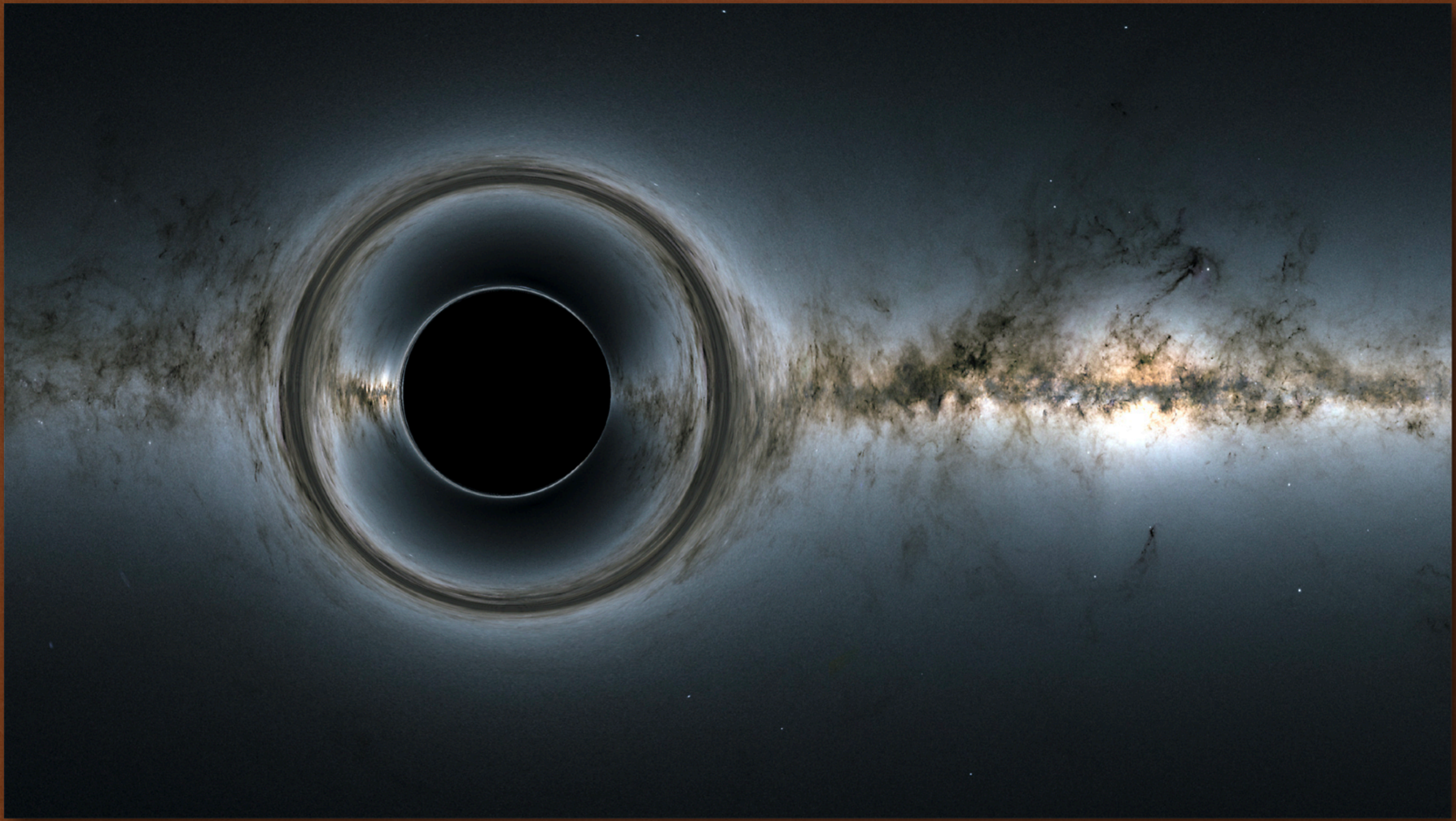
INTRODUÇÃO À

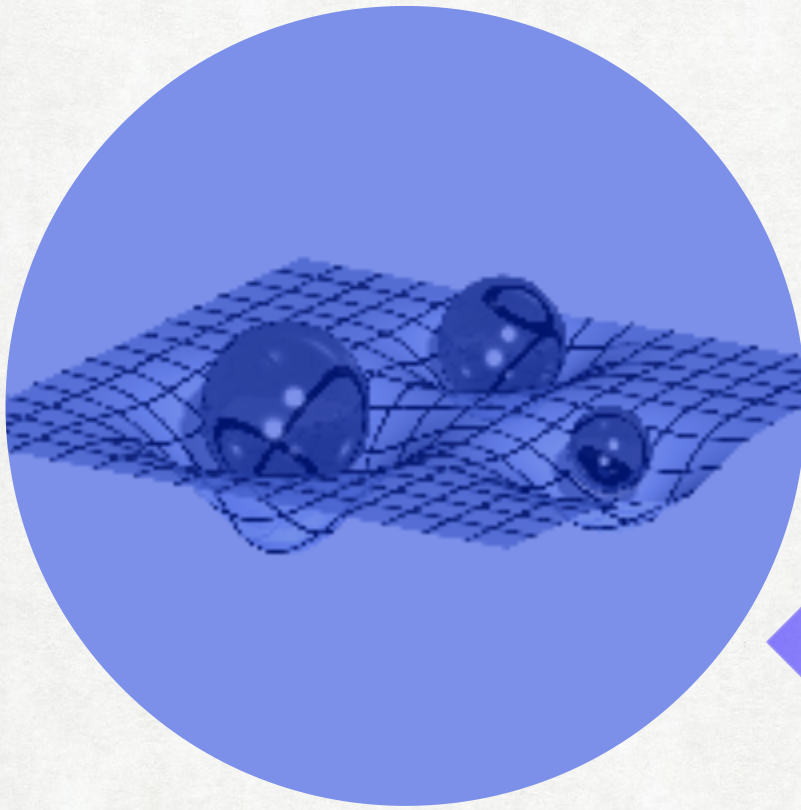


RELATIVIDADE

AULA 16 - 05/05/2020

- A métrica de Schwarzschild
- Geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild
- O potencial efetivo
- Órbitas
- **Leitura: Capítulo 5 do Carroll**

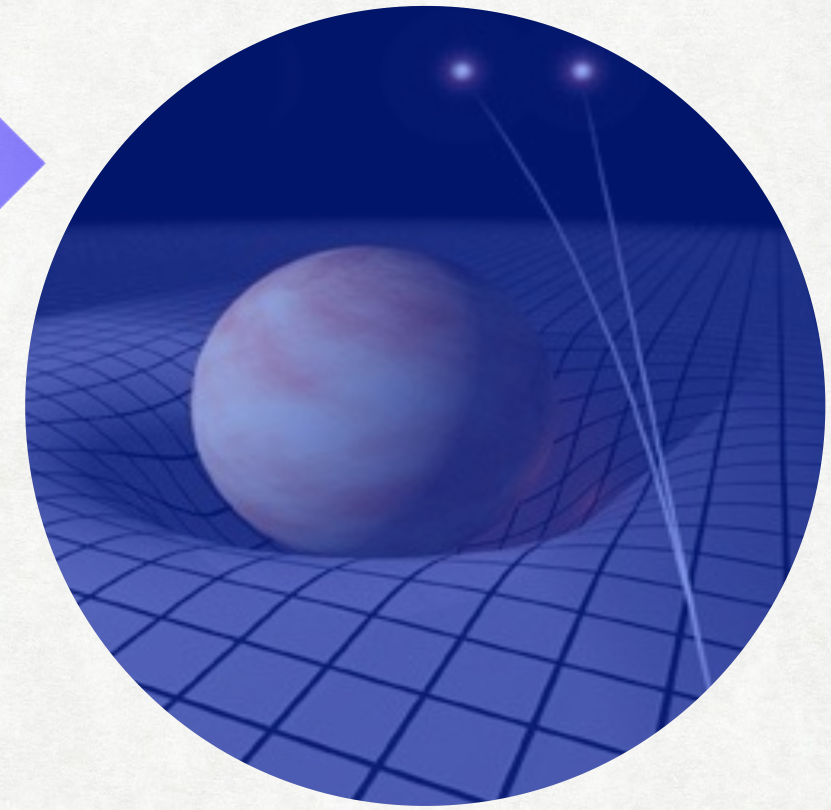
EQUAÇÕES DE EINSTEIN



A matéria curva o espaço-tempo, e determina a métrica...

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

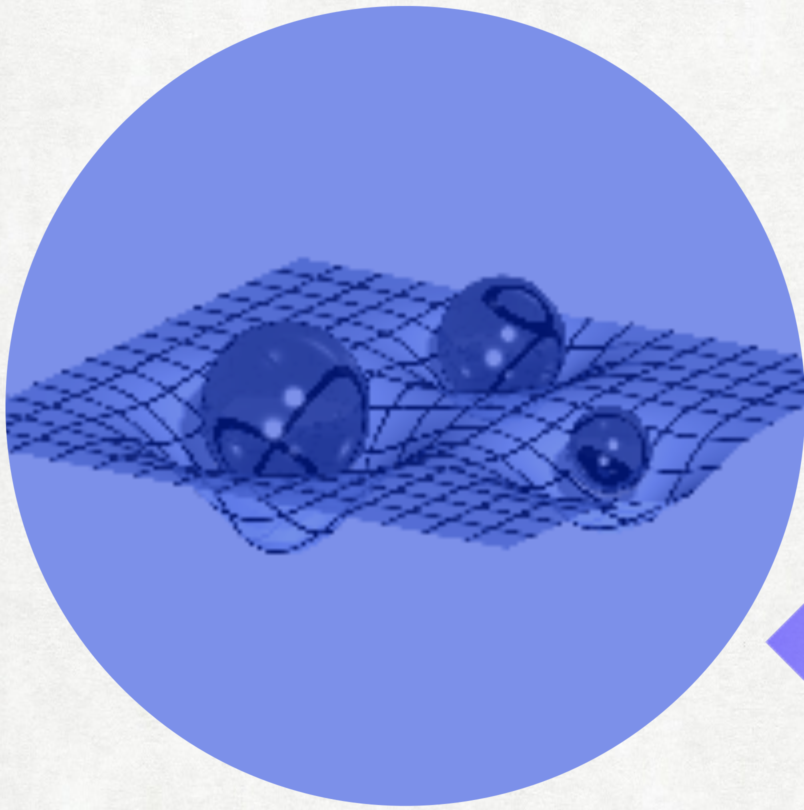
... enquanto a métrica determina como a matéria se move.



Na aula passada encontramos **a** solução esfericamente simétrica e estática das Equações de Campo de Einstein, chamada métrica de Schwarzschild.

Nesta aula vamos estudar como a matéria (e a luz) se comportam num espaço-tempo com essas propriedades.

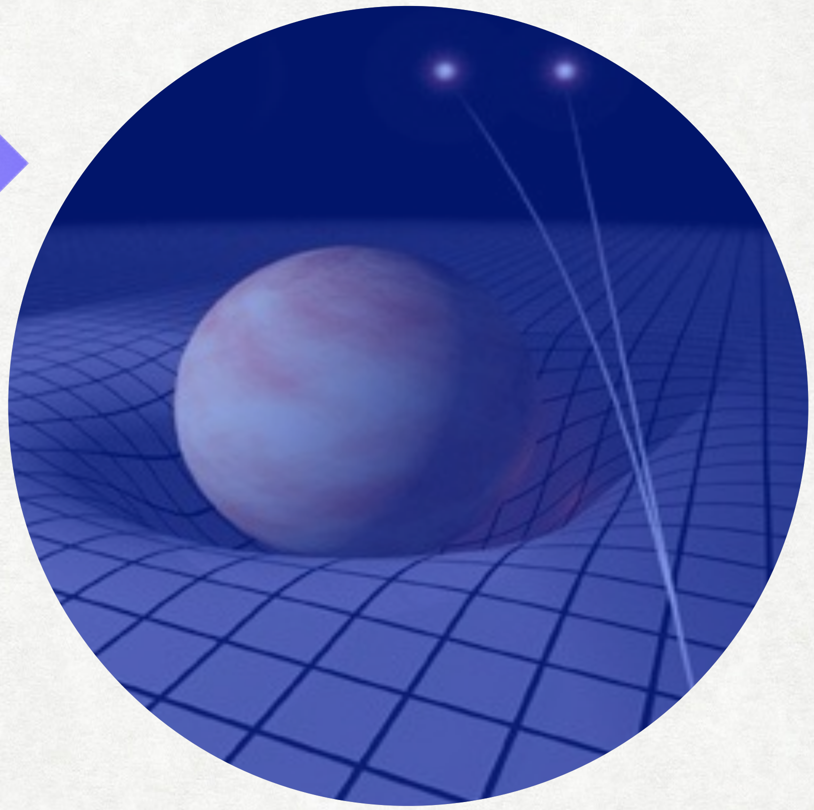
UNIDADES "NATURAIS": $c = 1$



A matéria curva o espaço-tempo,
e determina a métrica...

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}$$

... enquanto a métrica determina
como a matéria se move.



A partir deste momento vou deixar de mostrar essa constante universal da natureza, a velocidade da luz c , ou seja, vamos fazer $c = 1$. Em outras palavras, vamos assumir que, sempre que aparecer "tempo", temos que nos lembrar que esse "tempo" é na verdade ct , que tem dimensões de distância.

A ***velocidade***, nessas unidades, é ***adimensional***. Para recobrar a velocidade "real", basta tomar $v(\mathrm{km/s}) = v_{(c=1)} \times c$.

A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Portanto, chegamos no resultado de que a métrica é:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\Omega^2$$

- Mas afinal, quem é essa constante r_0 que apareceu? Para isso, vamos nos lembrar do **limite Newtoniano**:

$$g_{00} \to -\left(1 - \frac{2\,G\,M}{r}\right)$$

- Note que, na solução obtida para a métrica, a massa M aparece primeiro como uma constante de integração, que depois podemos identificar, numa certa aproximação (não-relativística, quase-estática) com a massa de um objeto tal como um planeta ou estrela.

- Porém, a métrica acima é uma solução ***exata***, perfeitamente ***relativística.*** Veremos logo mais em que limites essa métrica leva a uma física parecida com aquela da gravitação de Newton, e quando ela é fundamentalmente diferente, levando a fenômenos inteiramente novos.

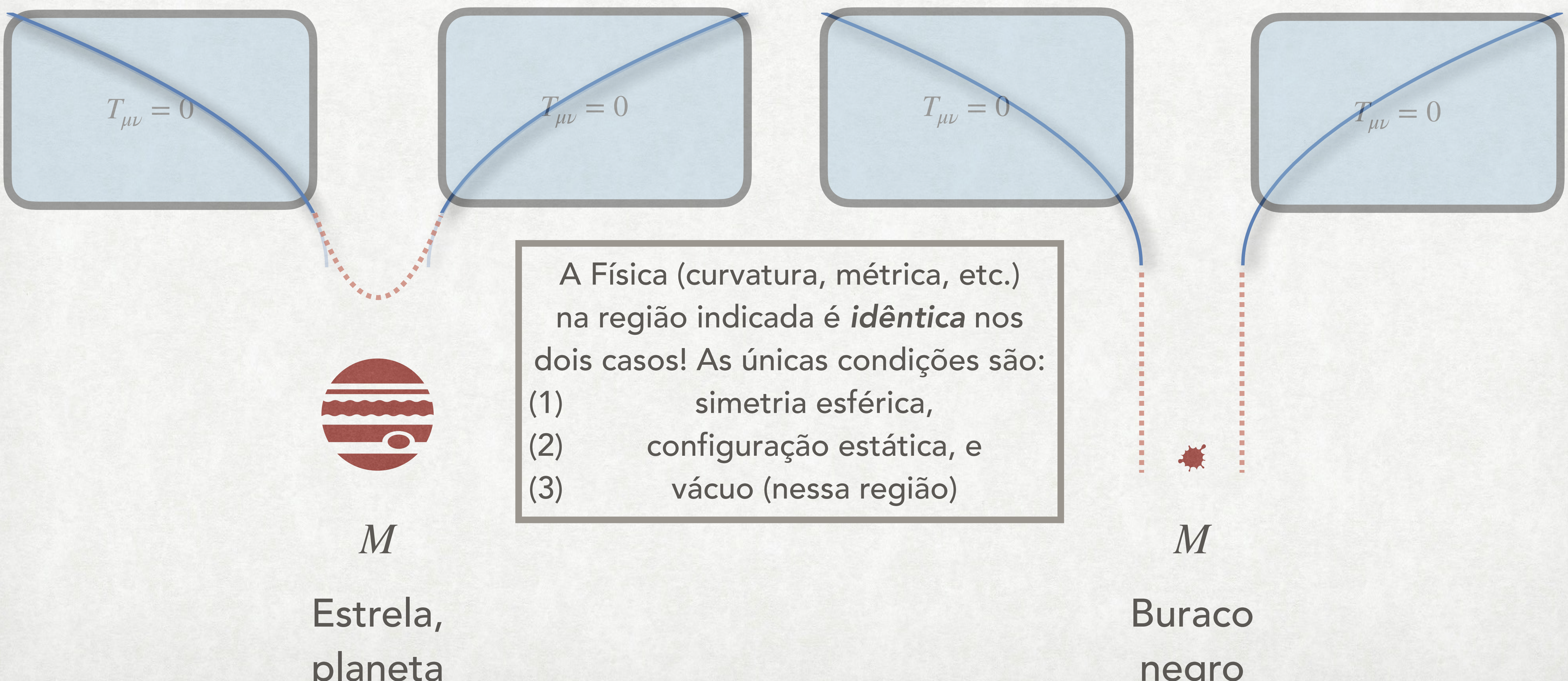
- Para resumir: a métrica que encontramos acima chama-se métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\Omega^2$$, onde $R_s = 2GM$ é o ***raio de Schwarzschild***

A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- A **única** métrica **esfericamente simétrica**, **estática**, que satisfaz as **Equações de Einstein no vácuo**, é dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \, d\Omega^2$$



A Física (curvatura, métrica, etc.) na região indicada é ***idêntica*** nos dois casos! As únicas condições são:

(1) simetria esférica,
(2) configuração estática, e
(3) vácuo (nessa região)

O RAIO DE SCHWARZSCHILD

- O ***raio de Schwarzschild*** R_S é determinado apenas pela massa do objeto (além, claro, da constante da gravitação, G, e da velocidade da luz, c . Em unidades convenientes, ela nos dá:

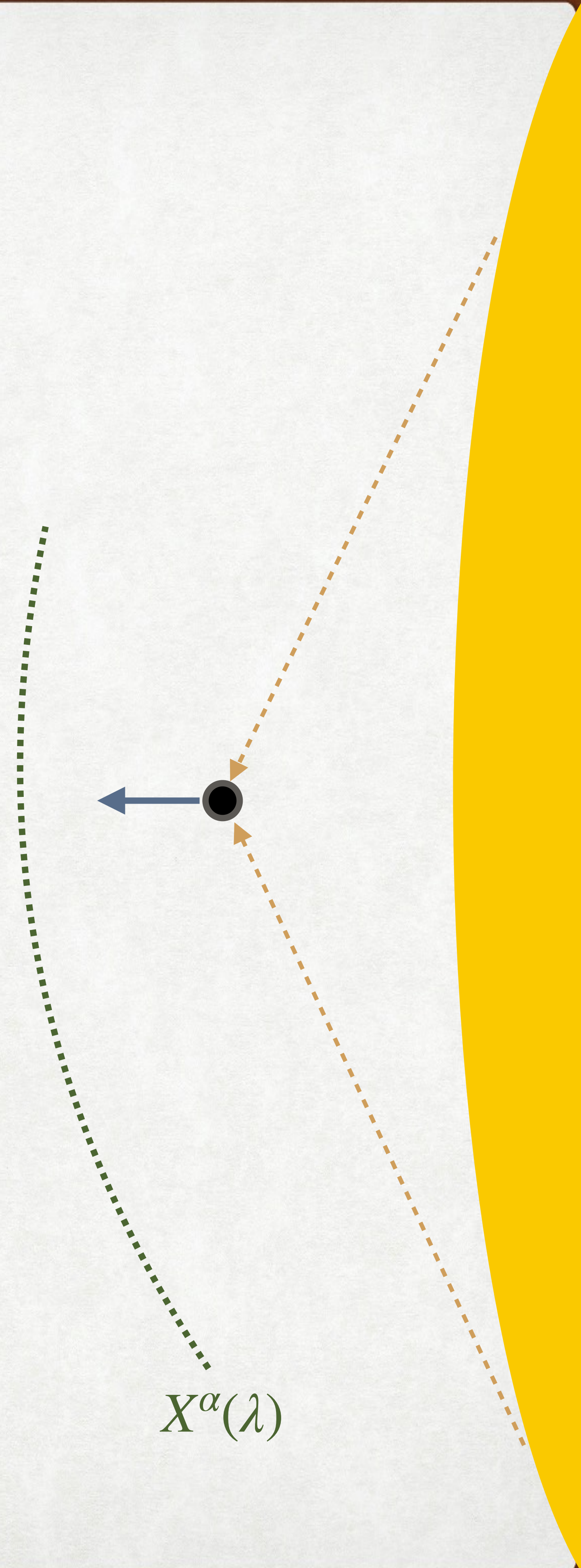
$$R_s = \frac{2GM}{c^2} = 2{,}95 \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \text{km}$$

onde $M_\odot = 2.0 \times 10^{30}$ kg é a ***massa do Sol*** .

- Note que, como evidenciado pela presença da velocidade da luz, c, o raio de Schwarzschild é uma quantidade intrinsecamente relativística.

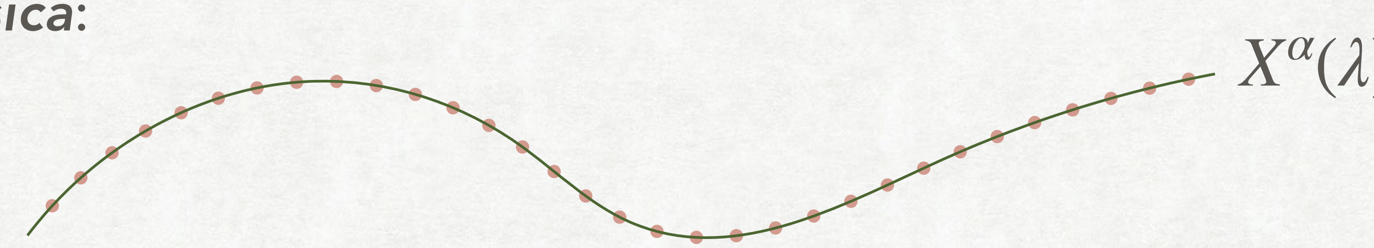
- Porém, veremos mais adiante que esse raio pode ser também calculado assumindo que a ***velocidade de escape*** na vizinhança de um objeto de massa M é a velocidade da luz (como feito por John Michell no Séc. XVIII, e por Pierre-Simon Laplace no Séc. XIX).

- A questão que se coloca agora é: qual a natureza do movimento de partículas nesse espaço-tempo?



GEODÉSICAS EM SCHWARZSCHILD

- As ***trajetórias*** $X^\alpha(\lambda)$ de partículas num espaço-tempo dotado de uma métrica $g_{\mu\nu}$ e conexões $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ é dada pela ***Equação da Geodésica***:



$$\frac{d^2X^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\lambda}\frac{dX^\nu}{d\lambda} = 0$$

- Nessa equação vamos usar as conexões calculadas na aula anterior. Lembre-se que as nossas coordenadas são $x^\mu = \{t, r, \theta, \varphi\}$:

$$\Gamma^0_{00} = 0 \quad , \quad \Gamma^0_{10} = -\frac{1}{2}a' \quad , \quad \Gamma^0_{\alpha 2} = \Gamma^0_{\alpha 3} = 0$$

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}a'e^{-2a} \quad , \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}a' \quad , \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-a} \quad , \quad \Gamma^1_{33} = -re^{-a}\mathrm{sen}^2\,\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma^2_{33} = -\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \quad , \quad \Gamma^3_{23} = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$\Gamma^2_{0\mu} = \Gamma^3_{0\mu} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^2_{13} = 0$$

(Note que aqui já usamos a condição da solução de Schwarzschild, que nos dá $b = -a$.)

GEODÉSICAS EM SCHWARZSCHILD

- Usando as conexões acima, e denominando as componentes da trajetória por $X^\mu \to \{t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \varphi(\lambda)\}$, as quatro componentes da Equação da Geodésica se tornam:

(0) $$\frac{d^2t}{d\lambda^2} - a'\frac{dt}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = 0$$

(1) $$\frac{d^2r}{d\lambda^2} - \frac{1}{2}a'e^{-2a}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}a'\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - re^{-a}\left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2\right] = 0$$

(2) $$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} - \frac{2}{r}\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\theta}{d\lambda} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

(3) $$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\varphi}{d\lambda} + 2\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$$

- Note que a solução de Schwarzschild nos dá (veja aula passada!):

$$e^{-a} = 1 - \frac{R_s}{r} \quad , \quad \text{e} \quad a' = -\frac{R_s}{r^2}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}$$

GEODÉSICAS EM SCHWARZSCHILD

- Vamos nos limitar por enquanto ao plano $\theta = \pi/2$. Veremos mais adiante que, se uma trajetória se ***iniciar nesse plano***, ela se ***manterá nesse plano*** (afinal, isso é ***conservação de momento angular***!). Nesse caso, temos que:

$$\operatorname{sen}\theta = 1 \quad , \quad \cos\theta = 0 \quad , \quad d\theta = 0$$

- Isso nos leva a uma grande simplificação. Usando a solução de Schwarzschild, obtemos:

(0) $$\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \frac{d}{d\lambda}\left[\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}\right] = 0$$

(1) $$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{R_s}{2r^2}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{R_s}{2r^2}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(r - R_s\right)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

(2) $$0 = 0$$

(3) $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\lambda}\left(r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}\right) = 0$$

- Das equações acima podemos notar que há duas ***constantes de movimento***: uma da Eq. (0) acima, para a parte temporal da Eq. da Geodésica; e outra da Eq. (3), para a parte angular (em φ). Elas são:

$$\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} = C \qquad \text{e} \qquad r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = j \qquad ,$$ onde claramente $j \to$ momento angular .

GEODÉSICAS EM SCHWARZSCHILD

- No caso de ***partículas com massa***, podemos utilizar o ***tempo próprio como parâmetro afim***, $\lambda \to \tau$. Nesse caso, a primeira constante de movimento (C) pode ser fixada se nos limitarmos a trajetórias que vêm (ou vão) para o infinito espacial, ou seja, se elas em algum momento forem para $r \to \infty$, com velocidade final v_∞ , tal que $dt = \gamma(v_\infty)\, d\tau$. Nesse caso, temos que:

$$\lim_{r\to\infty} \left[\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \right] = \lim_{r\to\infty} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(v_\infty) = \frac{E_\infty}{m} \quad ,$$

onde $E_\infty = m\gamma(v_\infty)c^2 = m\gamma(v_\infty)$ é a energia da partícula na região assintótica $r \to \infty$.

- Ou seja: a constante C denota, essencialmente, a ***energia*** dessa partícula!

- Mesmo se tivermos trajetórias que nunca "escapam" para $r \to \infty$ (ou seja, órbitas), ainda há uma energia bem definida: em qualquer raio r_* temos uma velocidade v_*, e portanto:

$$\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{R_s}{r_*}\right) \gamma(v_*)$$

- De qualquer modo, podemos usar as constantes de movimento (C e j) para simplificar a equação radial:

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{R_s}{2r^2}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} C^2 - \frac{R_s}{2r^2}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\frac{j^2}{r^3} = 0$$

GEODÉSICAS EM SCHWARZSCHILD

- A equação radial fica ainda mais simples se usarmos as expressões

$$e^{-a} = 1 - \frac{R_s}{r} \quad , \quad \text{e} \quad a' = -\frac{R_s}{r^2}\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}$$

- Substituindo isso na equação, temos:

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2r}{d\lambda^2} - \frac{1}{2}C^2\,a' + \frac{1}{2}a'\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{j^2}{r^3}\,e^{-a} = 0$$

GEODÉSICAS EM SCHWARZSCHILD

- Vamos agora considerar esse mesmo problema do modo que fizemos na aula passada. Vamos nos recordar que a métrica de Schwarzschild é dada por:

$$-d\tau^2 = ds^2 = -\,e^{-a}\,dt^2 + e^a\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2$$

- No caso de ***partículas "normais", com massa***, obtemos então que:

Geodésicas não-nulas: $$-1 = -\,e^{-a}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + e^a\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2,$$

com as constantes de movimento $\left(1-\frac{R_s}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{m}$ e $r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = J$

- Já no caso de **raios de luz**, ou de modo geral partículas sem massa, temos $ds^2 = 0$, e não existe um "tempo próprio", mas ainda assim temos um parâmetro afim λ qualquer. Portanto:

Geodésicas nulas: $$0 = -\,e^{-a}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + e^a\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2,$$

com as constantes de movimento $\left(1-\frac{R_s}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} = C$ e $r^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = j$

GEODÉSICAS EM SCHWARZSCHILD

- Voltando então à Equação da Geodésica, podemos reescrevê-la usando as constantes de movimento, obtendo:

Geodésicas não-nulas: $$e^a \left[C^2 - \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \right] - \frac{j^2}{r^2} - 1 = 0 \quad ,$$

Geodésicas nulas: $$e^a \left[C^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \right] - \frac{j^2}{r^2} \qquad = 0$$

- Agora, note que $U^\mu U_\mu = -1$ para partículas com massa, e que $U^\mu U_\mu = 0$ para a luz. Portanto, podemos escrever a primeira integral das geodésicas de ***qualquer partícula*** como:

$$e^a \left[C^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \right] - \frac{j^2}{r^2} - u^2 = 0 \quad ,$$

onde $U^\mu U_\mu = -u^2$, com $u^2 = 1$ ou $u^2 = 0$ nos dois casos ($m \neq 0$ ou $m = 0$).

- Agora, vamos fazer um teste simples de consistência: as equações acima são de primeira ordem, enquanto a Equação da Geodésica é de segunda ordem. Então, podemos supor que, tomando a ***derivada*** (com respeito a τ ou a λ) de qualquer uma das equações acima, devemos retornar à componente radial da Equação da Geodésica.

GEODÉSICAS EM SCHWARZSCHILD

- Usando que $\dfrac{d\left(e^a\right)}{d\lambda} = a'\, e^a \dfrac{dr}{d\lambda}$, obtemos:

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{ e^a \left[C^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \right] - \frac{j^2}{r^2} - u^2 \right\} =$$

$$a'\, e^a \frac{dr}{d\lambda}\left[C^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \right] + e^a \left[0 - 2\frac{dr}{d\lambda}\frac{d^2 r}{d\lambda^2} \right] + 2\frac{j^2}{r^3}\frac{dr}{d\lambda} \;=\; 0$$

- Mas agora podemos eliminar o fator comum de $dr/d\lambda$, e obtemos:

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 r}{d\lambda^2} - \frac{1}{2}C^2\, a' + \frac{1}{2}a'\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{j^2}{r^3}\, e^{-a} = 0 \;\;,$$

que é justamente a parte radial da Equação da Geodésica!

- Ou seja: demonstramos que ds^2 é de fato uma ***primeira integral*** da Eq. da Geodésica!

GEODÉSICAS EM SCHWARZSCHILD

- Vamos nos concentrar nas geodésicas não-nulas, para as quais, usando $u^2 = 1$ temos:

$$\lambda = \tau = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{C^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\left(\frac{j^2}{r^2} + 1\right)}}$$

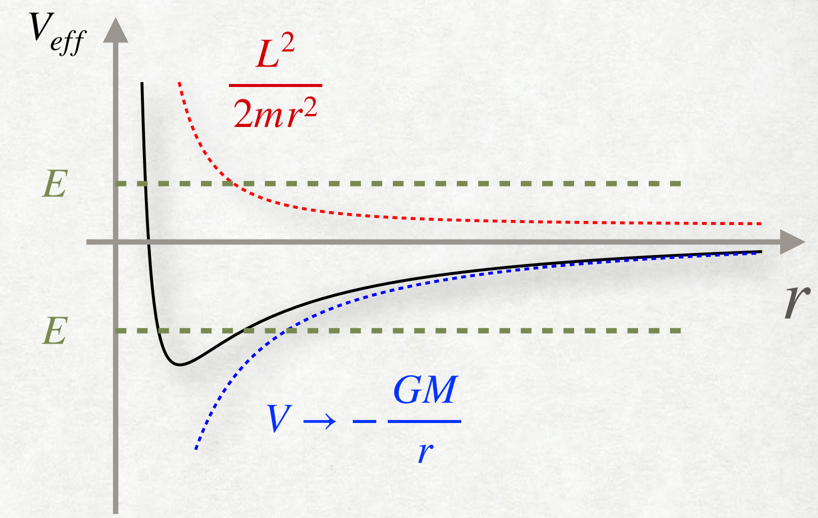
- Note que, usando $\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = C$ também obtemos:

$$t = \pm \int \frac{C\,dr}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\sqrt{C^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\left(\frac{j^2}{r^2} + 1\right)}}$$

POTENCIAL EFETIVO EM SCHWARZSCHILD

- Um modo conveniente de expressar o movimento radial é fazendo uma analogia com a mecânica clássica, na qual temos:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = E \quad , \qquad \text{ou} \qquad \dot{r}^2 = 2\left[E - V_{eff}(r)\right]$$



onde o potencial efetivo é:

$$V_{eff} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

- No problema do movimento radial ***em Schwarzschild*** temos:

$$e^a\left[C^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\right] - \frac{j^2}{r^2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\left(\frac{j^2}{r^2} + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = C^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\left(\frac{j^2}{r^2} + 1\right) = C^2 - 1 + \frac{R_S}{r} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\frac{j^2}{r^2}$$

POTENCIAL EFETIVO EM SCHWARZSCHILD

- Isso significa que, fazendo a associação $\dot{r}^2 = 2\left[E - V_{eff}(r)\right]$, e usando a expressão acima:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = C^2 - 1 + \frac{R_S}{r} - \frac{j^2}{r^2} + \frac{R_S\, j^2}{r^3}$$

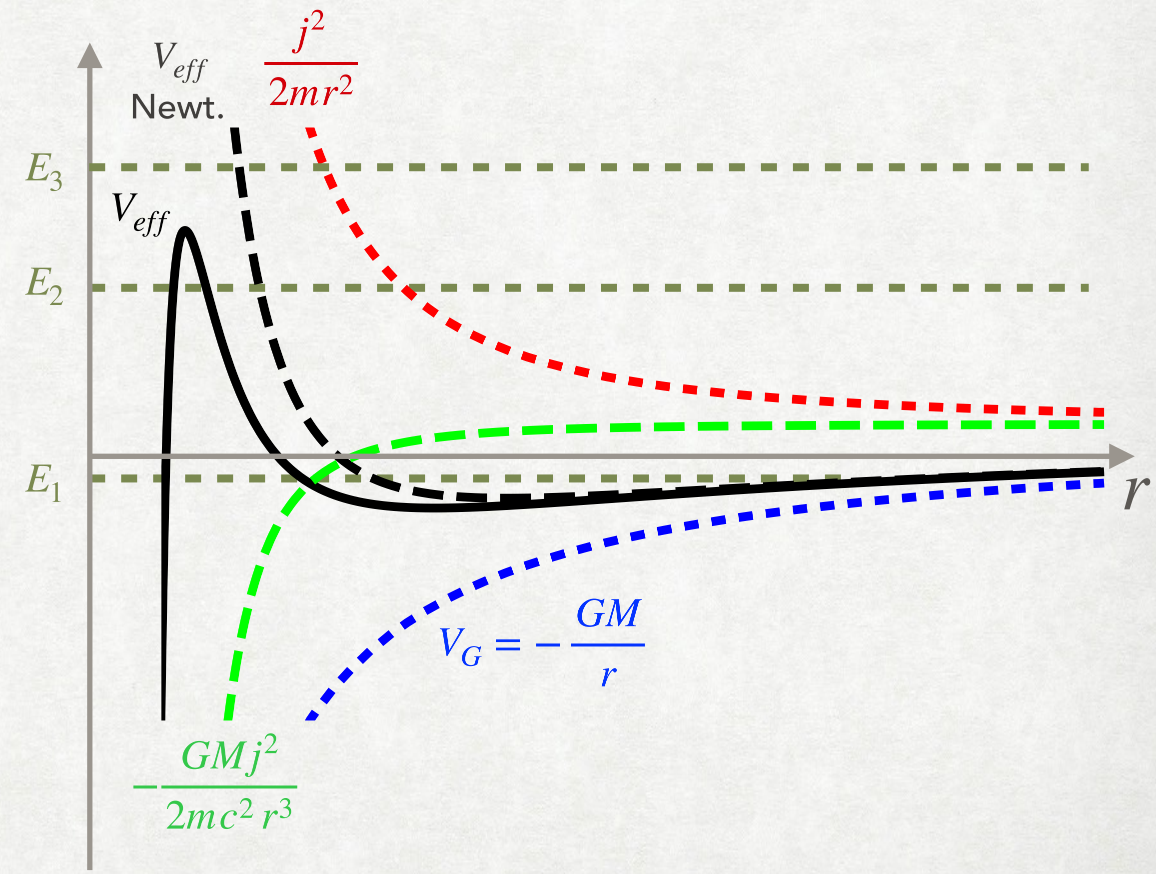
$$= 2\left[\frac{C^2-1}{2} + \frac{R_S}{2r} - \frac{j^2}{2r^2} + \frac{R_S\, j^2}{2r^3}\right]$$

- Agora lembre-se que $R_S = 2GM$, e assim temos que:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 2\left[\frac{C^2-1}{2} + \frac{GM}{r} - \frac{j^2}{2r^2} + \frac{GM\, j^2}{r^3}\right]$$

- Portanto, temos que:

$$E \rightarrow \frac{C^2-1}{2} \quad , \quad \text{e} \quad V_{eff}(r) = \underbrace{\boxed{-\frac{GM}{r} + \frac{j^2}{2r^2}}}_{\text{Pot. Newtoniano}} - \frac{GM\, j^2}{r^3}$$



VELOCIDADE DE ESCAPE

- A velocidade de escape pode ser definida como a condição de que, na relação:

$$\dot{r}^2 = 2\left[E - V_{eff}(r)\right] ,$$

num movimento puramente radial ($j = 0$), para $r \to \infty$ nós temos $\dot{r} \to 0$, e portanto $E_{esc} = 0$.

- Ou seja, num raio r a velocidade da partícula deve ser:

$$v_{esc}^2(r) = -2V_{eff}(r, j = 0) = \frac{2GM}{r}$$

- Note que esse resultado é o mesmo na Relatividade Geral e na Física Newtoniana!

- No raio de Schwarzschild temos, usando $R_s = 2GM/c^2$:

$$v_{esc}^2(R_S) = c^2$$

que foi o resultado obtido por Laplace!

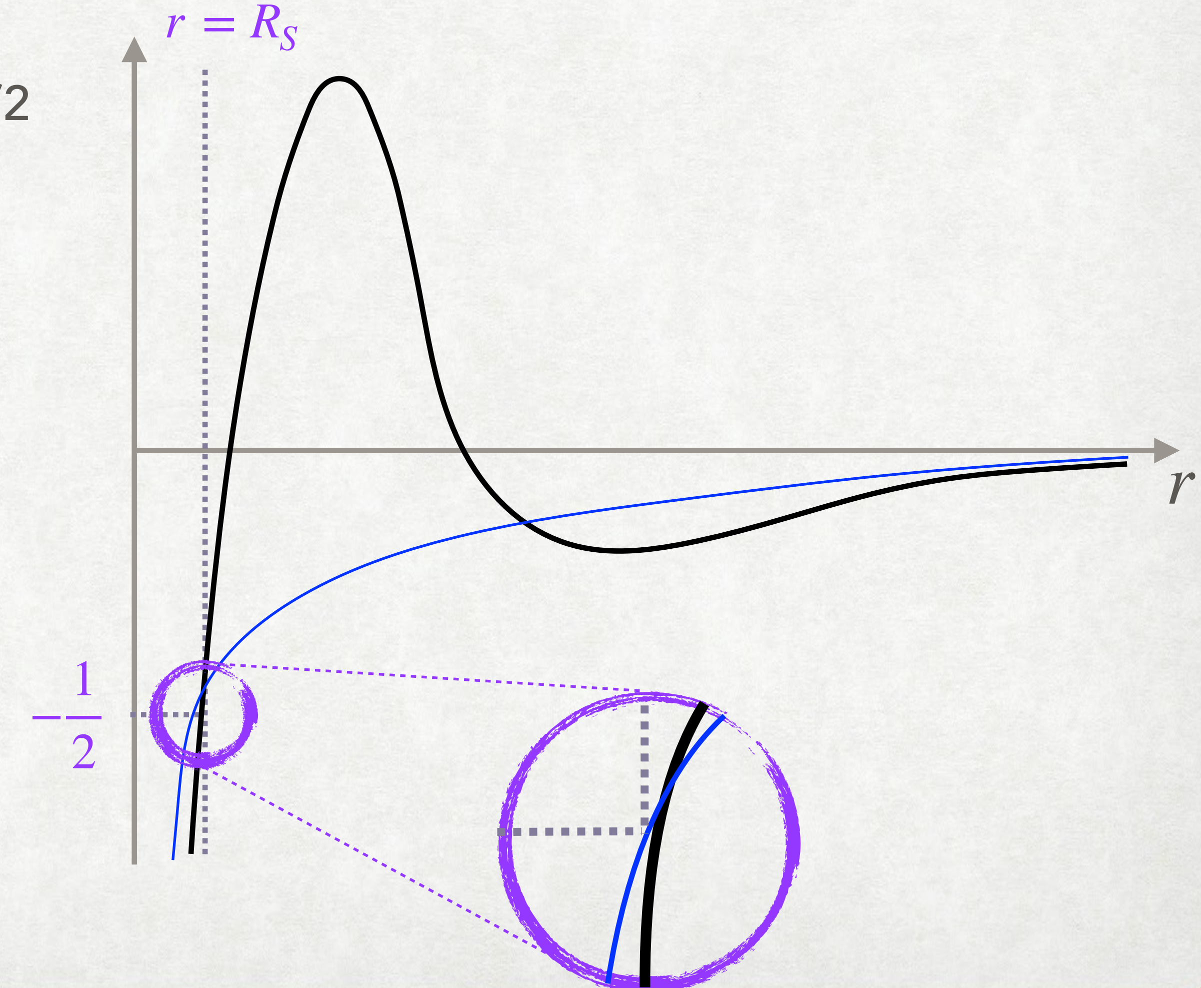
VELOCIDADE DE ESCAPE

- Note que, no caso de Schwarzschild, não há velocidade de escape dentro do horizonte de eventos do buraco negro ($r < R_S$) : nem a luz consegue escapar.

- Note também que o momento angular não ajuda: de fato, para $r \to R_s$, o potencial efetivo é aproximado por:

$$\lim_{r \to R_S} V_{eff} \simeq -\frac{1}{2} - \frac{j^2 + R_S^2}{2\,R_S^3}(R_s - r) - \frac{3j^2 + R_S^2}{2\,R_S^4}(R_s - r)^2 + \dots$$

ou seja, para $r < R_S$ o potencial só pode ir ***abaixo*** de -1/2



$$2E = C^2 - 1 \quad : \quad E_{min} = -\frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad C_{min} = 0$$

VELOCIDADE DE ESCAPE

- Note também que a ***luz***, ao escapar de uma dada região do buraco negro, perde energia de acordo com a componente $g_{00} = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)$ — o chamado ***redshift gravitacional***.

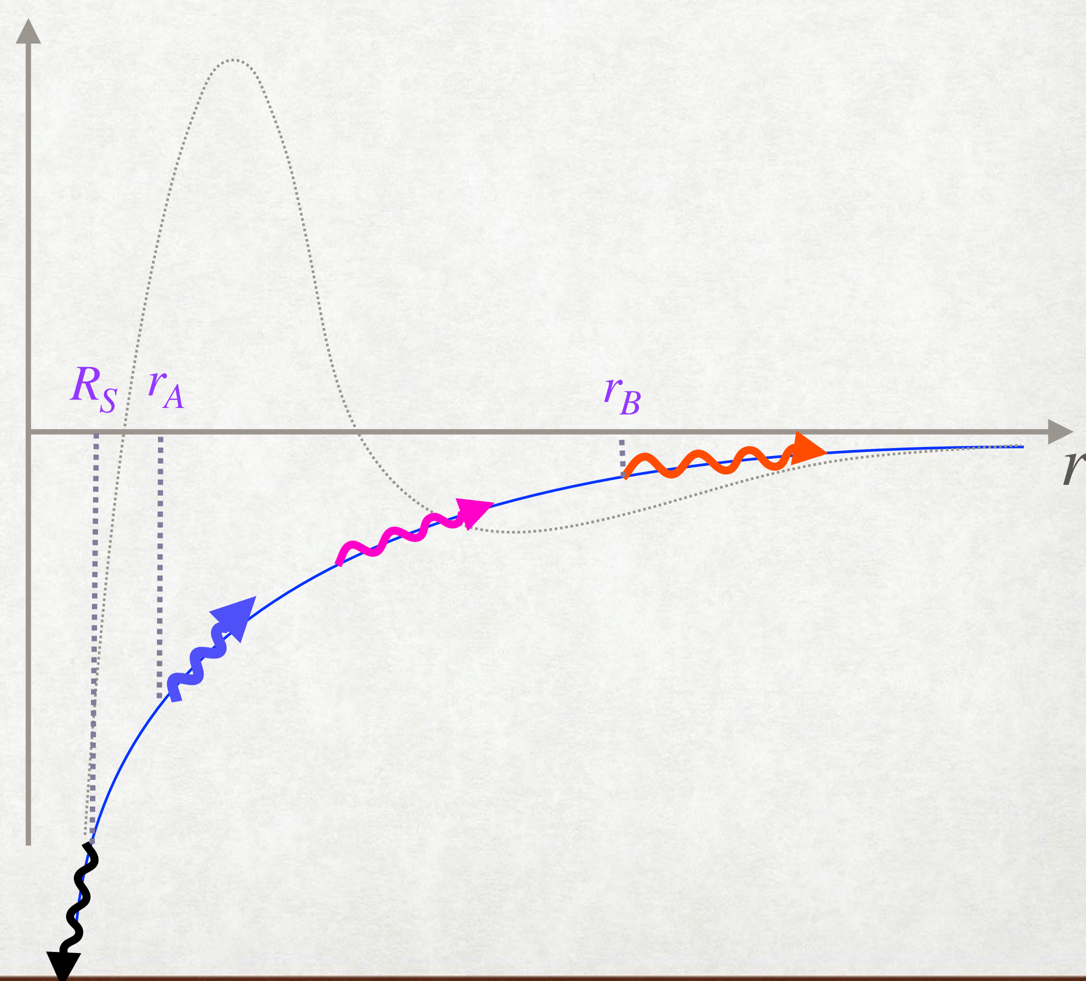
- De fato, anteriormente obtivemos que a energia de um fóton emitido de um ponto A, e detectado num ponto B, é dada por:

$$\frac{E_B}{E_A} = \frac{\nu_B}{\nu_A} = \sqrt{\frac{g_{00}(A)}{g_{00}(B)}}$$

- Portanto, um fóton emitido na proximidade de um buraco negro, em r_A , e detectado num ponto r_B, sofrerá um redshift:

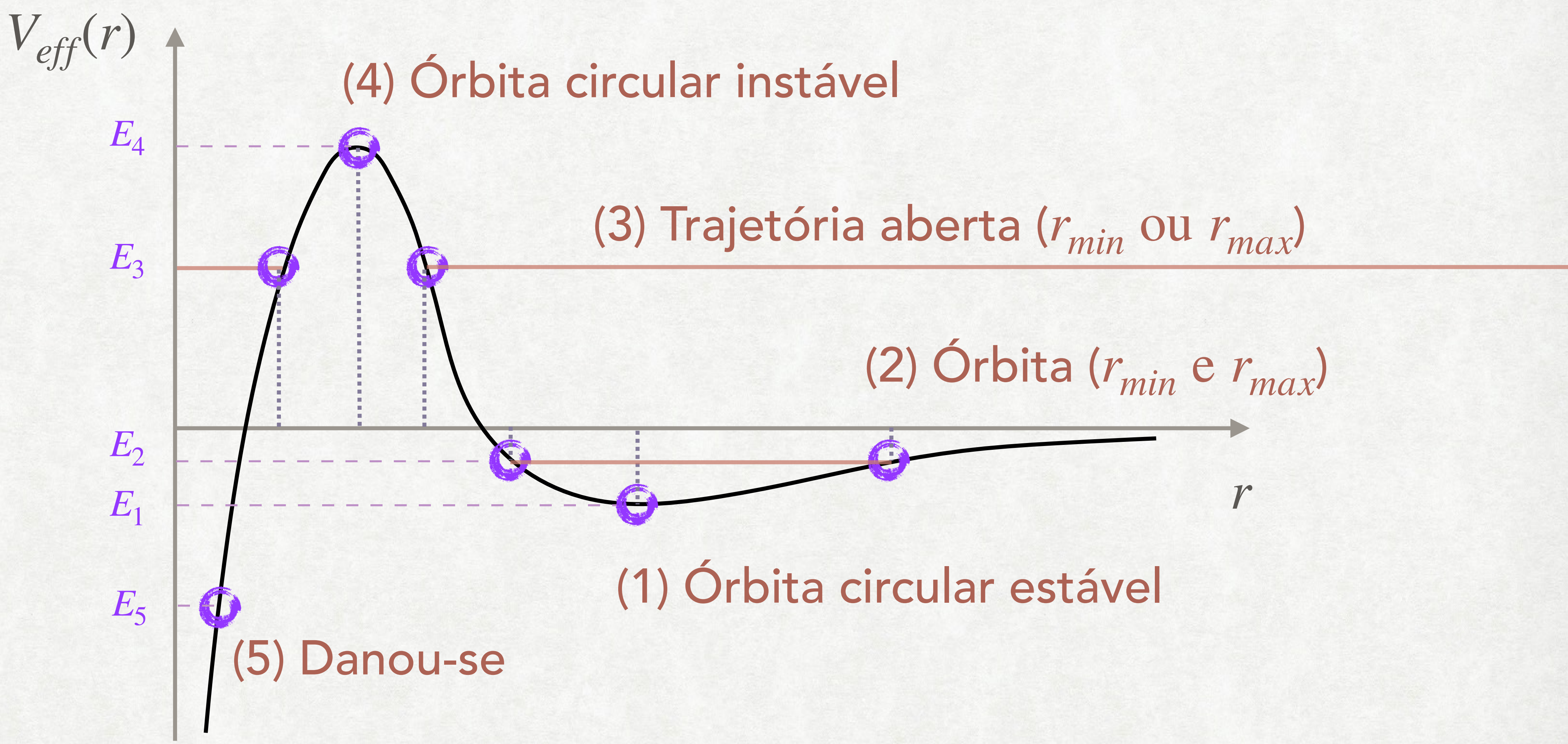
$$\frac{E_B}{E_A} = \frac{\nu_B}{\nu_A} = \sqrt{\frac{1 - R_S/r_A}{1 - R_S/r_B}}$$

- E, claro: um fóton emitido desde $r_A \to R_S$ vai sofrer um ***redshift infinito*** ($E_B \to 0$, $\nu_B \to 0$), ***qualquer*** que seja $r_B > R_S$!



ÓRBITAS EM SCHWARZSCHILD

- Uma análise qualitativa das órbitas pode ser obtida diretamente do potencial efetivo:



ÓRBITAS EM SCHWARZSCHILD

- Anteriormente obtivemos o resultado de que a ***primeira integral*** da Equação da Geodésica é dada por ds^2, que pode ser reescrito como:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = C^2 - e^{-a}\left(\frac{j^2}{r^2} + u^2\right)$$

onde $u^2 = 1$ se $m \neq 0$, e $u^2 = 0$ se $m = 0$, e onde usamos as constantes de movimento:

$$\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} = C \quad \text{(=energia)} \qquad \text{e} \qquad r^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = j \quad \text{(= momento angular)} \;\;,$$

e onde, lembre-se, $\lambda \rightarrow \tau$ no caso de geodésicas não-nulas.

ÓRBITAS EM SCHWARZSCHILD

- Agora, note que temos um movimento que é determinado por $r(\lambda)$ e (através da conservação do momento angular), por $\varphi(\lambda)$, através da equação $r^2\dfrac{d\varphi}{d\lambda} = j$.

- Mas essas relações implicam que raio e ângulo podem ser parametrizados diretamente, um pelo outro.

- Ou seja, podemos, por exemplo, inverter $\varphi(\lambda) \to \lambda(\varphi)$, e assim $r(\lambda) \to r(\varphi)$:

$$r^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = j \quad \to \quad \frac{d}{d\lambda} = \frac{j}{r^2}\frac{d}{d\varphi}$$

- Portanto, temos:

$$\Rightarrow \quad \frac{j^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = C^2 - e^{-a}\left(\frac{j^2}{r^2} + u^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{j^2}{r^4}dr^2}{C^2 - e^{-a}\left(\frac{j^2}{r^2} + u^2\right)} = d\varphi^2$$

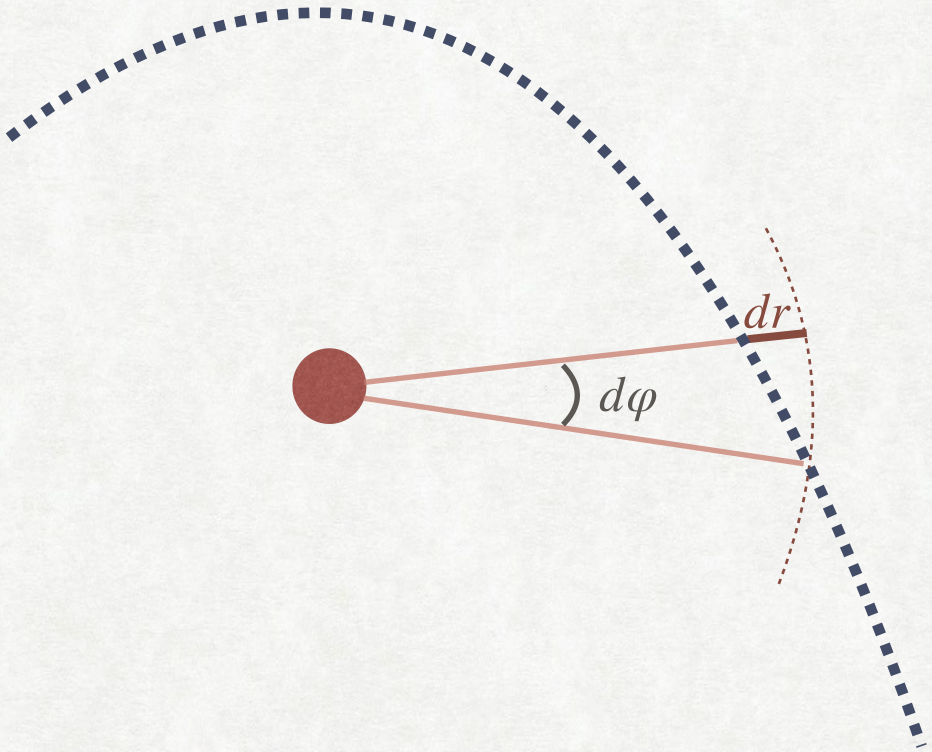
ÓRBITAS EM SCHWARZSCHILD

- Assim, obtemos uma integral do movimento em termos do ***ângulo***:

$$\Rightarrow \quad \int dr \, \frac{|j|}{r^2\sqrt{C^2 - e^{-a}\left(\frac{j^2}{r^2} + u^2\right)}} = \int d\varphi$$

Lembrando que $e^{-a} = 1 - \dfrac{R_s}{r}$, obtemos:

$$\Rightarrow \quad \varphi(r) = \int dr \, \frac{1}{\sqrt{r^4\frac{C^2}{j^2} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r^2 \left(1 + \frac{u^2}{j^2} r^2\right)}}$$



- À qual juntamos, por completeza, a relação:

$$t = \pm \int \frac{C\, dr}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \sqrt{C^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{j^2}{r^2} + u^2\right)}}$$

DEMONSTRAÇÕES NO MATHEMATICA

PARA A AULA QUE VEM:

- **A 4a lista já está sendo preparada...**
- Leitura: S. Carroll, Capítulo 5