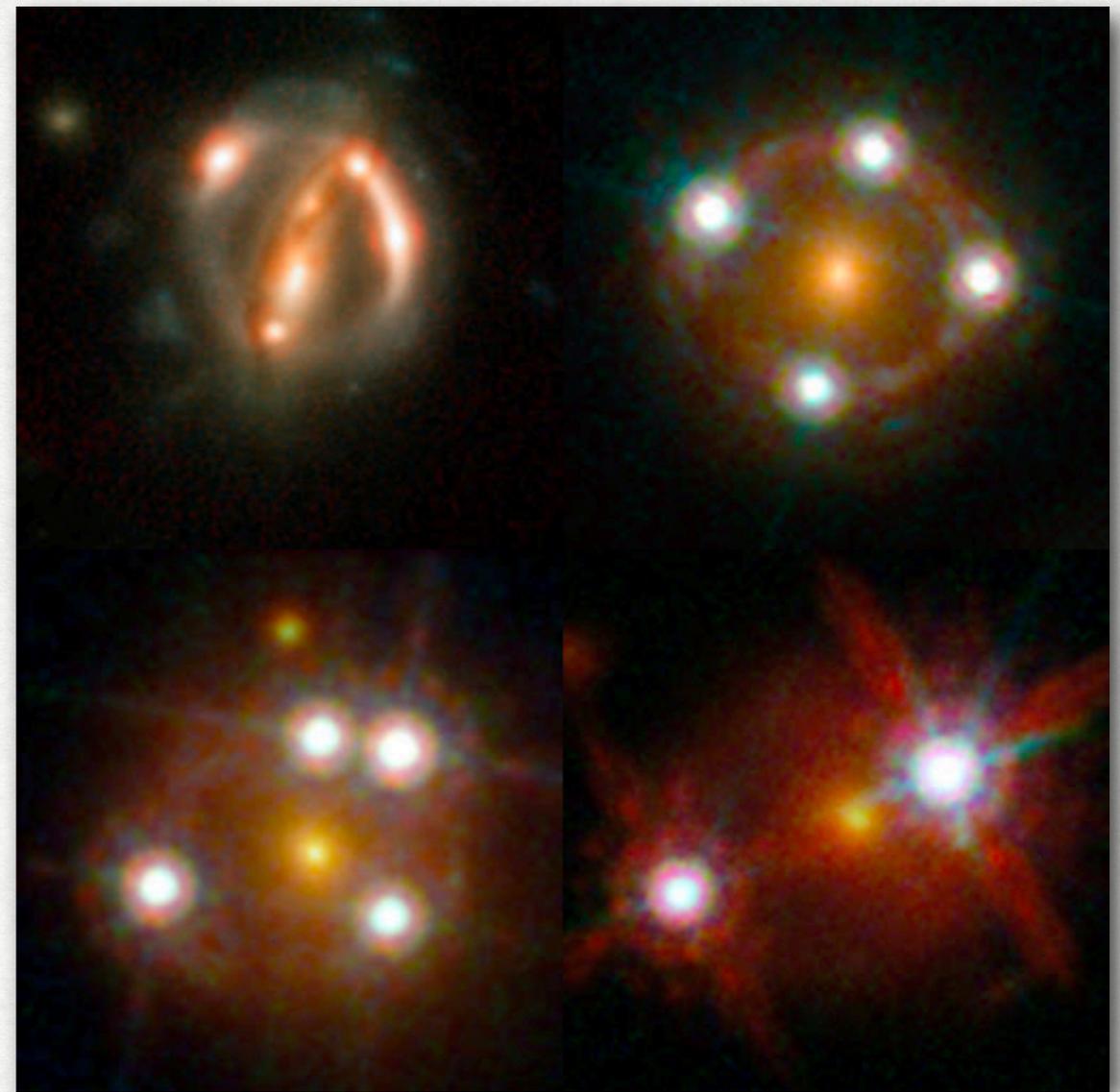
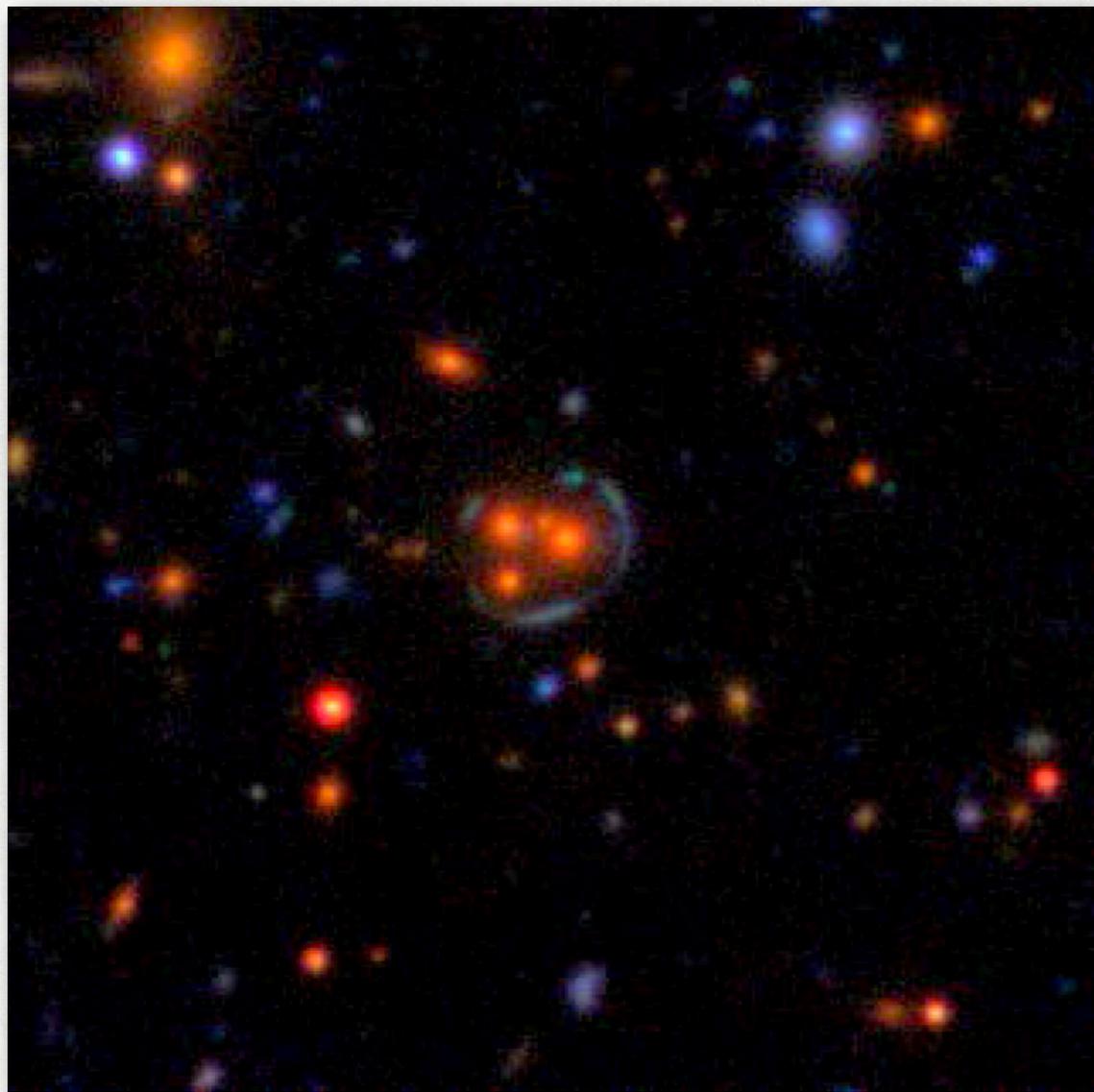
# LENTEs GRAVITACIONAIS

- Duas simulações legais:



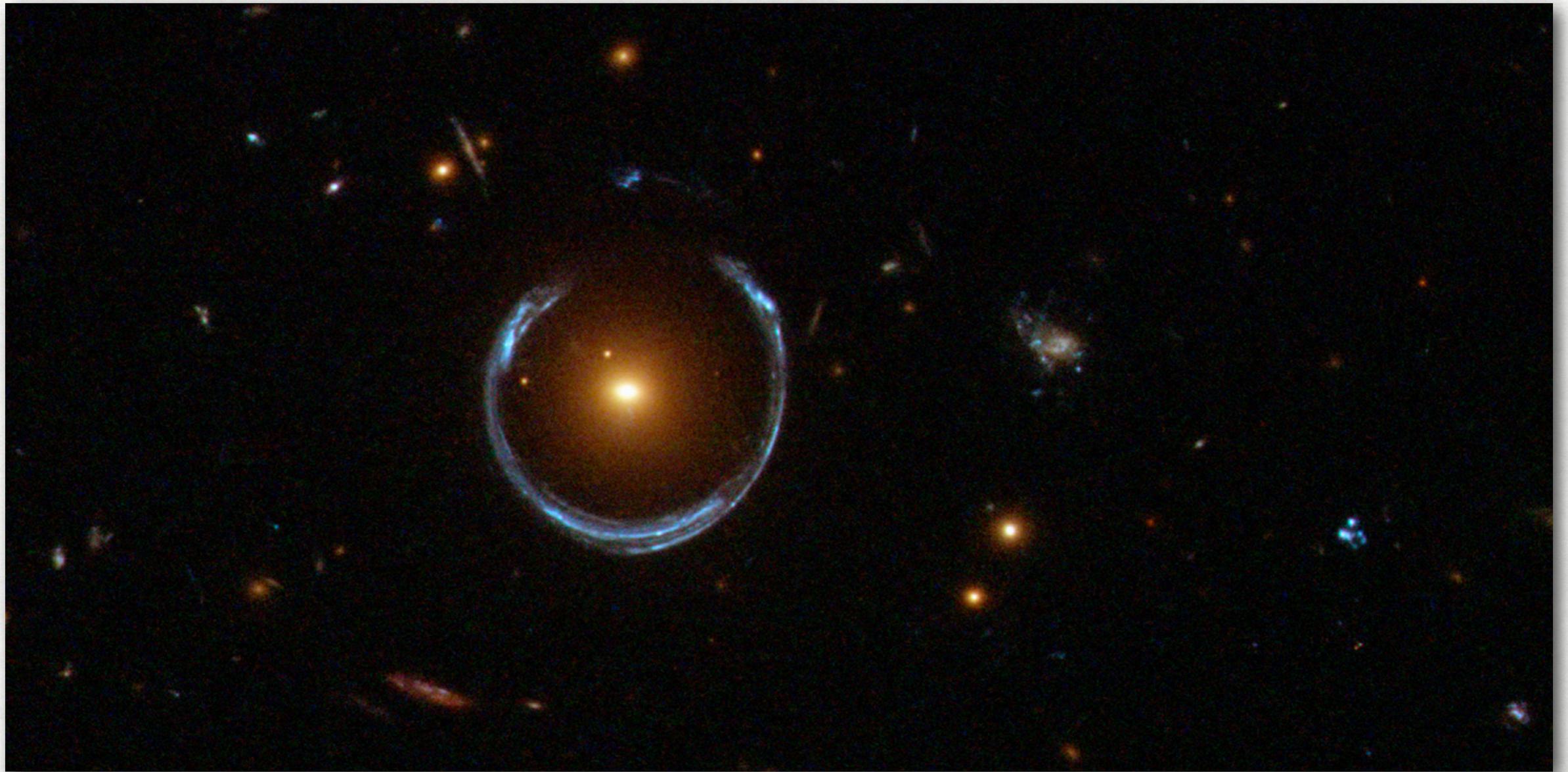
# LENTEs GRAVITACIONAIS

- Algumas imagens reais



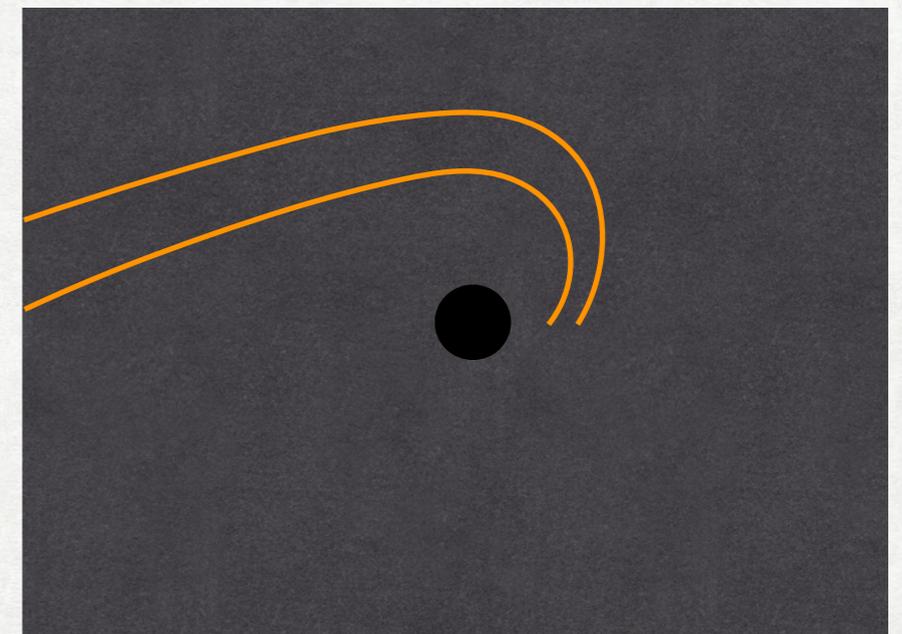
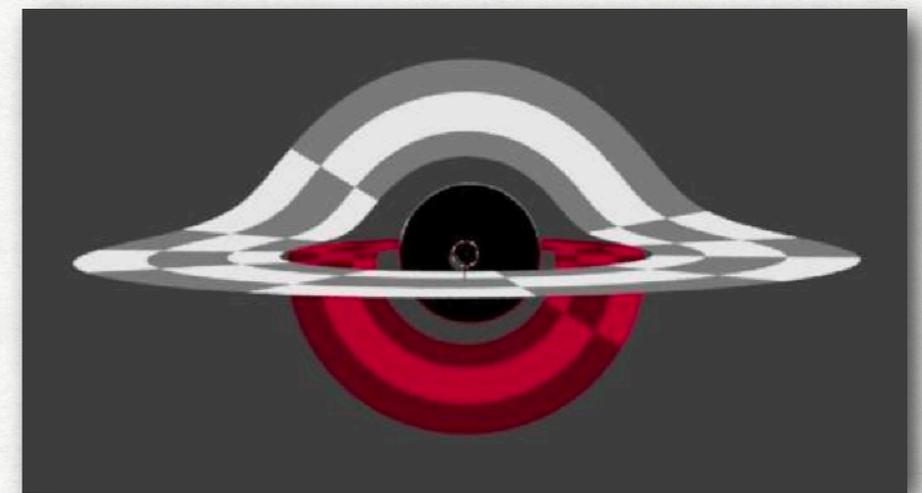
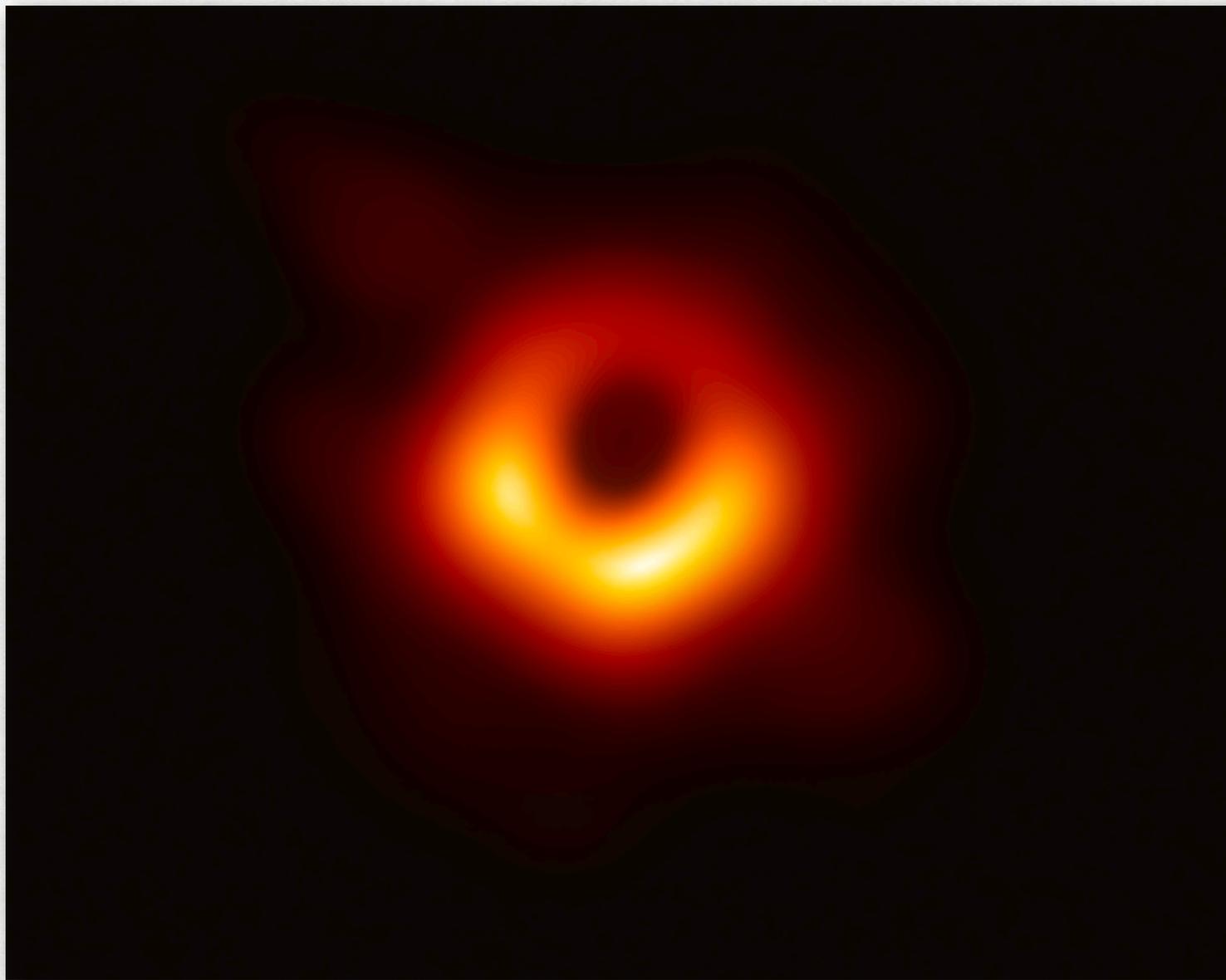
# LENTEs GRAVITACIONAIS

- Algumas imagens reais



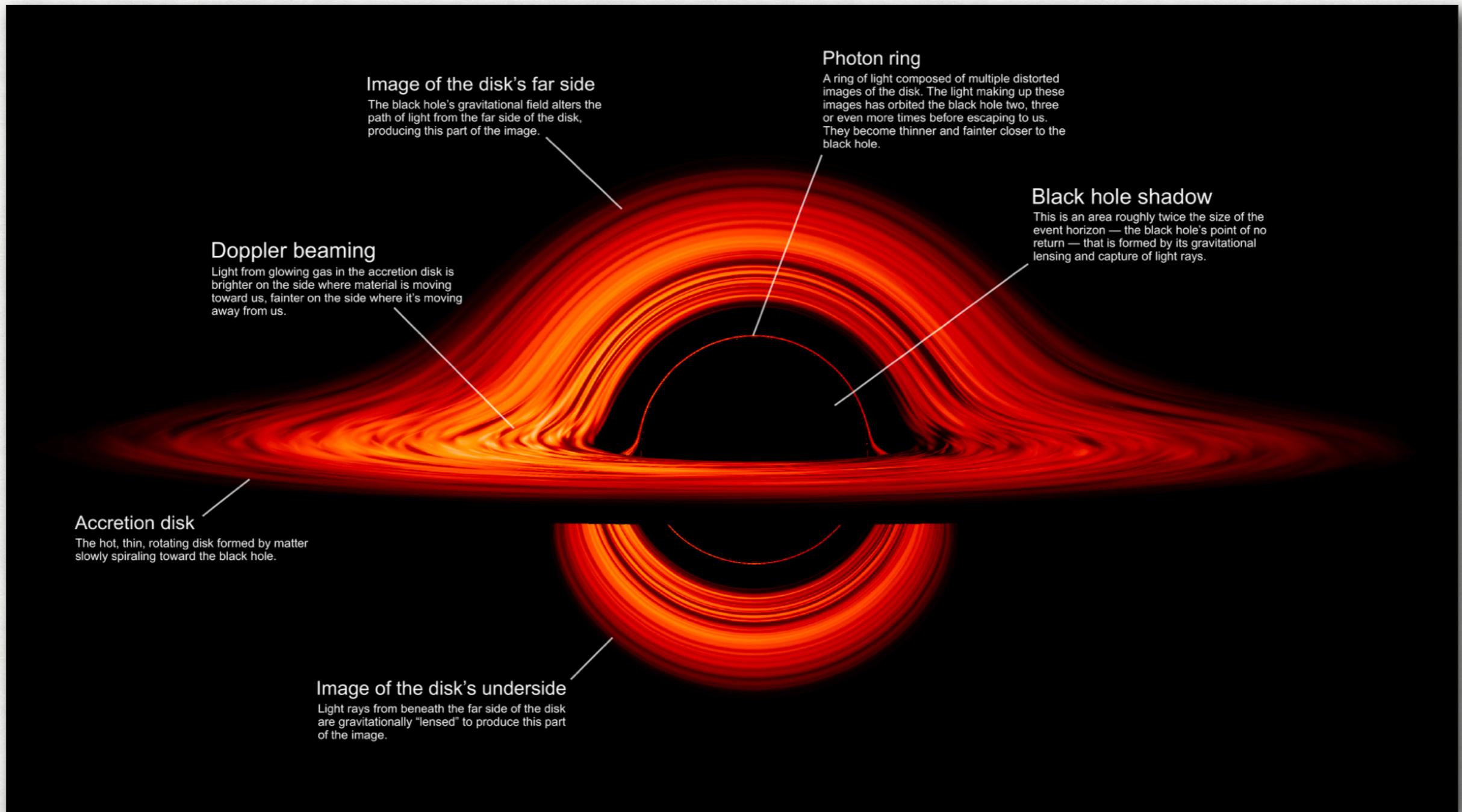
# LENTEs GRAVITACIONAIS

- E, claro, não poderia faltar...



# LENTES GRAVITACIONAIS

- E, claro, não poderia faltar...

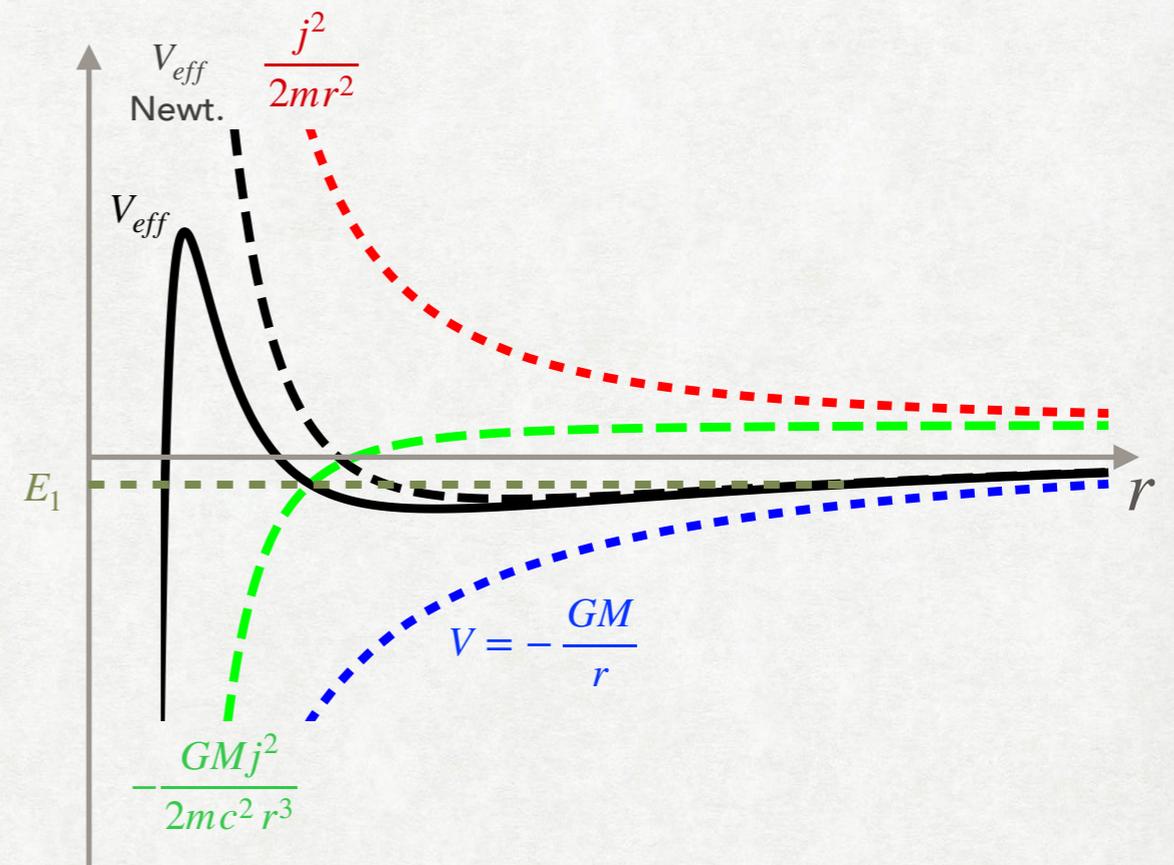
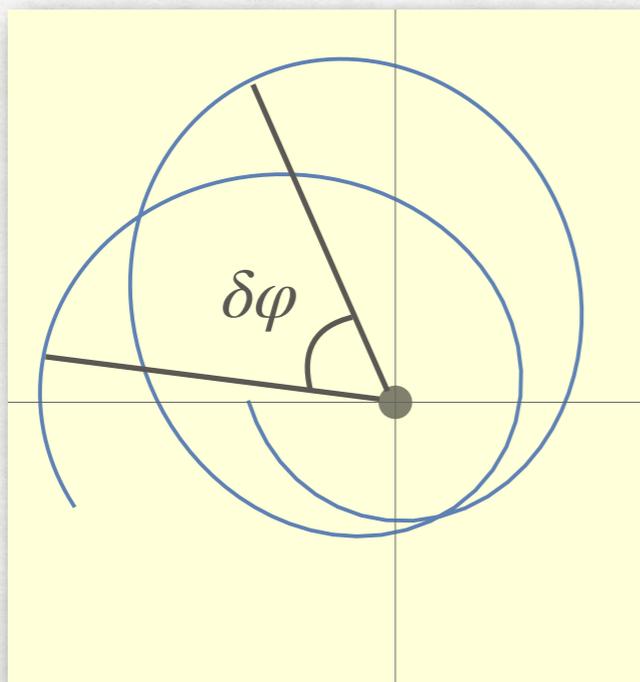


## TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL: 2 - A PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

- Na aula passada vimos que, para o movimento radial num potencial centra, podemos usar a relação  $\dot{r}^2 = 2 \left[ E - V_{eff}(r) \right]$ , onde o potencial efetivo da métrica de Schwarzschild é:

$$V_{eff}(r) = \underbrace{-\frac{GM}{r} + \frac{j^2}{2r^2}}_{\text{Potencial Newtoniano}} \underbrace{-\frac{GMj^2}{r^3}}_{\text{Correção relativística}}$$

- Uma órbita com energia  $E_1$  terá a cara:



## TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL: 2 - A PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

- Nos pontos de mínima e máxima aproximação,  $r_m$ , temos  $dr/dt = dr/d\varphi = 0$ , e portanto  $V_{eff}(r_m) = E = (C^2 - 1)/2$ .
- Portanto, os extremos são raízes de uma **equação cúbica**:

$$E - V_{eff}(r) = E + \frac{1}{2} \frac{R_S}{r} - \frac{1}{2} \frac{j^2}{r^2} \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) = 0 \quad , \quad \text{onde } E \text{ pode ser negativo.}$$

- Equações cúbicas sempre têm **três raízes**, e recaímos nos casos:

(a) **Uma raiz real, duas imaginárias:**

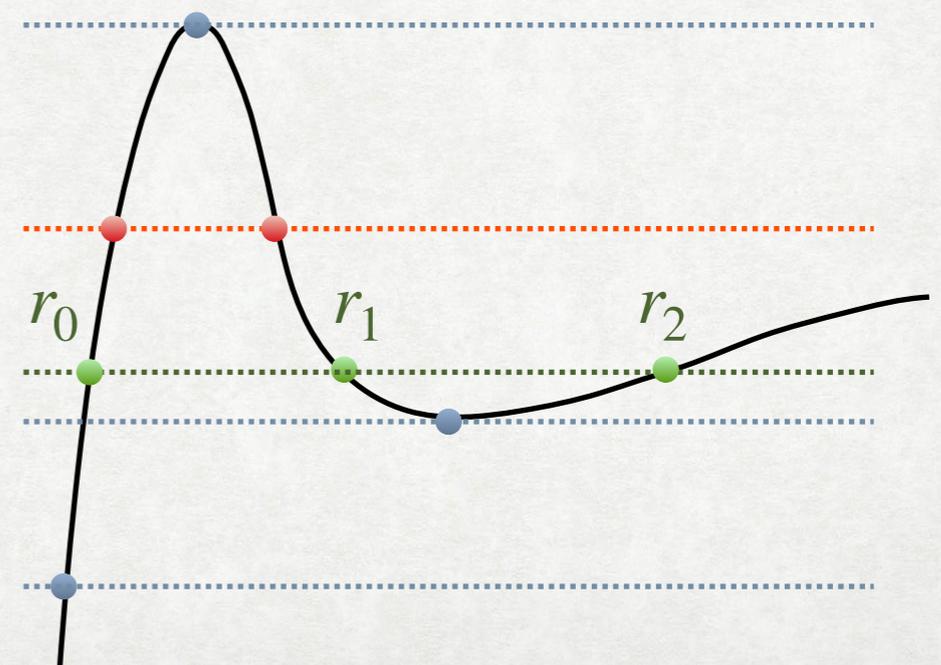
órbitas circulares, estável e instável, além de trajetória "catastrófica" (que vai para  $r \rightarrow 0$ )

(b) **Dois raízes reais ( $E > 0$ ):**

"espalhamento"

(c) **Três raízes reais ( $E < 0$ ):**

órbitas limitadas e trajetórias "catastróficas" que terminam em  $r \rightarrow 0$ )



## TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL: 2 - A PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

- Se quisermos calcular explicitamente as órbitas circulares (a interna, instável, e a externa, estável), além de exigir que o raio dessa órbita,  $r_c$ , seja raiz da equação obtida acima,

$$E + \frac{1}{2} \frac{R_S}{r_c} - \frac{1}{2} \frac{j^2}{r_c^2} \left( 1 - \frac{R_S}{r_c} \right) = 0 \quad ,$$

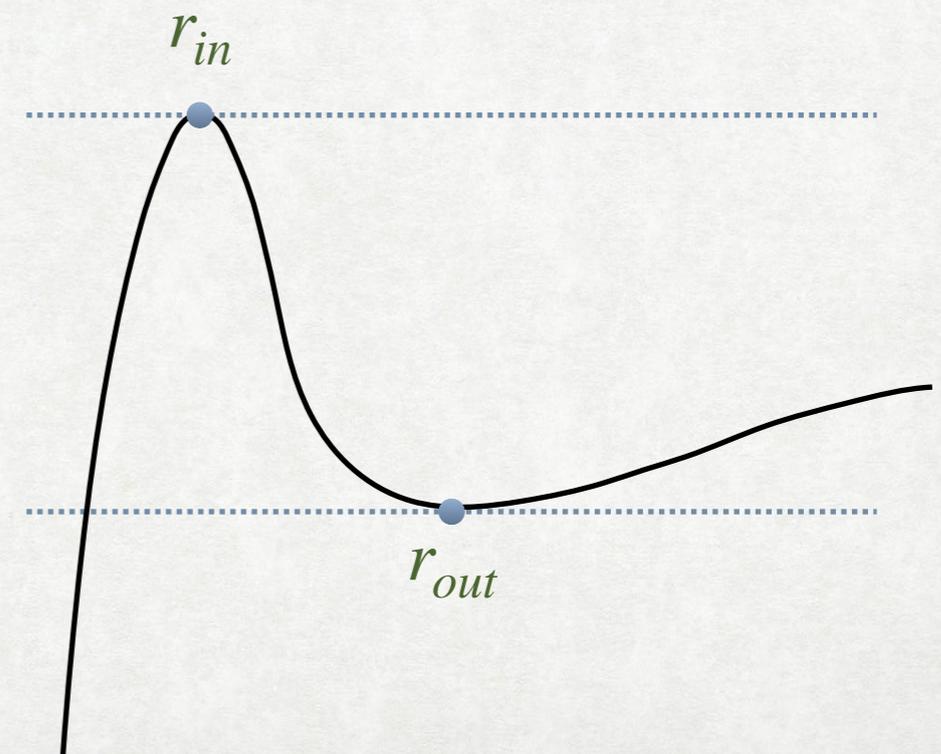
também devemos exigir que o potencial efetivo é mínimo naquele ponto, ou seja,

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{2} \frac{R_S}{r} - \frac{1}{2} \frac{j^2}{r^2} \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) \right]_{r=r_c} = 0 \quad .$$

- Isso agora dá uma equação quadrática, cujas soluções são:

$$r_{out} = \frac{j^2}{R_S} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{3R_S^2}{j^2}} \right) \quad ,$$

$$r_{in} = \frac{j^2}{R_S} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{3R_S^2}{j^2}} \right) = 3 \frac{j^2}{r_{out}} \quad .$$



## TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL: 2 - A PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

- A órbita circular interior é evidentemente instável, enquanto que a exterior é estável. Tomando  $R_S \ll j$ , podemos expandir as expressões acima para obter:

$$r_{out} \simeq \frac{2j^2}{R_S} = \frac{2j^2}{2GM} \quad ,$$

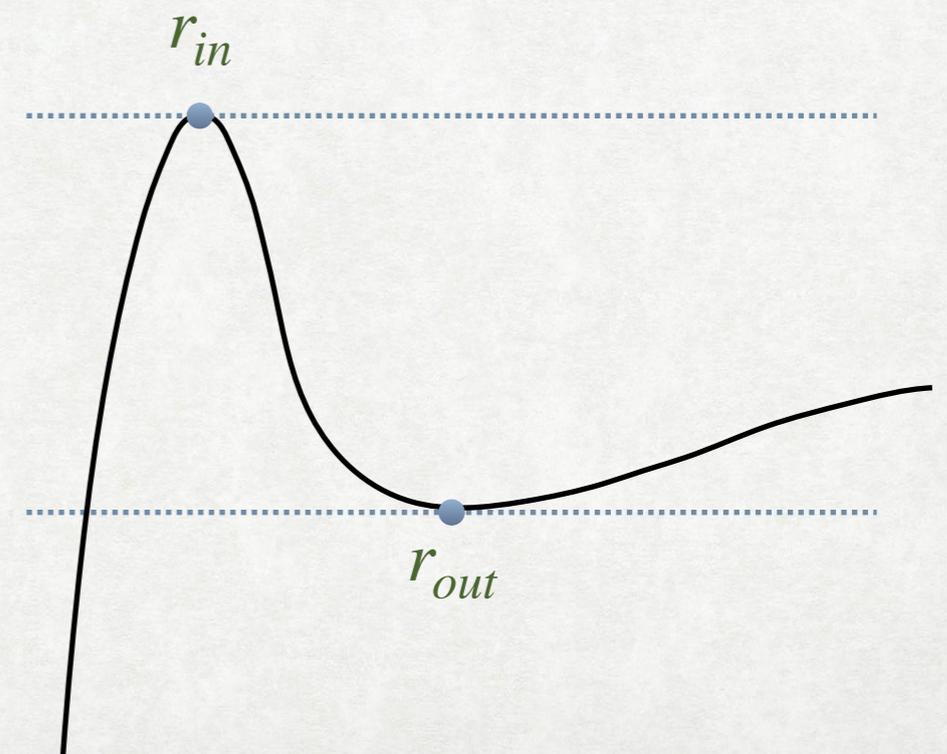
$$r_{in} \simeq \frac{3}{2}R_S \quad .$$

- Mas na órbita "clássica" a frequência angular é:

$$r_{out} \omega_\varphi^2 \simeq \frac{GM}{r_{out}^2} \quad ,$$

portanto obtemos que:

$$\omega_\varphi^2 \simeq \frac{GM}{r_{out}^3} = \frac{(GM)^4}{j^6} = \frac{R_S^4}{16j^6}$$



## TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL: 2 - A PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

- Para uma órbita não-circular, temos raios mínimo ( $r_1$ ) e máximo ( $r_2$ ) que são raízes da equação:

$$E + \frac{1}{2} \frac{R_S}{r_m} - \frac{1}{2} \frac{j^2}{r_m^2} \left( 1 - \frac{R_S}{r_m} \right) = 0$$

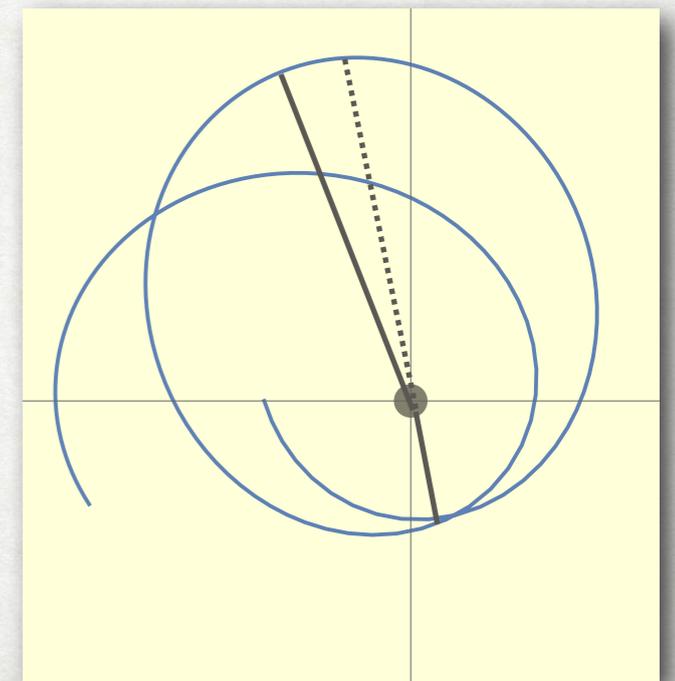
- Mas note que nesse caso o *raio da órbita também oscila*, com frequência angular dada aproximadamente pela "frequência de mola":

$$\omega_r^2 = \left. \frac{d^2 V_{eff}(r)}{d r^2} \right|_{r=r_{out}}$$

$$= \frac{R_S}{2r_{out}^4} (r_{out} - r_{in}) = \omega_\phi^2 \sqrt{1 - \frac{3R_S^2}{j^2}}$$

- Expandido essa frequência com  $R_S/j \ll 1$ , temos que:

$$\omega_r \simeq \omega_\phi \left( 1 - \frac{3R_S^2}{4j^2} + \dots \right)$$



## TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL: 2 - A PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

- Essa *diferença* entre os períodos radial e angular é o que leva à precessão:

$$\omega_\varphi - \omega_r \simeq \omega_\varphi \frac{3 R_S^2}{4 j^2}$$

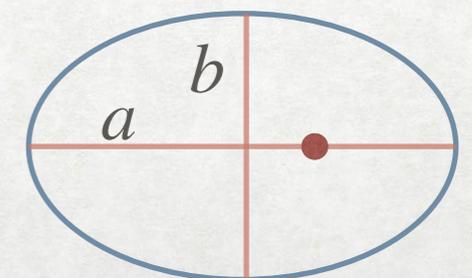
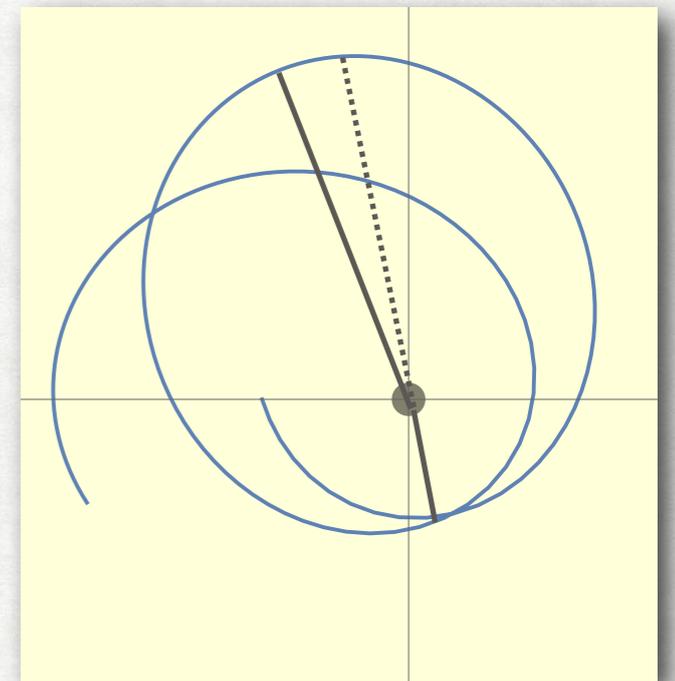
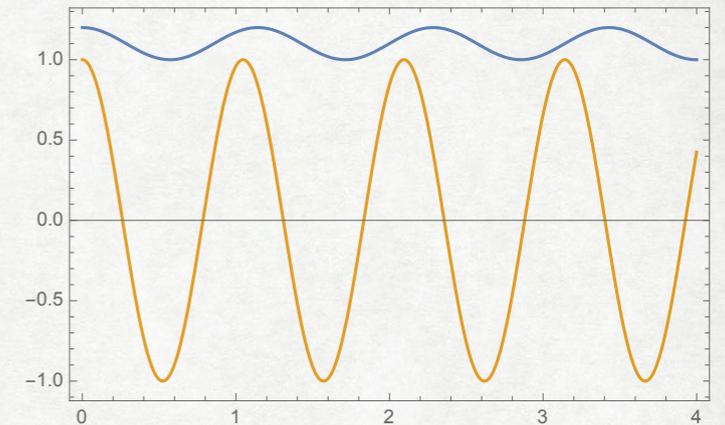
$$\delta\varphi = \delta\omega \times T = \delta\omega \times \frac{2\pi}{\omega}$$

- Portanto, obtemos que há um *adiantamento* do periélio de:

$$\delta\varphi \simeq 2\pi \frac{3 R_S^2}{4 j^2} = \frac{6\pi G^2 M^2 m^2}{L^2 c^2}$$

- Podemos simplificar isso assumindo uma órbita aproximadamente elíptica, e usando a relação entre o momento angular, o semi-eixo maior e a excentricidade:

$$\frac{j^2}{G(M+m)} = a(1-e^2) \quad , \quad r(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \varphi}} \quad , \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$



## TESTES CLÁSSICOS DA RELAT. GERAL: 2 - A PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

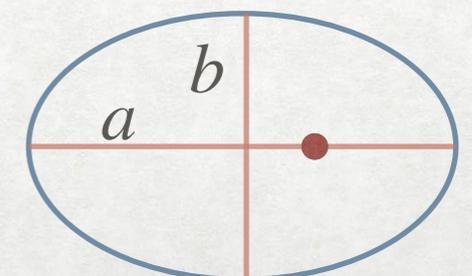
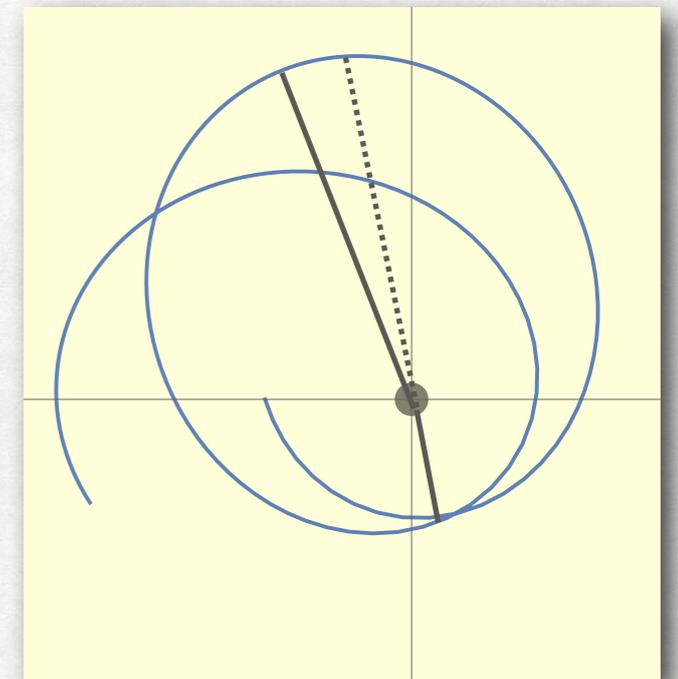
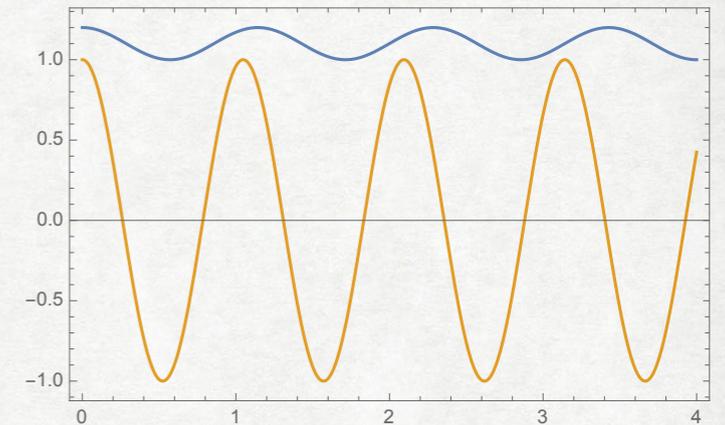
- O resultado final é, portanto:

$$\delta\varphi \simeq \frac{6\pi G(M + m)}{a(1 - e^2)c^2} \simeq \simeq \frac{3\pi R_S}{a(1 - e^2)}$$

- Para órbitas esféricas esse ângulo é irrelevante, já que  $r =$  constante.
- No caso de órbitas de planetas, o resultado será maximizado para uma órbita não-circular *com o menor raio possível* ( $a$ ) — portanto, Mercúrio é o principal candidato!
- No caso específico de *Mercúrio* temos  $a = 5,79 \times 10^7$  km , e a excentricidade é  $e = 0.2056$  , o que nos dá:

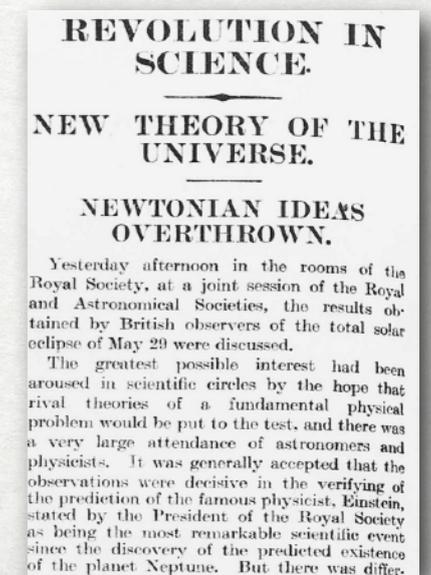
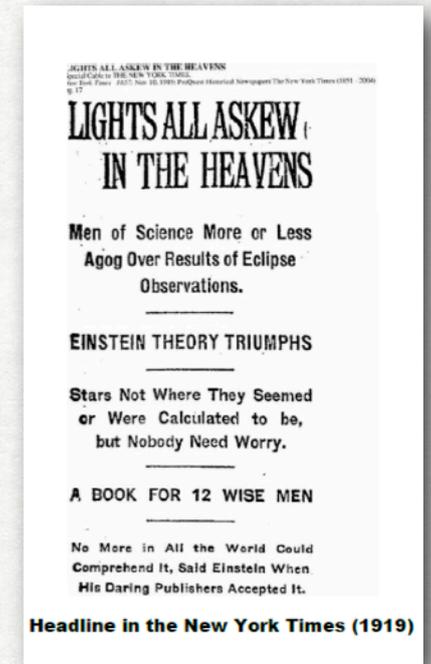
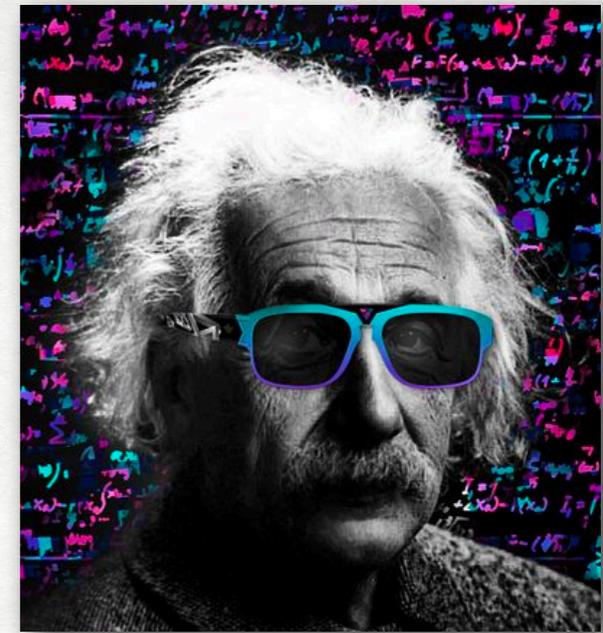
$$\delta\varphi \simeq \simeq \frac{3\pi (2,95 \text{ km})}{(5,79 \times 10^7 \text{ km}) \times (1 - e^2)} = 5,014 \times 10^{-7}$$

- Ou seja, se em cada órbita temos um adiantamento do periélio por  $\delta\varphi \simeq 0,103''$  , então em 1 Século (415 órbitas),  $\delta\varphi(100 \text{ anos}) \simeq 43''$



# A RELATIVIDADE GERAL TRIUNFA!

- A precessão do periélio de Mercúrio já era bem conhecida (e medida) no início do Séc. XX. Mas o excesso de 43'' por século é um cálculo complicado, que depende da não-esfericidade do Sol, além da influência das órbitas dos outros planetas. Mesmo assim, o resultado relativístico explicou perfeitamente esse excesso.
- O teste do desvio da luz, por outro lado, foi uma **previsão** da Relatividade Geral, que diferia do resultado Newtoniano por um **fator de 2**! Ou seja, esse é de fato um resultado "relativístico" no sentido forte — afinal, ele envolve a própria luz.
- A Relatividade Geral **passou em ambos esses testes**. Esse sucesso experimental, combinado com a beleza e elegância da teoria de Einstein, imediatamente estabeleceu a Relatividade Geral como a teoria da gravitação.



## PARA A AULA QUE VEM:

- 4a lista de exercícios estará disponível hoje!
- Próxima aula: convidado especial, Prof. Rodrigo Nemmen (Dep. de Astronomia/IAG)
- Leitura: S. Carroll, Capítulo 5